UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES
3 9087 00082961 6

Blaschke · Leichtweiß

Elementare Differentialgeometrie

5. Auflage

THE UNIVERSITY
OF ROCHESTER
LIBRARY

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 1

Herausgegeben von J. L. Doob A. Grothendieck E. Heinz
F. Hirzebruch E. Hopf W. Maak
S. Mac Lane W. Magnus J. K. Moser
M. M. Postnikov F. K. Schmidt
D. S. Scott K. Stein

Geschäftsführende Herausgeber B. Eckmann und B. L. van der Waerden

W. Blaschke · K. Leichtweiß

Elementare Differentialgeometrie

5. vollständig neubearbeitete Auflage
von K. Leichtweiß

Mit 37 Figuren

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1973

Kurt Leichtweiß
Mathematisches Institut B der Universität Stuttgart

Geschäftsführende Herausgeber

B. Eckmann
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

B. L. van der Waerden
Mathematisches Institut der Universität Zürich

AMS Subject Classification (1970) 53-01

Das Buch erschien bisher unter dem Titel
Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I

ISBN 3-540-05889-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-05889-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

---

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist. © by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1973.
Printed in Germany. Library of Congress Catalog Number 72-90 195

MATH.-SCI. 1362775
QA
641
.B6254
1973

Vorwort zur fünften Auflage

Die „klassische", d.h. bewegungsinvariante Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum hat seit dem Erscheinen der 4. Auflage dieses Buches im Jahre 1945 eine stetige Weiterentwicklung erfahren, wobei insbesondere Fragen der Differentialgeometrie „im Großen" im Vordergrund des Interesses standen. Der zweitgenannte Verfasser hat es sich zur Aufgabe gemacht, die wichtigsten neuen Erkenntnisse über diesen Gegenstand in die 5. Auflage des Blaschkeschen Werkes: „Elementare Differentialgeometrie" aufzunehmen. Dabei wurde eine vollständige Umarbeitung und Neuformulierung des früheren Textes erforderlich, um einerseits von Anfang an die notwendigen Präzisierungen treffen zu können und um andererseits — in Übereinstimmung mit den Absichten des 1962 verstorbenen erstgenannten Verfassers — die Darstellung der „Tensoranalysis" und des „Differentialformenkalküls" als analytische Hilfsmittel innerhalb des Buches zu ermöglichen. Es versteht sich von selbst, daß bei dieser Gelegenheit viele unvollständige Beweise ergänzt oder geändert werden mußten, wobei aber der Geist des Buches hoffentlich beibehalten werden konnte.

Zwecks auch äußerlicher Anpassung an den Stil der früheren Auflage wurde die Einteilung in die einzelnen Kapitel und Sachgebiete nicht geändert; lediglich das 9. Kapitel über Liniengeometrie mußte aus Platzgründen entfallen. Die für die späteren Anwendungen wichtigen Grundlagen der Tensorrechnung bzw. des Differentialformenkalküls erscheinen neu am Ende des 4. Kapitels bzw. am Anfang des 5. Kapitels. Das 7. Kapitel über Fragen der Flächentheorie im Großen wurde aus dem anfangs genannten Grund total umgeschrieben und dabei stark vergrößert; insbesondere wurde die Rolle der Klasse der „vollständigen Flächen" hervorgehoben. Aus didaktischen Gründen sind schließlich die den einzelnen Kapiteln angefügten früheren Paragraphen über „Aufgaben und Lehrsätze" in Paragraphen über a) Übungsaufgaben und b) Bemerkungen umgewandelt worden.

Von den Herren H. Hopf (Zürich), H. Karcher (Bonn) und W. Klingenberg (Bonn) stammen wichtige Hinweise und Anregungen für die Neubearbeitung; ferner hat das Mathematische Institut der Universität

Freiburg dieselbe durch Erstellung einer Literaturkartei wesentlich unterstützt. Frau F. Müller sowie die Herren G. Blind, E. Glässner, S. Grüner, L. Profke, H. Sachs (alle Stuttgart) haben sich freundlicherweise an der Korrektur beteiligt. Frl. Eisele (Stuttgart) hat einen Teil des druckfertigen Manuskriptes hergestellt. Ich danke allen Genannten herzlich, ebenso dem Verlag für seine Unterstützung.

Möge dieses Buch dazu beitragen, die Geometrie in einer Zeit wachzuhalten, in der eine als alleinseligmachend verstandene, abstrakte „Strukturmathematik" die Quellen anschaulichen Denkens zu verschütten droht!

Stuttgart, im Januar 1973

K. Leichtweiss

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

§ 1. Innere Produkte 1
§ 2. Determinanten und Vektorprodukte 4
§ 3. Invarianten bei Abbildungsgruppen, vollständiges Invariantensystem einer endlichen Punktmenge 7
§ 4. Ein vollständiges System unabhängiger Invarianten einer endlichen Punktmenge 12

1. Kapitel

Kurventheorie

§ 5. Bogenlänge 15
§ 6. Tangente und Schmiegebene 17
§ 7. Krümmung und Windung 20
§ 8. Rechnerische Bestimmung der Invarianten einer Kurve 23
§ 9. Formeln von Frenet 28
§ 10. Über das Vorzeichen der Windung 31
§ 11. Kinematische Deutung von Frenets Formeln 33
§ 12. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz 35
§ 13. Krümmungsmittelpunkt und Schmiegkreis 37
§ 14. Schmiegkugeln 38
§ 15. Bertrand-Kurven 40
§ 16. Natürliche Gleichungen 41
§ 17. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen 44
§ 18. Böschungslinien 45
§ 19. Böschungslinien auf einer Kugel 47
§ 20. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid 48
§ 21. Evolventen, Evoluten 49
§ 22. Isotrope Kurven 50
§ 23. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven 52
§ 24. Übungsaufgaben und Bemerkungen 54

2. Kapitel

Extreme bei Kurven

§ 25. Die erste Variation der Bogenlänge 59
§ 26. Variationsprobleme von J. Radon 61
§ 27. Bestimmung der Extremalen unserer Variationsprobleme 63

§ 28. Die Isoperimetrie des Kreises 65
§ 29. Beweis von E. Schmidt 67
§ 30. Ein Beweis von A. Hurwitz 69
§ 31. Sätze über Raumkurven mit vorgegebener Krümmung 72
§ 32. Übungsaufgaben und Bemerkungen 77

3. Kapitel

Streifen

§ 33. Das begleitende Dreibein eines Streifens 80
§ 34. Geometrische Deutung der Invarianten eines Flächenstreifens 82
§ 35. Krümmungsstreifen, Schmiegstreifen und geodätische Streifen 85
§ 36. Drehung eines Streifens um seine Kurve 87
§ 37. Verbiegung eines Streifens 89
§ 38. Der Parallelismus von Levi-Civita 92
§ 39. Beweis von Radon für einen Satz von E. Schmidt 94
§ 40. Übungsaufgaben und Bemerkungen 97

4. Kapitel

Anfangsgründe der Flächentheorie

§ 41. Die erste Grundform 99
§ 42. Die zweite Grundform 103
§ 43. Sätze von Meusnier und Euler 104
§ 44. Hauptkrümmungen 108
§ 45. Das Gaußsche Theorema egregium 110
§ 46. Krümmungslinien 112
§ 47. Nabelpunkte 115
§ 48. Satz von Dupin über rechtwinklige Flächennetze 116
§ 49. Die winkeltreuen Abbildungen des euklidischen Raumes 119
§ 50. Gauß' sphärisches Abbild einer Fläche 121
§ 51. Normalensysteme 124
§ 52. Asymptotenlinien 125
§ 53. Asymptotenlinien auf Regelflächen 127
§ 54. Konjugierte Netze 129
§ 55. Ableitungsformeln von Weingarten 130
§ 56. Satz von Beltrami und Enneper über die Windung der Asymptotenlinien 133
§ 57. Die Ableitungsformeln von Gauß 134
§ 58. Integrierbarkeitsbedingungen von Gauß und Codazzi 135
§ 59. Fundamentalsatz der Flächentheorie 138
§ 60. Ein Hilfssatz über ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen 140
§ 61. Kovariante Richtungsableitung eines Tangentialvektorfelds der Fläche 145
§ 62. Kovektoren und Tensoren auf einer Fläche 147
§ 63. Kovariante Ableitung von Tensorfeldern 149
§ 64. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen der Flächentheorie in Tensorschreibweise 152
§ 65. G. Monge 155
§ 66. Übungsaufgaben und Bemerkungen 156

5. Kapitel

Cartansche Differentialformen auf einer Fläche

§ 67. Definition, alternierendes Produkt und äußeres Differential von Differentialformen 162
§ 68. Rechengesetze, Transformation von Differentialformen 166
§ 69. Zusammenhang der Differentialformen mit Tensoren 170
§ 70. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen für die „beweglichen Dreibeine" E. Cartans 173
§ 71. Grundgrößen der Flächentheorie in Cartanscher Schreibweise 175
§ 72. Invariante Ableitungen bezüglich eines Paares von Pfaffschen Formen 178
§ 73. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen in invarianter Schreibweise 182
§ 74. Gesimsflächen und Kanalflächen 186
§ 75. Übungsaufgaben und Bemerkungen 190

6. Kapitel

Innere Geometrie einer Fläche

§ 76. Verbiegung 192
§ 77. Geodätische Krümmung 195
§ 78. Geodätische Linien 196
§ 79. Geodätische Polarkoordinaten 199
§ 80. Biegungsinvariante Deutung des Krümmungsmaßes 203
§ 81. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise 204
§ 82. Flächen festen Krümmungsmaßes 205
§ 83. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf Poincarés Halbebene 207
§ 84. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K = -1$ auf sich selbst . 210
§ 85. Das Integral der geodätischen Krümmung 214
§ 86. Folgerungen aus der Integralformel von Gauß und Bonnet 216
§ 87. Über Hüllkurven von geodätischen Linien 218
§ 88. Beltramis erster Differentiator 220
§ 89. Eine geometrische Anwendung des ersten Differentiators von Beltrami 222
§ 90. Beltramis zweiter Differentiator 224
§ 91. Integralformeln von Gauß und Green 225
§ 92. Zwei neue Formeln für die geodätische Krümmung 227
§ 93. Isotherme Parameter 228
§ 94. Winkeltreue Abbildung 231
§ 95. Die Förderung der Flächentheorie durch Gauß 232
§ 96. Übungsaufgaben und Bemerkungen 233

7. Kapitel

Fragen der Flächentheorie im Großen

§ 97. Begriff einer differentialgeometrischen Fläche 237
§ 98. Gesamtkrümmung geschlossener Flächen 241
§ 99. Die Indexsummenformel Poincarés 246
§ 100. Geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung 250
§ 101. Geschlossene Flächen mit konstanter Gaußscher Krümmung 253

§ 102. Die Integralformeln Minkowskis 255
§ 103. Kongruenzsätze bzw. Ähnlichkeitssätze für zwei durch Parallelprojektion bzw. Zentralprojektion aufeinander bezogene geschlossene Flächen 259
§ 104. Kongruenzsätze für zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen 268
§ 105. Ein Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen 274
§ 106. Verbiegung geschlossener Flächen 281
§ 107. Existenz geschlossener bzw. vollständiger Flächen mit vorgegebener erster Grundform 286
§ 108. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Flächen mit vollständiger innerer Flächenmetrik 291
§ 109. Schnittort und konjugierte Punkte 298
§ 110. Ein Satz Jacobis 303
§ 111. Wiedersehensflächen 310
§ 112. Ein Dreiecksvergleichssatz von A. D. Aleksandrow 312
§ 113. Der innere Durchmesser einer Eifläche 319
§ 114. Übungsaufgaben und Bemerkungen 326

8. Kapitel

Extreme bei Flächen

§ 115. Erste Variation der Oberfläche 329
§ 116. Die Minimalflächen als komplexe Schiebflächen 330
§ 117. Formeln von Weierstraß für Minimalflächen 332
§ 118. Formeln von Study für Minimalflächen 335
§ 119. Eine Formel von Schwarz für die Oberfläche einer Minimalfläche . . . 338
§ 120. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen 339
§ 121. Zweite Variation der Oberfläche 341
§ 122. Ein Satz von Bernstein über Minimalflächen im Großen 344
§ 123. Isoperimetrie der Kugel 347
§ 124. Wirkung von Steiners Symmetrisierung auf Rauminhalt und Oberfläche einer Eifläche 349
§ 125. Konvergenzbeweis von Wilhelm Groß 352
§ 126. Übungsaufgaben und Bemerkungen 357

Namen- und Sachverzeichnis 360

Einleitung

§ 1. Innere Produkte

Wir führen im Raume ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Achsen so orientiert sind, wie das in der Fig. 1 angedeutet ist. Die drei Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{x}$ bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3. Alle betrachteten Punkte setzen wir, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, als reell voraus.

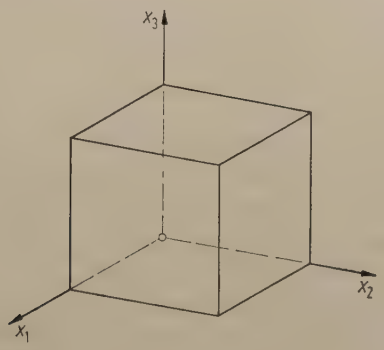


Fig. 1.

Zwei in bestimmter Reihenfolge angeordnete Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Raumes mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 bestimmen eine von $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{y}$ führende gerichtete Strecke. Zwei zu den Punktepaaren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}$ gehörende gerichtete Strecken sind dann und nur dann gleichsinnig parallel und gleich lang, wenn die entsprechenden Koordinatendifferenzen alle übereinstimmen:

$$(1) \qquad y_i - x_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wir bezeichnen das System aller von den sämtlichen Punkten des Raumes auslaufenden gerichteten Strecken von einer und derselben Richtung, demselben Sinn und der gleichen Länge als einen *Vektor*. Da für diese Strecken die Koordinatendifferenzen der beiden Endpunkte immer die gleichen sind, können wir diese drei Differenzen dem Vektor als seine

Komponenten zuordnen, und zwar entsprechen die verschiedenen Systeme der als Vektorkomponenten genommenen Zahlentripel eineindeutig den verschiedenen Vektoren. An den Vektoren ist bemerkenswert, daß ihre Komponenten sich bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems nicht ändern im Gegensatz zu den Koordinaten der Punkte. Eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems ist durch die Formeln

$$\hat{x}_i = x_i + a_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

gegeben, wo x_i die alten und $\hat{x}_i$ die neuen Koordinaten sind, die a_i aber für den ganzen Raum feste Konstanten. In der Tat heben sich ja die a_i bei der Bildung der Differenzen z. B. in (1) fort.

Gleichungen der Art (2), die in allen Koordinaten dieselbe Gestalt haben, wollen wir abkürzend in der Form

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a} \tag{3}$$

schreiben, indem wir die Fußmarken weglassen und statt der lateinischen Buchstaben der Koordinaten die deutschen (Frakturbuchstaben) schreiben. Diese Schreibweise benutzen wir für die Koordinaten der Punkte wie auch die Komponenten der Vektoren. Einen Vektor mit den Komponenten a_i bezeichnen wir dann auch als Vektor $\mathfrak{a}$. Offenbar ist in (3) $\mathfrak{a}$ der Vektor, um den alle Punkte gleichzeitig parallel verschoben werden. Die Koordinaten x_i eines Punktes $\mathfrak{x}$ können wir auffassen als die Komponenten des Vektors, der vom Koordinatenursprung mit den Koordinaten (0, 0, 0) nach $\mathfrak{x}$ führt. Wir sprechen dann mit einem gewissen Mangel an Folgerichtigkeit auch von dem Vektor $\mathfrak{x}$ dieses Punktes. Dabei ist aber zu bemerken, daß dieser „Ortsvektor" des Punktes wesentlich abhängt von der Wahl des Ursprungs und sich bei Parallelverschiebung des Koordinatensystems ändert. Ein Vektor im wirklichen Sinne, der sich bei einer solchen Parallelverschiebung nicht ändert, wird erst durch zwei Punkte mittels ihrer Koordinatendifferenzen bestimmt. Im folgenden werden wir diesen Unterschied zwischen Punkten und Vektoren nicht weiter in der Bezeichnungsweise hervorheben und für beide deutsche Buchstaben gebrauchen.

Gelten für drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Gleichungen $c_i = a_i + b_i$ oder

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \tag{4}$$

so bezeichnet man $\mathfrak{c}$ als die *Summe von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$. Als *skalares Produkt* eines Vektors $\mathfrak{v}$ mit einer Zahl c erklären wir den Vektor mit den Komponenten $c \cdot v_i$. Den Ausdruck

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{5}$$

für zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nennt man ihr *inneres Produkt oder Skalarprodukt*. Wir kürzen diesen Ausdruck einfach durch das Symbol $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ ab.

Oft werden wir auch Klammern setzen: $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$. Die zu der Bilinearform (5) gehörige quadratische Form

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{6}$$

bezeichnen wir als das *Quadrat* von $\mathfrak{x}$ und schreiben statt $\mathfrak{x}\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{x}^2$. Nehmen wir den Vektor $\mathfrak{y} - \mathfrak{z}$, der durch die Koordinatendifferenzen der Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bestimmt wird, so schreiben wir für sein Quadrat $(\mathfrak{y} - \mathfrak{z})^2$ oder $(\mathfrak{y} - \mathfrak{z})\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{z})$. Entsprechend setzen wir z.B. für das innere Produkt zweier durch zwei Punktepaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gebildeter Vektoren $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})$:

$$(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\,(\mathfrak{c} - \mathfrak{d}) \tag{7}$$
$$= (a_1 - b_1)\,(c_1 - d_1) + (a_2 - b_2)\,(c_2 - d_2) + (a_3 - b_3)\,(c_3 - d_3).$$

Man bestätigt ferner durch ausführliche Berechnung in Komponenten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}),\\ \mathfrak{y} + \mathfrak{z} = \mathfrak{z} + \mathfrak{y},\\ \mathfrak{y}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{y}.\end{gathered} \tag{8}$$

Es kommt also auf die Anordnung der Vektoren bei Addition und innerem Produkt nicht an. Ferner gilt:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\mathfrak{z} \tag{9}$$

und daher

$$(\mathfrak{y} + \mathfrak{z})^2 = \mathfrak{y}\mathfrak{y} + 2\mathfrak{y}\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}. \tag{10}$$

Eine Vektorgleichung der Form

$$\mathfrak{d} = A\mathfrak{a} + B\mathfrak{b} + C\mathfrak{c} \tag{11}$$

mit Koeffizienten A, B, C ($\mathfrak{d}$ ist „Linearkombination" von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) können wir mit einem weiteren Vektor $\mathfrak{v}$ „skalar multiplizieren" und erhalten dann:

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{d}) = A(\mathfrak{v}\mathfrak{a}) + B(\mathfrak{v}\mathfrak{b}) + C(\mathfrak{v}\mathfrak{c}). \tag{12}$$

Diese Rechenregel werden wir besonders häufig anwenden. Für die eingeführte Produktbildung zweier Vektoren gilt aber natürlich nicht das assoziative Gesetz.

In der analytischen Geometrie zeigt man, daß

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2 = l^2 \tag{13}$$

das Quadrat der Länge l des Vektors $\mathfrak{x}$, d.h. der zugehörigen Strecken ist, und ferner, daß für den Winkel φ, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, der durch die beiden

Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gegebenen Richtungen die Formel

$$\cos\varphi = \frac{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})}{+\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})\,(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}} \tag{14}$$

gilt, wie aus (13) mittels des Kosinussatzes leicht folgt. Das Pluszeichen im Nenner deutet an, daß die positive Wurzel zu nehmen ist. Die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Vektoren ist also durch

$$\mathfrak{y}\mathfrak{z} = 0 \tag{15}$$

gegeben. Allgemein bedeutet nach (13), (14) das innere Produkt $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ das *Produkt der Längen der Vektoren* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{z}$ *mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.*

Im Gegensatz zu den einzelnen Komponenten der Vektoren, die sich bei Drehung des stets als kartesisch vorausgesetzten Koordinatensystems ändern, *sind die inneren Produkte (und Quadrate) vom Koordinatensystem ganz unabhängige Größen*, wie daraus hervorgeht, daß sie eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Bedeutung besitzen. Bildet man also etwa für einen und denselben Vektor in den Komponenten, die er in zwei verschiedenen Systemen besitzt, jedesmal das Quadrat, so erhält man beide Male denselben Wert. Die inneren Produkte sind, wie man sagt, *„invariant"* gegenüber Koordinatentransformation. Die Vektoren bilden ein zweckmäßiges Durchgangsstadium, um aus den Koordinaten gegebener Punkte Ausdrücke zu bilden, die vom Koordinatensystem nicht abhängen, die also eine von diesem unabhängige geometrische Bedeutung besitzen. Denn, indem man von den Koordinaten der Punkte zu den Koordinatendifferenzen der Punktepaare, also zu Vektoren übergeht, erhält man Ausdrücke, die schon von den Parallelverschiebungen des Koordinatensystems nicht mehr abhängen; durch die Bildung der inneren Produkte schaltet man dann aber auch noch die Drehungen aus.

Zum Unterschied von den in den Begriff der Vektoren zusammengefaßten Größentripeln wollen wir einfache, nur aus einer Zahl bestehende Größen als *skalare Größen* bezeichnen.

§ 2. Determinanten und Vektorprodukte

Ein weiterer gegenüber Drehungen des Koordinatensystems invarianter Ausdruck, den man bilden kann, ist die dreireihige *Determinante* aus drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Diese Determinante ist, wie man in der analytischen Geometrie lehrt, gleich dem mit einem geeigneten Vorzeichen versehenen *Rauminhalt des Parallelflachs* über den drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$.

Von den Rechenregeln, die für Determinanten gelten, seien als Beispiele nur angemerkt:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &+(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = +(\mathfrak{y},\mathfrak{z},\mathfrak{x}) = +(\mathfrak{z},\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \\ &-(\mathfrak{x},\mathfrak{z},\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{z},\mathfrak{y},\mathfrak{x}) = -(\mathfrak{y},\mathfrak{x},\mathfrak{z}) \end{aligned}$$

und

$$(18)\qquad (\mathfrak{x}+\mathfrak{a},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) + (\mathfrak{a},\mathfrak{y},\mathfrak{z}),$$

sowie

$$(19)\qquad (\varrho\cdot\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = \varrho\cdot(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}),$$

wenn ϱ ein skalarer Faktor ist.

Ferner gilt nach dem Multiplikationssatz der Determinanten für das *Produkt zweier Determinanten* die Formel

$$(20)\qquad (\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})\,(\bar{\mathfrak{x}},\bar{\mathfrak{y}},\bar{\mathfrak{z}}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}} & \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}} & \mathfrak{x}\bar{\mathfrak{z}} \\ \mathfrak{y}\bar{\mathfrak{x}} & \mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}} & \mathfrak{y}\bar{\mathfrak{z}} \\ \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{x}} & \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{y}} & \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} \end{vmatrix},$$

wo rechts die Determinante aus den 3×3 inneren Produkten steht.

Man ordnet zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ einen dritten $\mathfrak{z}$ als ihr „*Vektorprodukt*“ oder „*äußeres Produkt*“ zu nach den Formeln

$$(21)\qquad \begin{aligned} z_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, \\ z_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, \\ z_3 &= x_1y_2 - x_2y_1. \end{aligned}$$

Für (21) schreibt man eine „Vektorgleichung“

$$(22)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}\times\mathfrak{y},$$

wobei das Zeichen $\times$ die Bildung des Vektorprodukts andeutet. Bekanntlich läßt sich der Produktvektor $\mathfrak{z}$ geometrisch durch die Eigenschaften erklären: 1. $\mathfrak{z}$ steht auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht, 2. die Länge von $\mathfrak{z}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, 3. der Sinn von $\mathfrak{z}$ ist im Falle $\mathfrak{z}^2 > 0$ so zu wählen, daß die drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in dieser Reihenfolge genau so orientiert sind wie die Koordinatenachsen (vgl. Fig. 1), d.h. daß $(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) > 0$ gilt. Der Produktvektor $\mathfrak{z}$ ist den Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ also auf eine rein geometrische Weise zugeordnet, er ist, wie man sagt, „mit den Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auf eine gegenüber Koordinatentransformationen (bei welchen die Achsen der zwei Koordinatensysteme gleich orientiert sind) invariante Weise verknüpft“. Für die

Vektorprodukte gilt, wie man sofort sieht, die Rechenregel:

$$(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}) = -(\mathfrak{y}\times\mathfrak{x}). \tag{23}$$

In einem Vektorprodukt sind also die Vektoren nicht vertauschbar. Das Vektorprodukt ist alternierend. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}(c\mathfrak{x})\times\mathfrak{y} &= c(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}\times(c\mathfrak{y}),\\ \mathfrak{x}\times(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}) &= (\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\times\mathfrak{z}).\end{aligned} \tag{24}$$

Ferner ist nach (23) $\mathfrak{x}\times\mathfrak{x} = 0$. Die Gleichung

$$\mathfrak{x}\times\mathfrak{y} = 0 \tag{25}$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die *lineare Abhängigkeit* der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ heißen dabei linear abhängig, wenn man zwei nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen a und b finden kann, so daß die Vektorgleichung $a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = 0$ gilt. Ebenso ist

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0 \tag{26}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die entsprechend definierte lineare Abhängigkeit dreier Vektoren. Die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren bedeutet Übereinstimmung der Richtung und die von dreien, daß die Vektoren zu einer Ebene parallel liegen. Vier Vektoren sind in unserem dreidimensionalen Raum immer linear abhängig; während ein Vektor genau dann linear abhängig ist, wenn er die Länge Null besitzt. Sind r Vektoren nicht linear abhängig (linear unabhängig), aber zusammen mit einem weiteren Vektor linear abhängig, dann kann der letztere Vektor aus den r Vektoren linear kombiniert werden ($1 \leqq r \leqq 3$). Daß der Produktvektor $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\times\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht steht, folgt auch aus der wichtigsten Rechenregel

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y}\times\mathfrak{z}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{z}\times\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \tag{27}$$

in der links immer das innere Produkt aus einem Vektor und einem Vektorprodukt steht und rechts eine Determinante. Es handelt sich bei dieser Formel (27) um die Entwicklung der Determinante $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ nach einer Spalte (Determinantenentwicklung von Laplace).

Weiter geben wir als Rechenregel noch die „Identität von J. L. Lagrange" für das innere Produkt zweier Vektorprodukte an:

$$(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\,(\bar{\mathfrak{x}}\times\bar{\mathfrak{y}}) = (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})\,(\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}) - (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}})\,(\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{x}}). \tag{28}$$

Ferner läßt sich daraus leicht die folgende Formel herleiten:

$$(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y})\times\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}\mathfrak{z})\,\mathfrak{y} - (\mathfrak{y}\mathfrak{z})\,\mathfrak{x}. \tag{29}$$

§ 3. Invarianten bei Abbildungsgruppen, vollständiges Invariantensystem einer endlichen Punktmenge

Ein für die Geometrie fundamentales Prinzip ist von F. Klein in seinem berühmten „Erlanger Programm" 1872 aufgestellt worden. Es besagt kurz gesagt folgendes: *Nicht die geometrische Figur individuell betrachtet ist von Interesse, sondern nur diejenigen Eigenschaften der Figur, die sich bei allen auf die Figur ausgeübten Abbildungen einer gewissen „Abbildungsgruppe" nicht ändern,* oder anders gesagt, die gegenüber diesen Abbildungen „invariant" sind. *Eine Menge von Abbildungen unseres dreidimensionalen Raums in sich soll dabei als „Gruppe" bezeichnet werden, wenn mit jeder Abbildung der Menge auch die zugehörige Umkehrabbildung zur Menge gehört und wenn außerdem mit je zwei beliebigen Abbildungen der Menge ebenfalls die aus diesen beiden Abbildungen zusammengesetzte Abbildung ein Element der Menge ist.* Ein Beispiel einer Abbildungsgruppe stellen die nichtausgearteten affinen Abbildungen unseres Raums

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + c_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

(hierbei ist die Determinante $\|a_{ij}\| \neq 0$!)

dar, wobei die Koordinaten des zum Punkt mit den Koordinaten x_i gehörenden Bildpunkts mit $\hat{x}_i$ bezeichnet sind. Man nennt die so definierte Gruppe kurz die „affine" Gruppe. Ebenfalls bilden alle (eigentlichen) Bewegungen des Raums eine Gruppe, welche sich bekanntlich durch lineare Transformationen der Gestalt

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} x_j + d_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{30}$$

darstellen lassen, bei denen die Koeffizienten b_{ij} an die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{3} b_{ij} b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{31}$$

und

$$\|b_{jk}\| = +1 \tag{32}$$

geknüpft sein müssen.

Nach F. Klein wird nun zunächst irgendeine Abbildungsgruppe vorgegeben. Dann hat „die zu dieser Gruppe gehörende" Geometrie alle Invarianten der Gruppe und die Beziehungen zwischen diesen zum Inhalt. *So gehört beispielsweise zur affinen Gruppe die affine Geometrie und zur Bewegungsgruppe die euklidische Geometrie.* In diesem Bande soll nur von letzterer die Rede sein. Dies berechtigt uns zu der Behauptung, daß bei uns im folgenden nur die Invarianten gegenüber Bewegungen des

Raums von Interesse sein werden, d.h. daß nur ihnen eine „geometrische" Bedeutung zukommen wird.

Wenn eine Figur allein durch eine endliche Menge von Punkten

$$\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)} \tag{33}$$

gegeben ist, so kommt das Auffinden geometrischer Eigenschaften dieser Figur auf die Bestimmung von aus den angegebenen Punkten gebildeten Bewegungsinvarianten hinaus. Solche Invarianten lassen sich leicht finden; so ist z.B. der Abstand der Punkte $\mathfrak{x}^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{x}^{(\beta)}$: $+\sqrt{(\mathfrak{x}^{(\alpha)} - \mathfrak{x}^{(\beta)})^2}$ bei beliebigen Bewegungen der Figur invariant $(\alpha, \beta = 0, \ldots, p)$. Dasselbe gilt für die inneren Produkte

$$\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}, \tag{34}$$

wobei

$$\mathfrak{v}^{(\gamma)} = \mathfrak{x}^{(\gamma)} - \mathfrak{x}^{(0)} \tag{35}$$

gesetzt worden ist $(\gamma, \delta = 1, \ldots, p)$. Die rechnerische Nachprüfung ergibt nämlich in der Tat für die Komponenten $v_i^{(\gamma)}$ von $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ nach (30):

$$\hat{v}_i^{(\gamma)} = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} v_j^{(\gamma)},$$

also

$$\hat{\mathfrak{v}}^{(\gamma)}\hat{\mathfrak{v}}^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{3} \hat{v}_i^{(\gamma)}\hat{v}_i^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} b_{ij} v_j^{(\gamma)}\right)\left(\sum_{k=1}^{3} b_{ik} v_k^{(\delta)}\right) = \sum_{j,k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} b_{ij} b_{ik}\right) v_j^{(\gamma)} v_k^{(\delta)}.$$

Nun ist aber nach (31) der Ausdruck rechts gleich $\sum_{j=1}^{3} v_j^{(\gamma)} v_j^{(\delta)} = \mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$, was zu beweisen war. Auch die aus drei der Vektoren $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ gebildeten Determinanten

$$(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)}) \quad (1 \leqq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p) \tag{36}$$

stellen Bewegungsinvarianten unserer Punktmenge dar, weil auf Grund der Rechenregel (20) sowie auf Grund von (32):

$$(\hat{\mathfrak{v}}^{(\gamma_1)}, \hat{\mathfrak{v}}^{(\gamma_2)}, \hat{\mathfrak{v}}^{(\gamma_3)}) = \|b_{ij}\|\,(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)}) = (\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$$

gilt.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, für die Punkte (33) ein „vollständiges" System von Bewegungsinvarianten zu bestimmen, d.h. so viele Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_q$ zu bestimmen, daß sich jede weitere Invariante als eine eindeutige Funktion der $I_1, \ldots, I_q$ ergibt. Es kann erwartet werden, daß durch die Vorgabe der Werte der Invarianten eines derartigen vollständigen Systems die Punkte (33) schon bis auf eine Bewegung eindeutig festgelegt sind. Wir verifizieren jetzt diese Vermutung in dem Falle der schon als Invarianten erkannten inneren Produkte (34)

und Determinanten (36), indem wir zeigen: *Die inneren Produkte* $(\mathfrak{x}^{(\gamma)} - \mathfrak{x}^{(0)})\,(\mathfrak{x}^{(\delta)} - \mathfrak{x}^{(0)})$ *und die Determinanten* $(\mathfrak{x}^{(\gamma_1)} - \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(\gamma_2)} - \mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(\gamma_3)} - \mathfrak{x}^{(0)})$ *bilden ein vollständiges Invariantensystem der Punkte* $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ *und bestimmen die letzteren bis auf eine Bewegung eindeutig* $(1 \leqq \gamma, \delta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p)$[1].

Zum Beweis dieser Behauptung denken wir uns r linear unabhängige Vektoren aus den $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ herausgegriffen, wobei r die Maximalzahl von linear unabhängigen Vektoren unter den $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ sei. r kann hierbei 0, 1, 2 oder 3 sein. Die herausgegriffenen Vektoren sollen *Grundvektoren* genannt werden, und wir denken uns die Numerierung der Punkte und Vektoren so abgeändert, daß gerade die ersten r Vektoren $\mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(r)}$ die Grundvektoren darstellen.

Dann wollen wir zunächst beweisen: Die Lage der Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(r)}$ im Raum ist bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt, wenn man nur die Werte der inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}$ und der Determinanten $(\mathfrak{v}^{(\lambda_1)}, \mathfrak{v}^{(\lambda_2)}, \mathfrak{v}^{(\lambda_3)})$ kennt $(1 \leqq \lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leqq r)$. In den Fällen $r = 0$, $r = 1$ und $r = 2$ ist dies trivial, da nach (13) und (14) die Längen der $\mathfrak{v}^{(\lambda)}$ und die Winkel zwischen ihnen sich eindeutig aus den $\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}$ berechnen lassen. Es sei also jetzt $r = 3$, und man nehme an, es seien vier weitere Punkte $\mathfrak{y}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(3)}$ vorhanden, für welche

$$(\mathfrak{y}^{(\lambda)} - \mathfrak{y}^{(0)})\,(\mathfrak{y}^{(\mu)} - \mathfrak{y}^{(0)}) = \mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)} \text{ und } (\mathfrak{y}^{(\lambda_1)} - \mathfrak{y}^{(0)}, \mathfrak{y}^{(\lambda_2)} - \mathfrak{y}^{(0)}, \mathfrak{y}^{(\lambda_3)} - \mathfrak{y}^{(0)}) = (\mathfrak{v}^{(\lambda_1)}, \mathfrak{v}^{(\lambda_2)}, \mathfrak{v}^{(\lambda_3)})$$

gilt $(1 \leqq \lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leqq 3)$. Die eben für den Fall $r = 2$ gemachte Feststellung lehrt nun, daß sicher eine Bewegung des Raums existiert, welche die Punkte $\mathfrak{y}^{(0)}, \mathfrak{y}^{(1)}, \mathfrak{y}^{(2)}$ in die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}$ überführt. Durch diese Bewegung gehe $\mathfrak{y}^{(3)}$ in $\mathfrak{z}$ über. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß es auch eine Bewegung gibt, die $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}$ nicht ändert und $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{x}^{(3)}$ abbildet. Nun gilt aber wegen der Bewegungsinvarianz der inneren Produkte:

$$\mathfrak{v}^{(\nu)}(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}^{(0)}) = \mathfrak{v}^{(\nu)}(\mathfrak{x}^{(3)} - \mathfrak{x}^{(0)})$$

oder

$$\mathfrak{v}^{(\nu)}(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}^{(3)}) = 0 \quad (\nu = 1, 2) \tag{37}$$

sowie

$$(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}^{(0)})^2 = (\mathfrak{x}^{(3)} - \mathfrak{x}^{(0)})^2. \tag{38}$$

Die Beziehung (37) besagt geometrisch, daß im Falle $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{x}^{(3)}$ die Verbindungsgerade von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}^{(3)}$ auf der wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{v}^{(1)}$ und $\mathfrak{v}^{(2)}$ eindeutig bestimmten, durch $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}$ gehenden

[1] Weitere Ausführungen zur Invariantentheorie der Bewegungsgruppe finden sich in H. Weyl: The classical groups. Princeton Univ. Press 1946, S. 53.

Ebene Π senkrecht steht. Aus (38) folgt weiter, daß $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}^{(3)}$ auf derselben Kugel mit dem auf Π liegenden Mittelpunkt $\mathfrak{x}^{(0)}$ gelegen sind. Weil aber eine Kugel und eine Gerade höchstens zwei (reelle) Schnittpunkte miteinander haben können, hat der angeführte Sachverhalt zur Folge, daß $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}^{(3)}$ entweder in bezug auf Π spiegelsymmetrisch liegen oder zusammenfallen. Wegen

$$(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{z} - \mathfrak{x}^{(0)}) = (\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{x}^{(3)} - \mathfrak{x}^{(0)}) \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{v}^{(1)} \times \mathfrak{v}^{(2)})(\mathfrak{z} - \mathfrak{x}^{(3)}) = 0$$

bleibt nur die Möglichkeit $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}^{(3)}$ übrig. Also sind in der Tat die Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(3)}$ Bilder der Punkte $\mathfrak{y}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(3)}$ bei einer geeigneten Bewegung, oder anders gewendet: Die Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(3)}$ sind durch die inneren Produkte und die Determinanten der Grundvektoren bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt.

Im nächsten Schritt unseres Beweises wollen wir die restlichen Punkte $\mathfrak{x}^{(r+1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ in unsere Überlegungen einbeziehen und zeigen: Die Lage der Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ ist durch die Werte der inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$ und der Determinanten $(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$ bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt $(1 \leqq \gamma, \delta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p)$. Um dies nachzuweisen, kombinieren wir die Vektoren $\mathfrak{v}^{(r+1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(p)}$ linear aus den Grundvektoren[1] (was nach Definition der letzteren, wie in § 2 erwähnt, immer möglich ist):

$$\mathfrak{v}^{(\varepsilon)} = \sum_{\lambda=1}^{r} a_\lambda^{(\varepsilon)} \mathfrak{v}^{(\lambda)} \qquad (\varepsilon = r+1, \ldots, p). \tag{39}$$

Innere Multiplikation von (39) mit $\mathfrak{v}^{(\mu)}$ ergibt dann:

$$(\mathfrak{v}^{(\varepsilon)}\mathfrak{v}^{(\mu)}) = \sum_{\lambda=1}^{r} a_\lambda^{(\varepsilon)} (\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}) \qquad (\mu = 1, \ldots, r;\ \varepsilon = r+1, \ldots, p). \tag{40}$$

Für die r Größen $a_\lambda^{(\varepsilon)}$, die zu einem festen Index ε gehören, haben wir hier ein System von r linearen inhomogenen Gleichungen. Dieses System läßt sich bekanntlich in eindeutiger Weise nach den $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ auflösen, wenn man beweisen kann, daß die aus den Koeffizienten des Gleichungssystems gebildete Determinante

$$\| \mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)} \| \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, r) \tag{41}$$

von Null verschieden ist. Dies ist aber leicht möglich; denn im Falle $r = 1$ zeigt (6), daß $(\mathfrak{v}^{(1)})^2 = 0$ $\mathfrak{v}^{(1)} = 0$ zur Folge hätte (alle bisher betrachteten Vektoren haben reelle Komponenten!), was der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{v}^{(1)}$ widerspricht. Ebenso erhält man im Falle $r = 2$ bzw. $r = 3$ aus dem Verschwinden von (41) wegen (28) bzw. (20) in Verbindung mit (25) bzw. (26) einen Widerspruch zu der linearen Unabhängigkeit der Grundvektoren. Somit ist gezeigt, daß die in (39) auftretenden

[1] Da die im vorigen Satz ausgedrückte Behauptung für $r = 0$ trivial ist, sei im folgenden $r > 0$ vorausgesetzt.

Koeffizienten $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ sich in eindeutiger Weise aus den Werten der inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\lambda)}$ $(\gamma = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, r)$ berechnen lassen.

Wir nehmen nun an, es existierten neben den $p+1$ Punkten $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ weitere $p+1$ Punkte $\mathfrak{y}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(p)}$ mit

$$\mathfrak{w}^{(\gamma)}\mathfrak{w}^{(\delta)} = \mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{w}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{w}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{w}^{(\gamma_3)}) = (\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)}) \tag{42}$$

$$(1 \leqq \gamma, \delta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p),$$

wobei $\mathfrak{w}^{(\gamma)} = \mathfrak{y}^{(\gamma)} - \mathfrak{y}^{(0)}$ gesetzt sei. Dann entsprechen den Grundvektoren $\mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(r)}$ sicher r linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(r)}$, weil die Punkte $\mathfrak{y}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(r)}$ wegen (42) nach unseren angestellten Überlegungen durch eine geeignete Bewegung B in die Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(r)}$ übergeführt werden können und eine Bewegung die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren nicht ändert. Durch Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ und $\mathfrak{w}^{(\gamma)}$ findet man, daß es auch nicht mehr als r linear unabhängige Vektoren unter den $\mathfrak{w}^{(\gamma)}$ gibt, so daß die Vektoren $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(r)}$ als Grundvektoren der $\mathfrak{w}^{(\gamma)}$ angesehen werden können und die (39) entsprechende Beziehung

$$\mathfrak{w}^{(\varepsilon)} = \sum_{\lambda=1}^{r} b_\lambda^{(\varepsilon)}\mathfrak{w}^{(\lambda)} \quad (\varepsilon = r+1, \ldots, p)$$

gilt. Die darin auftretenden Koeffizienten $b_\lambda^{(\varepsilon)}$ bestimmen sich wiederum in eindeutiger Weise aus den Produkten $\mathfrak{w}^{(\gamma)}\mathfrak{w}^{(\lambda)}$ $(\gamma = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, r)$ und stimmen wegen (42) jeweils mit den entsprechenden Koeffizienten $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ von (39) überein. Aus diesem Grunde werden nicht nur die Vektoren $\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(r)}$ durch die Bewegung B in die Vektoren $\mathfrak{v}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}^{(r)}$ abgebildet, sondern aus der Formel (30) für eine Bewegung ergibt sich, daß B auch die Vektoren $\mathfrak{w}^{(\varepsilon)} = \sum_{\lambda=1}^{r} a_\lambda^{(\varepsilon)}\mathfrak{w}^{(\lambda)}$ in die Vektoren $\mathfrak{v}^{(\varepsilon)} = \sum_{\lambda=1}^{r} a_\lambda^{(\varepsilon)}\mathfrak{v}^{(\lambda)}$ überführt $(\varepsilon = r+1, \ldots, p)$ und daß damit $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ als Bilder von $\mathfrak{y}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{y}^{(p)}$ bei B fungieren. Also sind tatsächlich die Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ durch die Werte von $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$ und $(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$ bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt.

Als letzter Beweisschritt bleibt nur noch der Nachweis übrig, daß die inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$ und die Determinanten $(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$ schon ein vollständiges Invariantensystem der Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ bilden $(1 \leqq \gamma, \delta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p)$. Zu diesem Zweck nehmen wir an, Φ sei eine Funktion der Koordinaten dieser Punkte, welche gegenüber Bewegungen der Punkte invariant sei. Nach dem Resultat des letzten Abschnitts lassen sich die Koordinaten von $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ als Funktionen der $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$ und $(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$ sowie den Bestimmungsgrößen einer Bewegung ausdrücken. Infolgedessen gilt identisch für alle $(p+1)$-Tupel von

Punkten:

$$\Phi(\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}) = F\big(\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}, (\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})\big) \quad (1 \leqq \gamma, \delta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqq p),$$

wobei F eine gewisse Funktion der angegebenen Variablen darstellt. Die Bewegungsinvarianten $\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$ und $(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})$ machen also zusammen ein vollständiges Invariantensystem der Punkte $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(p)}$ aus; jede Bewegungsinvariante Φ dieser Punkte ist eine Funktion F dieser inneren Produkte und Determinanten. Damit ist unser Beweis vollendet.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch eine, aus diesem Beweis leicht ersichtliche kleine Verschärfung unseres Ergebnisses über die Bestimmung einer endlichen Punktmenge durch gewisse innere Produkte und Determinanten angeführt: Bezeichnet man den Abstand der Punkte $\mathfrak{x}^{(\alpha)}$ und $\mathfrak{x}^{(\beta)}$ mit $d_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, \ldots, p)$, so ist nach (13), (35) und (10):

$$(d_{\gamma\delta})^2 = (\mathfrak{x}^{(\delta)} - \mathfrak{x}^{(\gamma)})^2 = (\mathfrak{v}^{(\delta)} - \mathfrak{v}^{(\gamma)})^2 = (\mathfrak{v}^{(\gamma)})^2 + (\mathfrak{v}^{(\delta)})^2 - 2\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)}$$

sowie

$$(d_{0\gamma})^2 = (\mathfrak{x}^{(\gamma)} - \mathfrak{x}^{(0)})^2 = (\mathfrak{v}^{(\gamma)})^2, \; (d_{0\delta})^2 = (\mathfrak{x}^{(\delta)} - \mathfrak{x}^{(0)})^2 = (\mathfrak{v}^{(\delta)})^2,$$

d.h.

$$\mathfrak{v}^{(\gamma)}\mathfrak{v}^{(\delta)} = \frac{1}{2}\big((d_{0\gamma})^2 + (d_{0\delta})^2 - (d_{\gamma\delta})^2\big) \quad (\gamma, \delta = 1, \ldots, p). \tag{43}$$

Wir wollen zwei endliche Punktmengen unseres Raums als *„isometrisch"* bezeichnen, wenn die Abstände entsprechender Punktepaare aus diesen Mengen jeweils einander gleich sind. Weiter sollen zwei räumliche Punktmengen *„kongruent"* heißen, wenn sie durch eine Bewegung oder durch eine Bewegung mit nachfolgender Spiegelung ineinander übergeführt werden können. Dann läßt sich die erwähnte Verschärfung wegen (43) wie folgt ausdrücken: *Zwei endliche isometrische Punktmengen des Raums sind stets kongruent.*

§ 4. Ein vollständiges System unabhängiger Invarianten einer endlichen Punktmenge

Das in § 3 angegebene und aus allen inneren Produkten sowie aus allen Determinanten der Vektoren (35) bestehende, vollständige Invariantensystem ist gewiß nicht das *kleinstmögliche* vollständige Invariantensystem der endlichen Punktmenge (33). Dies zeigt zum Beispiel u.a. das Bestehen der Relationen

$$(\mathfrak{v}^{(\gamma_1)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_2)}, \mathfrak{v}^{(\gamma_3)})\,(\mathfrak{v}^{(\delta_1)}, \mathfrak{v}^{(\delta_2)}, \mathfrak{v}^{(\delta_3)}) = \|\mathfrak{v}^{(\gamma_i)}\mathfrak{v}^{(\delta_j)}\| \tag{44}$$

$$(1 \leqq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \leqq p),$$

nach denen sich alle Determinanten unserer Vektoren in eindeutiger Weise aus der von Null verschiedenen Determinante $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})$ und gewissen inneren Produkten berechnen lassen (hierbei ist natürlich $r = 3$

vorausgesetzt, sonst sind alle Determinanten gleich Null!). Aber auch der absolute Betrag von $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})$ ist schon durch innere Produkte der $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ eindeutig bestimmt, wie die sich durch Spezialisierung von (44) ergebende Gleichung $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})^2 = \|\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}\|$ zeigt $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$. Wie man also die Determinanten in dem in § 3 angegebenen vollständigen Invariantensystem auf das Vorzeichen von $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})$ reduzieren kann, ohne daß die Eigenschaft der Vollständigkeit dabei verlorengeht, so kann man in dem so reduzierten Invariantensystem die Gesamtheit aller p^2 inneren Produkte der Vektoren $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ $(\gamma = 1, \ldots, p)$ durch die anzahlmäßig kleinere Gesamtheit der $\frac{r}{2}(r+1)$ verschiedenen inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}$ der Grundvektoren $\mathfrak{v}^{(\lambda)}$ $(1 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq r)$ und der bei den Linearkombinationen (39) auftretenden $r(p-r)$ Koeffizienten $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ $(\lambda = 1, \ldots, r; \varepsilon = r+1, \ldots, p)$ ersetzen. Die $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ sind nämlich als eindeutige Lösungen der mit bewegungsinvarianten Koeffizienten behafteten Gleichungssysteme (40) selbst wieder Bewegungsinvarianten, und Multiplikation der Gleichungen (39) mit sich bzw. mit den Grundvektoren ergibt, daß die „überschüssigen" inneren Produkte der Vektoren $\mathfrak{v}^{(\gamma)}$ eindeutige Funktionen der verschiedenen inneren Produkte aus den Grundvektoren und der Koeffizienten $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ sind.

Wir behaupten nun, daß die verschiedenen inneren Produkte der Grundvektoren, die $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ und (im Fall $r = 3$) das Vorzeichen der Determinante der Grundvektoren ein „minimales" vollständiges Invariantensystem der endlichen Punktmenge (33) bilden, d.h. daß in diesem System keine Invariante eine Funktion der übrigen Invarianten ist, oder anders gesagt, daß das angegebene Invariantensystem aus „unabhängigen" Invarianten besteht. Um dies einzusehen, beachten wir zunächst, *daß zu vorgegebenen Zahlen* $c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, r)$, *welche bis auf die* r *Ungleichungen*

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0 \qquad (s = 1, \ldots, r)$$

beliebig gewählt werden können, stets solche r *linear unabhängigen Vektoren* $\mathfrak{v}^{(\lambda)}$ *mit* $\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)} = c_{\lambda\mu}$ *existieren, daß im Fall* $r = 3$ *die Determinante* $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})$ *vorgegebenes Vorzeichen besitzt*[1]. Für $r = 1$ ist dies trivial, und im Fall $r = 2$ braucht man nur den Winkel zwischen den durch $\mathfrak{v}^{(1)}$ und $\mathfrak{v}^{(2)}$ gegebenen Richtungen durch (14) zu definieren. Sei also jetzt $r = 3$ vorausgesetzt. Dann bestimmen sich zunächst wie bei $r = 2$ zwei linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{v}^{(1)}$ und $\mathfrak{v}^{(2)}$ mit $(\mathfrak{v}^{(1)})^2 = c_{11}$, $(\mathfrak{v}^{(2)})^2 = c_{22}$,

[1] Die Notwendigkeit der angeführten Ungleichungen für die Größen $c_{\lambda\mu}$ folgt wegen (6), (28) und (20) aus der linearen Unabhängigkeit der Grundvektoren.

$\mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{v}^{(2)} = c_{12}$. Der dritte Vektor $\mathfrak{v}^{(3)}$ muß Ortsvektor eines der beiden Schnittpunkte der durch $\mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{x} = c_{13}$ und $\mathfrak{v}^{(2)}\mathfrak{x} = c_{23}$ gegebenen Geraden g mit der Kugel $\mathfrak{x}^2 = c_{33}$ werden. Damit aber zwei reelle Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kugel existieren, muß der Abstand d von g vom Nullpunkt kleiner als der Kugelradius sein. Da der Ortsvektor des dem Nullpunkt nächstgelegenen Punkts von g die Darstellung $\mathfrak{p} = d_1\mathfrak{v}^{(1)} + d_2\mathfrak{v}^{(2)}$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{p} &= d_1 c_{11} + d_2 c_{12} = c_{13} \\ \mathfrak{v}^{(2)}\mathfrak{p} &= d_1 c_{21} + d_2 c_{22} = c_{23} \end{aligned} \tag{46}$$

besitzt, gilt wegen (46), (45) und (27):

$$\begin{aligned} d^2 = \mathfrak{p}^2 &= c_{11}(d_1)^2 + 2c_{12}\,d_1 d_2 + c_{22}(d_2)^2 = c_{13}\,d_1 + c_{23}\,d_2 \\ &= \left(\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\right)^{-1} \left(c_{13} \begin{vmatrix} c_{13} & c_{12} \\ c_{23} & c_{22} \end{vmatrix} + c_{23} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\right)^{-1} \left(c_{33} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \right) < c_{33}. \end{aligned}$$

Infolgedessen schneidet g in der Tat die Kugel $\mathfrak{x}^2 = c_{33}$, und $\mathfrak{v}^{(3)}$ ergibt sich als Ortsvektor des durch das Vorzeichen von $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)}) = (\mathfrak{v}^{(1)} \times \mathfrak{v}^{(2)})\,\mathfrak{v}^{(3)}$ eindeutig bestimmten Schnittpunkts von g mit der angegebenen Kugel. Diese Konstruktion zeigt außerdem, daß $\mathfrak{v}^{(1)}$, $\mathfrak{v}^{(2)}$ und $\mathfrak{v}^{(3)}$ zusammen linear unabhängig sind. Damit ist aber schon die Unabhängigkeit der inneren Produkte $\mathfrak{v}^{(\lambda)}\mathfrak{v}^{(\mu)}$ $(1 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq r)$ und (im Fall $r = 3$) des Vorzeichens von $(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{v}^{(3)})$ bewiesen. Zu diesen Größen kommen noch die in (39) völlig beliebig vorgebbaren Koeffizienten $a_\lambda^{(\varepsilon)}$ $(1 \leqq \lambda \leqq r;\ r+1 \leqq \varepsilon \leqq p)$ hinzu, so daß im ganzen ein unabhängiges vollständiges Invariantensystem resultiert.

Kurz zusammengefaßt kann man also zwecks Aufstellung eines vollständigen Systems unabhängiger Bewegungsinvarianten einer endlichen Punktmenge folgendermaßen verfahren: *Wir betrachten diejenigen Vektoren, die von einem der Punkte nach den übrigen hinführen, und greifen aus diesen Vektoren irgendwie die größtmögliche Anzahl von linear unabhängigen Vektoren als Grundvektoren heraus. Kombinieren wir dann alle übrigen Vektoren linear aus den r vorhandenen Grundvektoren, so ist ein vollständiges System von (von den Ungleichungen* (45) *abgesehen) unabhängigen Bewegungsinvarianten unserer Punktmenge durch die verschiedenen inneren Produkte der Grundvektoren und die Koeffizienten bei den erwähnten Linearkombinationen gegeben, wozu im Fall* $r = 3$ *noch das Vorzeichen der aus den Grundvektoren gebildeten Determinante hinzukommt.*

1. Kapitel

Kurventheorie

§ 5. Bogenlänge

Eine räumliche Kurve kann man dadurch festlegen, daß man die rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Kurvenpunktes $\mathfrak{x}$ als Funktionen eines reellen Parameters t mit $\alpha < t < \beta$ $(\alpha \geqq -\infty, \beta \leqq +\infty)$ angibt:

(1) $\quad x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$ oder zusammengefaßt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$.

Es soll dabei von den Funktionen x_i zunächst vorausgesetzt werden, daß sie einmal stetig differenzierbar sind. Natürlich dürfen unsere Funktionen außerdem nicht alle drei konstant sein, sonst schrumpft die Kurve auf einen einzelnen Punkt zusammen. Wir wollen sogar annehmen, daß an keiner Stelle t_0 alle Ableitungen der drei Funktionen gleichzeitig verschwinden, ein Fall, der seinen Grund sowohl in der Parameterdarstellung wie auch in einem besonderen Verhalten der Kurve an der Stelle t_0 haben kann.

Das über einen Kurvenbogen mit den Endpunkten $t = a$ und $t = b$ $(b > a)$ erstreckte Integral

$$(2) \qquad s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{\mathfrak{x}})^2}\, dt$$

wird als *Bogenlänge* unseres Bogens bezeichnet. Die Punkte deuten dabei Ableitungen nach t an. Wir werden die Beziehung (2) auch durch die Formel

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

andeuten und abkürzend davon sprechen, daß das „Bogenelement" ds die Entfernung „benachbarter" Kurvenpunkte bedeutet.

Es sei darauf hingewiesen, daß man die in (2) analytisch definierte Bogenlänge geometrisch durch einen gewissen Grenzübergang aus der Länge von dem Kurvenbogen „einbeschriebenen" Vielecken erhalten kann. Setzt man nämlich:

$$(3) \qquad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

so ist die Länge σ_n des unserem Kurvenbogen einbeschriebenen Vielecks mit den auf der Kurve gelegenen, zu den Parameterwerten (3) gehörigen Ecken durch

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{x_1(t_k) - x_1(t_{k-1})\}^2 + \{x_2(t_k) - x_2(t_{k-1})\}^2 + \{x_3(t_k) - x_3(t_{k-1})\}^2}$$

gegeben.

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die drei unter dem Wurzelzeichen stehenden Differenzen an, so gilt:

$$x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\, \dot{x}_i(t_k^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

wobei die $t_k^{(i)}$ drei Zwischenwerte mit

$$t_{k-1} < t_k^{(i)} < t_k \tag{5}$$

sind. Mittels (4) erhält man aus der obigen Formel für σ_n:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{\dot{x}_1(t_k^{(1)})\}^2 + \{\dot{x}_2(t_k^{(2)})\}^2 + \{\dot{x}_3(t_k^{(3)})\}^2}\, (t_k - t_{k-1}). \tag{6}$$

An Stelle der drei Mittelwerte $t_k^{(i)}$ soll ein einziger, den Ungleichungen (5) genügender Mittelwert τ_k gesetzt und der entstehende Fehler abgeschätzt werden. Zunächst gilt die algebraische Identität:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(t_k^{(i)})\}^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(\tau_k)\}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(t_k^{(i)}) + \dot{x}_i(\tau_k)\}\{\dot{x}_i(t_k^{(i)}) - \dot{x}_i(\tau_k)\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(t_k^{(i)})\}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(\tau_k)\}^2}}. \tag{7}$$

Wir wählen jetzt die Zwischenwerte t_k so dicht, daß

$$|\dot{x}_i(t_k^{(i)}) - \dot{x}_i(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, \ldots, n;\ \varepsilon > 0) \tag{8}$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der $\dot{x}_i$ in $a \leqq t \leqq b$ möglich ist. Da der Absolutwert der drei in (7) als Faktoren der Klammerausdrücke $\{\dot{x}_i(t_k^{(i)}) - \dot{x}_i(\tau_k)\}$ auftretenden Größen

$$\frac{\dot{x}_i(t_k^{(i)}) + \dot{x}_i(\tau_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(t_k^{(i)})\}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(\tau_k)\}^2}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sicher $\leqq 1$ ist, folgt dann aus (7) und (8):

$$\left| \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(t_k^{(i)})\}^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{\dot{x}_i(\tau_k)\}^2} \right| \leqq \sum_{i=1}^{3} |\dot{x}_i(t_k^{(i)}) - \dot{x}_i(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{9}$$

Somit ist wegen (6) und (3)

$$\left| \sigma_n - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{\dot{x}_1(\tau_k)\}^2 + \{\dot{x}_2(\tau_k)\}^2 + \{\dot{x}_3(\tau_k)\}^2}\, (t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Verfeinert man nun die Einteilung $t_0, t_1, \ldots, t_n$ so, daß $\max_{1 \leqq k \leqq n} (t_k - t_{k-1})$ und damit ε gegen Null geht, so wird aus (10)

$$\lim \sigma_n = \int_a^b \sqrt[+]{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dt, \tag{11}$$

wie behauptet wurde. Die einzige kleine Schwierigkeit, die zu überwinden war, um auf die übliche Grenzwertformel für das bestimmte Integral zu kommen, war die Verschiedenheit der drei Zwischenwerte $t_k^{(i)}$. Aus dem eben bewiesenen Sachverhalt folgt übrigens, daß die Definition (2) von s nicht von der Art des verwendeten Parameters t abhängt, was später durch Rechnung bestätigt werden wird.

Man kann an Stelle von t als neuen Parameter auf der Kurve den Bogen

$$s(t) = \int_a^t \sqrt[+]{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, dt = \int_a^t \sqrt[+]{(\dot{\mathfrak{x}})^2}\, dt \tag{12}$$

einführen. Zur Festlegung dieses besonderen Parameters ist noch die Wahl des Anfangspunktes $t = a$ der Zählung ($s = 0$) und die Wahl des „positiven Sinnes" auf der Kurve erforderlich, der wachsenden s-Werten entspricht. Nimmt man in (12) die Wurzel positiv, so wird der positive Sinn auch den zunehmenden t-Werten entsprechen. Für den Bogen als Parameter ($s = \pm t + \text{const}$ und $ds = \pm dt$) ist nach (12) kennzeichnend

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = (\dot{\mathfrak{x}})^2 = 1. \tag{13}$$

Als einfachstes Beispiel für eine unebene Kurve nehmen wir eine Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder vom Halbmesser $c > 0$

$$x_1 = c \cos t, \quad x_2 = c \sin t, \quad x_3 = dt. \tag{14}$$

Wir finden

$$\dot{x}_1 = -c \sin t, \quad \dot{x}_2 = c \cos t, \quad \dot{x}_3 = d \tag{15}$$

und daraus

$$s = (t - a) \sqrt[+]{c^2 + d^2}\,. \tag{16}$$

§ 6. Tangente und Schmiegebene

Der Vektor

$$\frac{\mathfrak{x}(t_0 + h) - \mathfrak{x}(t_0)}{h} \tag{17}$$

hat dieselbe Richtung wie die Verbindungssehne der Kurvenpunkte, die zu den Parameterwerten t_0 und $t_0 + h$ gehören. Für $h \to 0$ konvergiert

der Vektor (17) gegen den Tangentenvektor

(18) $\qquad \dot{\mathfrak{x}}(t_0)$ (mit den Koordinaten $\dot{x}_i(t_0)$)

an der Stelle t_0. Deutet man t als Zeit, so nennt man $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ den „*Geschwindigkeitsvektor*". Ist t die Bogenlänge der Kurve, so wird bei dieser Deutung die Kurve mit der konstanten Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Auf Grund unserer in § 5 gemachten Voraussetzung $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) \neq 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle h mit $0 < |h| < \delta$ $\mathfrak{x}(t_0 + h) \neq \mathfrak{x}(t_0)$ ist. Sonst könnte man nämlich eine Folge von Zahlen h_l mit $\lim\limits_{l\to\infty} h_l = 0$ und $\mathfrak{x}(t_0 + h_l) = \mathfrak{x}(t_0)$ angeben, was wegen $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{h_l}(\mathfrak{x}(t_0 + h_l) - \mathfrak{x}(t_0)) = 0$ einen Widerspruch zur Folge hat. Die durch die Verbindungssehne unserer benachbarten Kurvenpunkte gehende Gerade ist also eindeutig bestimmt. Sie strebt für $h \to 0$ gegen die (wie man sagt die Kurve „zweipunktig berührende") *Tangente* der Kurve im Punkt $\mathfrak{x}(t_0)$, die mittels eines Parameters r folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(t_0) + r\dot{\mathfrak{x}}(t_0)}, \tag{19}$$

d.h. ausführlich:

$$y_i = x_i(t_0) + r\dot{x}_i(t_0) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Es kann also, wenn alle $\dot{x}_i \neq 0$ sind,

$$\frac{y_1 - x_1(t_0)}{\dot{x}_1(t_0)} = \frac{y_2 - x_2(t_0)}{\dot{x}_2(t_0)} = \frac{y_3 - x_3(t_0)}{\dot{x}_3(t_0)} \tag{21}$$

als Gleichungspaar der Tangente in den laufenden Koordinaten y_i angesehen werden. Die Tangentenformeln (19) bis (21) werden unbrauchbar, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) = 0$ ist, d.h. wenn alle $\dot{x}_i(t_0) = 0$ sind $(i = 1, 2, 3)$. Diesen Fall hatten wir aber generell ausgeschlossen.

Denkt man in (19) t_0 und r veränderlich, so hat man, wenn unsere Kurve nicht geradlinig ist, die Parameterdarstellung einer Fläche vor sich, die von den Kurventangenten überstrichen wird. Wie bei der Parameterdarstellung einer Kurve ein einziger Parameter t zur Anwendung kommt, so bei der Darstellung dieser „Tangentenfläche" deren zwei: r, t_0.

Für $t = s$ haben wir nach (13) $\{\dot{\mathfrak{x}}(t_0)\}^2 = 1$; es ist also dann das Quadrat des Tangentenvektors gleich 1. Vektoren mit der Länge 1 wollen wir auch als *Einheitsvektoren* bezeichnen.

Wir merken uns noch folgende Regel: Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beide differenzierbare Vektorfunktionen eines Parameters t, so wird das innere Produkt folgendermaßen differenziert:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i y_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \dot{y}_i, \tag{22}$$

was sich abgekürzt schreibt:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\dot{\mathfrak{y}}. \tag{23}$$

Ganz entsprechende Regeln kann man für die Ableitung der Determinanten und Vektorprodukte herleiten:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{x}\times\mathfrak{y}) = (\dot{\mathfrak{x}}\times\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\times\dot{\mathfrak{y}}), \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + (\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{z}) + (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dot{\mathfrak{z}}). \tag{25}$$

Für die nun folgenden Betrachtungen setzen wir die Koordinaten der Kurvenpunkte als zweimal stetig differenzierbare Funktionen von t voraus. Außerdem seien für ein gewisses t_0 die Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}(t_0)$ und $\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ linear unabhängig. Dann bezeichnet man die durch $\mathfrak{x}(t_0)$ gehende und zu den Richtungen von $\dot{\mathfrak{x}}(t_0)$ und $\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ parallele Ebene als *Schmiegebene* der Kurve im Punkte $\mathfrak{x}(t_0)$. Ist $\mathfrak{y}$ ein beliebiger Punkt von ihr, so liegen die drei vom Ursprung aus abgetragenen Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}(t_0)$, $\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ und $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}(t_0)$ in einer Ebene, was sich nach § 2 (26) durch die Gleichung

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}(t_0), \dot{\mathfrak{x}}(t_0), \ddot{\mathfrak{x}}(t_0)) = 0 \tag{26}$$

zum Ausdruck bringen läßt. (26) ist also die Gleichung der Schmiegebene.

$\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ pflegt man in der Mechanik, wenn der Parameter nicht die Bogenlänge, sondern die Zeit ist, als „*Beschleunigungsvektor*" zu bezeichnen. Diese Bezeichnung für $\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ wollen wir hier auch auf unseren Fall übernehmen. Es ist dann die Schmiegebene durch Kurvenpunkt, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor festgelegt.

Ein Ausnahmefall liegt vor, wenn die Vektoren $\dot{\mathfrak{x}}(t_0)$ und $\ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ gleichgerichtet sind, wenn es also zwei Zahlen a und b gibt, die nicht alle beide Null sind, so daß $a\dot{\mathfrak{x}}(t_0) + b\ddot{\mathfrak{x}}(t_0) = 0$ ist oder, was nach § 2 (25) dasselbe besagt, wenn

$$\dot{\mathfrak{x}}(t_0)\times\ddot{\mathfrak{x}}(t_0) = 0 \tag{27}$$

ist. In diesem Falle nennt man die Stelle $\mathfrak{x}(t_0)$ einen „*Wendepunkt*" der Kurve.

Wann tritt der Ausnahmefall ein, daß $\dot{\mathfrak{x}}\times\ddot{\mathfrak{x}}$ längs einer Kurve identisch verschwindet? Da bekanntlich $\dot{\mathfrak{x}}$ nirgends Null sein darf, so muß $\ddot{\mathfrak{x}}$ von $\dot{\mathfrak{x}}$ linear abhängen:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \chi\dot{\mathfrak{x}}.$$

Durch Integration dieser drei vektoriell zusammengefaßten Differentialgleichungen folgt

$$x_i = c_i f(t) + C_i, \quad f(t) = \int e^{\int \chi dt}\, dt. \tag{28}$$

Führt man statt $f(t)$ einen neuen Parameter t^* ein, den man hinterher wieder mit t bezeichnet, so hat man:

$$x_i = c_i t + C_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dadurch sind aber die geraden Linien gekennzeichnet. Somit verschwindet $\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}}$ nur bei Geradenstücken identisch.

Daß die *Schmiegebene in* $\mathfrak{x}(t_0)$ *als Grenzlage einer Ebene durch* $\mathfrak{x}(t_0)$ *und zwei verschiedene benachbarte Kurvenpunkte mit den Parametern* t_1 *und* t_2 aufgefaßt werden kann, sieht man so: Soll die Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{x} - d = 0$ durch die Punkte $\mathfrak{x}(t_k)$ gehen, so muß für

$$F(t) \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{x}(t) - d$$

$F(t_k) = 0$ gelten $(k = 0, 1, 2)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dann im Innern des kleinsten Intervalls, das t_0, t_1, t_2 enthält, zwei verschiedene Stellen t_3, t_4, für die $\dot{F}(t_3) = \dot{F}(t_4) = 0$ wird. Durch nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes folgt $\ddot{F}(t_5) = 0$ für eine neue Stelle im Innern des alten Intervalls. Damit wird speziell:

$$\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{x}}(t_3) = 0, \quad \mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{x}}(t_5) = 0. \tag{29}$$

Auf Grund der Stetigkeit von $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{x}}$ zusammen mit der vorausgesetzten Beziehung $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) \times \ddot{\mathfrak{x}}(t_0) \neq 0$ gibt es nun ein $\delta > 0$, so daß für alle h, k mit $|h| < \delta$ und $|k| < \delta$ $\dot{\mathfrak{x}}(t_0 + h) \times \ddot{\mathfrak{x}}(t_0 + k) \neq 0$ ist und sich von $\dot{\mathfrak{x}}(t_0) \times \ddot{\mathfrak{x}}(t_0)$ nur wenig unterscheidet. Sind also die drei Kurvenpunkte insofern hinreichend benachbart, als sie den Ungleichungen $|t_1 - t_0| < \delta$ und $|t_2 - t_0| < \delta$ genügen, so ist eine durch sie gehende Ebene wegen (29) und $\dot{\mathfrak{x}}(t_3) \times \ddot{\mathfrak{x}}(t_5) \neq 0$ eindeutig bestimmt und strebt für $t_1 \to t_0$, $t_2 \to t_0$ und damit $t_3 \to t_0$, $t_5 \to t_0$ gegen die Schmiegebene der Kurve im Punkt $\mathfrak{x}(t_0)$. Diese Tatsache zeigt, daß die Definition der Schmiegebene nicht von der Art des gewählten Kurvenparameters abhängt. Sie rechtfertigt außerdem die Ausdrucksweise, die Schmiegebene „berühre die Kurve dreipunktig".

§ 7. Krümmung und Windung

Nehmen wir jetzt die Bogenlänge als Kurvenparameter:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \ \mathfrak{x}'^2 = 1 \ \text{(vgl. (13))}^1,$$

so wird nach (23)

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = 0, \tag{30}$$

d. h. der Beschleunigungsvektor steht auf der Kurventangente senkrecht. Man nennt jede Gerade durch den Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ senkrecht zum

[1] Die Differentiation nach der Bogenlänge pflegt man (im Gegensatz zur Differentiation nach einem beliebigen Parameter) mit einem Strich anzuzeigen.

Tangentenvektor $\mathfrak{x}'$ eine „*Kurvennormale*" und insbesondere die Kurvennormale in der (nach § 6 im Fall $\mathfrak{x}'' \neq 0$ existierenden) Schmiegebene „*Hauptnormale*". $\mathfrak{x}''$ gibt also in diesem Fall die Richtung der Hauptnormalen an.

Trägt man vom Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$ aus den Einheitsvektor $\mathfrak{x}'$ ab, so durchläuft sein Endpunkt auf der Einheitskugel um $\mathfrak{o}$ eine Kurve $\mathfrak{x}'(s)$, wenn $\mathfrak{x}$ die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ beschreibt. Diese Kurve $\mathfrak{x}'(s)$ nennt man das *Tangentenbild* von $\mathfrak{x}(s)$. $\mathfrak{x}'(s)$ schrumpft nur dann auf einen Punkt zusammen ($\mathfrak{x}'(s) = \text{const}$), wenn $\mathfrak{x}(s)$ geradlinig ist ($\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{x}' \cdot s + \text{const}$). Das Bogenelement des Tangentenbildes sei mit ds_1 bezeichnet. Wendet man die Formel (12) in der Form

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2}\, dt \tag{31}$$

an, so findet man $ds_1 = \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}'}{ds}\right)^2}\, ds$ oder

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \mathfrak{x}''^2. \tag{32}$$

Da $ds_1 : ds$ nur für die Geraden identisch verschwindet, also gewissermaßen die Abweichung der Kurve $\mathfrak{x}$ an der betrachteten Stelle s von ihrer Tangente mißt, so nennt man $ds_1 : ds$ die „*Krümmung*" von $\mathfrak{x}$ an der betreffenden Stelle. Man bezeichnet die Krümmung üblicherweise mit $1 : \varrho$. Wir finden also

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{ds_1}{ds} = \sqrt[+]{\mathfrak{x}''^2} \quad (0 < \varrho \leqq +\infty), \tag{33}$$

wenn, wie üblich, das positive Vorzeichen der Wurzel gewählt wird. $1 : \varrho$ ist also die Länge des Beschleunigungsvektors und $\varrho\mathfrak{x}''$ ist ein Einheitsvektor auf der Hauptnormalen, wenn $\mathfrak{x}'' \neq 0$ ist, wie wir im folgenden immer stillschweigend voraussetzen wollen.

Die Kurvennormale, die auf der Schmiegebene senkrecht steht, nennt man „*Binormale*". Ihre Richtung ist die von $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''$, denn dieser (von Null verschiedene) Produktvektor steht auf $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ senkrecht.

Wir wollen nun drei Einheitsvektoren zu jeden Kurvenpunkt $\mathfrak{x}(s)$ einführen: 1. den *Tangentenvektor*

$$\mathfrak{x}'(s) = \mathfrak{t}(s), \tag{34}$$

2. den *Hauptnormalenvektor*

$$\varrho\mathfrak{x}''(s) = \varrho\mathfrak{t}'(s) = \mathfrak{h}(s) \tag{35}$$

und 3. den *Binormalenvektor* $\mathfrak{b}(s)$. Wir erklären ihn durch die Formel

$$\mathfrak{b}(s) = \mathfrak{t} \times \mathfrak{h} = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''). \tag{36}$$

$\mathfrak{b}$ steht in der Tat auf $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$ senkrecht. $\mathfrak{b}$ ist ein Einheitsvektor; denn nach der Identität von Lagrange (§ 2 (28)) und wegen $\mathfrak{th} = 0$ ist

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{t}^2\mathfrak{h}^2 - (\mathfrak{th})^2 = 1. \tag{37}$$

Schließlich sind die Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ nach § 2 genau so orientiert wie die drei Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen, denn es ist

$$(\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{t}\times\mathfrak{h})\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2 = +1 > 0. \tag{38}$$

Aus $\mathfrak{t}\times\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$ folgt übrigens für unsere drei Einheitsvektoren nach § 2 (29) auch $\mathfrak{h}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}\times\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$.

Um die Krümmung zu erklären, haben wir vom Ursprung aus die Vektoren $\mathfrak{t}(s)$ abgetragen und die Bogenlänge ds_1 des entstehenden „Tangentenbildes" berechnet. Entsprechend erklären wir jetzt für die von nun an als „dreimal stetig differenzierbar" vorausgesetzte Kurve (deren Koordinatenfunktionen also dreimal stetig differenzierbar sind) die *„Windung"* oder *„Torsion"* dadurch, daß wir vom Ursprung aus die Binormalenvektoren $\mathfrak{b}(s)$ abtragen. Ihre Endpunkte erfüllen das *„Binormalenbild"* von $\mathfrak{x}$. Den Quotienten der Bogenelemente

$$\frac{ds_3}{ds} = \sqrt{\mathfrak{b}'^2} = \frac{1}{\tau} \quad (-\infty \leqq \tau \leqq +\infty, \tau \neq 0) \tag{39}$$

wollen wir als „Windung" bezeichnen. Für ebene Kurven ist $\mathfrak{b} = \text{const}$, also die Windung Null. Somit ist die Windung ein Maß für die Abweichung unserer Kurve $\mathfrak{x}$ von ihrer Schmiegebene.

Durch (39) ist $1 : \tau$ nur abgesehen vom Vorzeichen erklärt. Wir können jedoch diese Unbestimmtheit beseitigen. Der Vektor $\mathfrak{b}'$ nämlich läßt sich sicher aus den linear unabhängigen Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ kombinieren:

$$\mathfrak{b}' = a_1\mathfrak{t} + a_2\mathfrak{h} + a_3\mathfrak{b}. \tag{40}$$

Nun ist $\mathfrak{b}$ ein Einheitsvektor, also $\mathfrak{b}^2 = 1$ und daraus folgt $\mathfrak{bb}' = 0$. Multipliziert man (40) skalar mit $\mathfrak{b}$ unter Beachtung der Rechenregel § 1 (12), so erhält man daraus aber $a_3 = 0$. Ferner ist nach (35)

$$\mathfrak{t}' = \frac{\mathfrak{h}}{\varrho} \tag{41}$$

und somit

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{tb}) = \frac{1}{\varrho}(\mathfrak{hb}) + (\mathfrak{tb}') = 0, \tag{42}$$

also wegen $\mathfrak{hb} = 0$

$$\mathfrak{tb}' = a_1 = 0.$$

Es bleibt also

$$\mathfrak{b}' = a_2\mathfrak{h} \tag{43}$$

und nach (39)

$$\mathfrak{b}'^2 = a_2^2 = \frac{1}{\tau^2}.$$

Wir entscheiden jetzt über das Vorzeichen von $1:\tau$, wenn wir $a_2 = -1:\tau$ setzen und somit die Windung durch die Formel erklären:

$$\mathfrak{b}' = -\frac{\mathfrak{h}}{\tau}. \tag{44}$$

Wegen der geometrischen Deutung des Vorzeichens der Windung wird auf § 10 verwiesen.

§ 8. Rechnerische Bestimmung der Invarianten einer Kurve

Unseren bisherigen Untersuchungen über die Kurven haben hauptsächlich geometrische Erwägungen die Richtung gegeben. Auf diese Weise fanden wir verschiedene „differentialgeometrische Invarianten" der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$, d.h. genauer gesagt Ausdrücke in der Funktion $\mathfrak{x}$ und ihren Ableitungen, die a) *gegenüber den in* § 3 (30), (31), (32) *angegebenen Bewegungen invariant sind* und b) *von der Art des gewählten Parameters t nicht abhängen.* Das letztere kann folgendermaßen präzisiert werden: Eine differentialgeometrische Invariante der Kurve muß gegenüber den Transformationen

$$t = f(t^*) \tag{45}$$

für den Übergang zu einem neuen Parameter t^* invariant sein, wobei f (genau so wie $\mathfrak{x}$) als dreimal stetig differenzierbar mit überall von Null verschiedener Ableitung vorausgesetzt sei.

So ist zum Beispiel die in (2) definierte Länge eines Kurvenbogens eine differentialgeometrische Invariante. $(\dot{\mathfrak{x}})^2$ ist nämlich als Quadrat eines Vektors bewegungsinvariant, und setzt man

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x}(f(t^*)) = \mathfrak{x}^*(t^*), \tag{46}$$

so wird

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\varphi \quad \left(\varphi = \frac{df}{dt^*}\right),$$

also

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2}\, dt = (\operatorname{sign}\varphi) \int_{a^*}^{b^*} \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*}\right)^2}\, dt^* = \int_{\operatorname{Min}(a^*,b^*)}^{\operatorname{Max}(a^*,b^*)} \sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*}\right)^2}\, dt^*$$

$$\left(a = f(a^*),\ b = f(b^*),\ a < b\right).$$

Eine derartige Invariante einer Kurve nennt man auch eine *Integralinvariante.* Durch Umrechnung der in § 3 definierten Krümmung und Windung in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{x}(t_0)$ der Kurve auf allgemeine Kurvenparameter (was in § 10 durchgeführt werden wird!) stellt man fest,

daß auch diese Größen im vorhin erwähnten Sinn differentialgeometrische Invarianten der Kurve sind. Sie hängen jedoch im Gegensatz zur Länge eines Kurvenbogens nur vom Verhalten der Kurve in einer beliebig kleinen Umgebung des Punkts $t = t_0$ ab und gehören somit als *„Differentialinvarianten"* zur sogenannten *„Differentialgeometrie im Kleinen"* oder *„lokalen Differentialgeometrie"*. (Im Gegensatz dazu befaßt sich die *„Differentialgeometrie im Großen"* oder *„globale Differentialgeometrie"* mit solchen Eigenschaften der Kurve, die sich erst aus ihrem gesamten Verlauf erschließen lassen; ein Problem dieser Art Kurventheorie werden wir in § 12 kennenlernen.)

Wir können die Hauptaufgabe der Kurventheorie, ein möglichst vollständiges und unabhängiges System differentialgeometrischer Invarianten der Kurve zu finden, auch von der rechnerischen Seite her in Angriff nehmen. Dies Problem ist offenbar dem in §§ 3 und 5 gelösten sehr verwandt. Dort handelte es sich um die Bestimmung von Invarianten einer endlichen Menge von Punkten, hier aber um die Invarianten der (eindimensionalen) Mannigfaltigkeit aller Kurvenpunkte.

Wir wollen uns zunächst auf eine beliebig kleine Umgebung eines bestimmten Punkts $t = t_0$ der Kurve beschränken und drei linear unabhängige Vektoren suchen, die den in § 3, S. 9 eingeführten „Grundvektoren" entsprechen. Zu diesem Zweck wird man von den Ableitungsvektoren

$$\dot{\mathfrak{x}}\,,\ \ddot{\mathfrak{x}} \text{ und } \dddot{\mathfrak{x}} \tag{47}$$

für $t = t_0$ ausgehen ($\mathfrak{x}$ ist im strengen Sinne nach § 1, S. 2 kein Vektor!). Nun hängen aber diese drei Vektoren vom gewählten Parameter t ab; sie transformieren sich bei der Substitution (45) folgendermaßen:

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*} = \varphi \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,, \tag{48}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{x}^*}{dt^{*2}} = \varphi^2 \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt^*}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,, \tag{49}$$

$$\frac{d^3\mathfrak{x}^*}{dt^{*3}} = \varphi^3 \frac{d^3\mathfrak{x}}{dt^3} + 3\varphi \frac{d\varphi}{dt^*}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^{*2}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,, \tag{50}$$

oder umgekehrt:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{1}{\varphi}\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*}\,, \tag{51}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{1}{\varphi^2}\frac{d^2\mathfrak{x}^*}{dt^{*2}} - \frac{1}{\varphi^3}\frac{d\varphi}{dt^*}\frac{d\mathfrak{x}^*}{dt^*} \tag{52}$$

und eine uns nicht weiter interessierende Beziehung für $\frac{d^3\mathfrak{x}}{dt^3}$. Aus diesem Grunde können die Vektoren (47) nicht selbst schon als Grundvektoren verwendet werden, sondern man wird, um in den inneren Produkten der

Grundvektoren parameterunabhängige Invarianten zu erhalten, gegenüber (48), (49), (50) invariante Ausdrücke in den Vektoren (47) als Grundvektoren nehmen.

Derartige Ausdrücke lassen sich leicht finden, wenn man berücksichtigt, daß auf Grund von (48), (49) und (51), (52) der aus allen Linearkombinationen von $\dot{\mathfrak{x}}$ bestehende Vektorraum T und der aus allen Linearkombinationen von $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\ddot{\mathfrak{x}}$ bestehende Vektorraum S von der Wahl des Parameters t nicht abhängt. T ist wegen $\dot{\mathfrak{x}} \neq 0$ eindimensional und bestimmt, geometrisch gesprochen, die Tangente der Kurve in $\mathfrak{x}$, während der wegen $\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} \neq 0$ zweidimensionale Vektorraum S die Schmiegebene der Kurve in $\mathfrak{x}$ festlegt. (Hiermit ist die Parameterinvarianz von Tangente und Schmiegebene auch rechnerisch nachgewiesen!) Man wählt nun zweckmäßigerweise als Grundvektoren einen Einheitsvektor $\mathfrak{a}_1$ in T, einen zu $\mathfrak{a}_1$ senkrechten Einheitsvektor $\mathfrak{a}_2$ in S und schließlich den zu $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ senkrechten Einheitsvektor $\mathfrak{a}_3$, der mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ein „positiv orientiertes Dreibein" bildet $((\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = +1)$. Diese (bis auf den Faktor -1 eindeutig bestimmten) Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ drücken sich etwa folgendermaßen durch die Vektoren (47) aus:

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\dot{\mathfrak{x}}}{+\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}}, \tag{53}$$

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{\ddot{\mathfrak{x}} - (\mathfrak{a}_1 \ddot{\mathfrak{x}})\, \mathfrak{a}_1}{+\sqrt{(\ddot{\mathfrak{x}} - (\mathfrak{a}_1 \ddot{\mathfrak{x}})\, \mathfrak{a}_1)^2}}, \tag{54}$$

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2. \tag{55}$$

Sie sind selbst nicht ganz von der Art des Parameters t unabhängig, indem ihnen nämlich nach Ausführung der Parametertransformation (45) die Vektoren $\mathfrak{a}_1^* = (\operatorname{sign} \varphi)\, \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3^* = (\operatorname{sign} \varphi)\, \mathfrak{a}_3$ entsprechen. Beschränkt man sich jedoch auf „gleichsinnige" Parametertransformationen mit $\operatorname{sign} \varphi = +1$, so hat man in dem durch (53), (54), (55) definierten Dreibein ein System von „mit der *orientierten, d.h. mit einem Durchlaufungssinn versehenen Kurve*" invariant verknüpfter Vektoren.

Für die inneren Produkte dieser Grundvektoren der orientierten Kurve gilt

$$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3); \tag{56}$$

d. h. sie bilden ein „orthonormiertes" Dreibein, was, wie wir sehen werden, für die weiteren Rechnungen sehr bequem ist. Als wesentliche differentialgeometrische Invarianten der orientierten Kurve werden deshalb in Analogie zu den Überlegungen von § 3 und § 4 nur noch die Koeffizienten der Linearkombinationen weiterer mit der orientierten Kurve invariant

verknüpfter Vektoren aus den Grundvektoren in Betracht kommen. Da die gewünschten Invarianten nur von einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes $t = t_0$ der Kurve abhängen sollten, wird man zur Bildung dieser neuen parameterinvarianten Kurvenvektoren etwa die schon als gegen gleichsinnige Parametertransformationen invariant erkannten Grundvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ verwenden und die Ableitungen der nach (53), (54), (55) einmal stetig differenzierbar von t abhängenden Grundvektoren bilden. Die dadurch entstehenden Vektoren $\dot{\mathfrak{a}}_1$, $\dot{\mathfrak{a}}_2$, $\dot{\mathfrak{a}}_3$ sind dann selbst nicht mehr parameterinvariant, es lohnt sich aber doch, dieselben aus den Grundvektoren linear zu kombinieren:

$$\dot{\mathfrak{a}}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mathfrak{a}_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{57}$$

Die hierbei auftretenden und von t stetig abhängenden Koeffizienten a_{ik} zeigen nämlich bei einer gleichsinnigen Parametertransformation (45) das einfache Transformationsverhalten

$$a_{ij}^* = \varphi a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{58}$$

Daraus folgt, daß zwar nicht die Koeffizienten a_{ij} selbst, aber die Integrale

$$\int_a^b a_{ij}(t)\, dt \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{59}$$

Parameterinvarianten sind, wie aus

$$\int_{a^*}^{b^*} a_{ij}^*\, dt^* = \int_{a^*}^{b^*} a_{ij}\, \varphi\, dt^* = \int_a^b a_{ij}\, dt \quad (a = f(a^*), b = f(b^*)) \tag{60}$$

ersichtlich ist.

Die Integrale (59) sind nun nicht alle voneinander unabhängig. Man erhält nämlich durch Differentiation von (56) nach t:

$$\dot{\mathfrak{a}}_i\mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_i\dot{\mathfrak{a}}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{61}$$

Einsetzen von (57) in (61) ergibt dann

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mathfrak{a}_k\right)\mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_i\left(\sum_{k=1}^{3} a_{jk}\mathfrak{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{3}\left(a_{ik}(\mathfrak{a}_j\mathfrak{a}_k) + a_{jk}(\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k)\right) = 0,$$

oder wegen (56):

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{62}$$

Außerdem zeigt die Differentiation von (53) nach t:

$$\dot{\mathfrak{a}}_1 = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}}\right)\right)\dot{\mathfrak{x}} + \frac{1}{\pm\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}}\,\ddot{\mathfrak{x}},$$

d. h. $\dot{\mathfrak{a}}_1$ gehört wie die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dem zweidimensionalen Vektorraum S an und muß sich daher schon aus $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ allein linear kombinieren lassen. Letzteres bedeutet aber nach (57):

$$a_{13} = 0. \tag{63}$$

Als wesentlich verschiedene unter den Integralinvarianten (59) der orientierten Kurve bleiben also nach (62) und (63) nur noch

$$\int a_{12}\, dt \quad \text{und} \quad \int a_{23}\, dt \tag{64}$$

übrig.

Es ist nicht zu erwarten, daß die von *zwei* Funktionen von t abhängenden Invarianten (64) schon ein vollständiges Invariantensystem für die durch die *drei* Funktionen (1) von t gegebene orientierte Kurve bilden. Wir müssen also noch eine weitere Kurveninvariante zur Bildung eines derartigen Invariantensystems heranziehen. Zu diesem Zweck gilt es wieder einen mit der Kurve möglichst invariant verknüpften und von den Vektoren (57) verschiedenen Vektor aus den Grundvektoren linear zu kombinieren. Wir wählen dazu einfach den Vektor $\dot{\mathfrak{x}}$ und haben wegen (53):

$$\dot{\mathfrak{x}} = a_1 \mathfrak{a}_1 \tag{65}$$

mit

$$a_1 = \sqrt[+]{\dot{\mathfrak{x}}^2} > 0. \tag{66}$$

Die Transformationsformel für a_1 lautet wieder

$$a_1^* = \varphi a_1, \tag{67}$$

und man erkennt durch eine zu (60) analoge Rechnung, daß

$$\int a_1\, dt \tag{68}$$

eine neue Integralinvariante der orientierten Kurve darstellt. Die drei Integralinvarianten (64) und (68) stellen nun wirklich ein vollständiges und unabhängiges Invariantensystem der orientierten Kurve dar, weil die letztere durch die (bis auf die Ungleichungen $a_1 > 0$, $a_{12} > 0$ beliebig zweimal stetig differenzierbar vorgebbaren) Funktionen $a_1 = a_1(t)$, $a_{12} = a_{12}(t)$, $a_{23} = a_{23}(t)$ bis auf eine Bewegung eindeutig bestimmt ist. Dies lehrt die Anwendung von Sätzen aus der Theorie der Differentialgleichungen auf die „Ableitungsgleichungen“:

$$\dot{\mathfrak{x}} = a_1 \mathfrak{a}_1, \quad \dot{\mathfrak{a}}_1 = a_{12} \mathfrak{a}_2, \quad \dot{\mathfrak{a}}_2 = -a_{12} \mathfrak{a}_1 + a_{23} \mathfrak{a}_3, \quad \dot{\mathfrak{a}}_3 = -a_{23} \mathfrak{a}_2 \tag{69}$$

unsrer Kurve und wird im 4. Kapitel näher ausgeführt werden.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch bemerkt, daß auf Grund der Transformationsgesetze (58) und (67) die beiden Quotienten

$$\frac{a_{12}}{a_1} \quad \text{und} \quad \frac{a_{23}}{a_1} \tag{70}$$

als parameterinvariante Größen Differentialinvarianten der orientierten Kurve darstellen, so daß nach dem eben Gesagten *die Integralinvariante* (68) *und die beiden Differentialinvarianten* (70) *ebenfalls ein vollständiges und unabhängiges Invariantensystem unserer Kurve bilden.*

§ 9. Formeln von Frenet

Welches ist nun die geometrische Bedeutung der in § 8 rechnerisch gefundenen differentialgeometrischen Invarianten $\int_a^b a_1\,dt$, $\frac{a_{12}}{a_1}$, $\frac{a_{23}}{a_1}$ der orientierten Kurve? Zunächst ist nach (2) und (66) $\int_a^b a_1\,dt$ nichts anderes als die Bogenlänge des Kurvenstücks mit $a \leqq t \leqq b$. Um $\frac{a_{12}}{a_1}$ und $\frac{a_{23}}{a_1}$ geometrisch zu interpretieren, wählt man zweckmäßigerweise die Bogenlänge s als (mit t wachsenden) Kurvenparameter. Dies ist ohne weiteres möglich, da s wegen (12) dreimal stetig differenzierbar von t abhängt und damit wegen $\frac{ds}{dt} > 0$ umgekehrt auch t eine dreimal stetig differenzierbare Funktion von s mit $\frac{dt}{ds} > 0$ darstellt. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ ändern sich genau wie die Größen $\frac{a_{12}}{a_1}$, $\frac{a_{23}}{a_1}$ nicht beim Übergang vom Parameter t zum Parameter s. Infolgedessen wird aus (53), (54), (55) in Verbindung mit (13), (34), (30), (33), (35) und (36) speziell:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{x}' = \mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2^* = \frac{\mathfrak{x}''}{+\sqrt{\mathfrak{x}''^2}} = \varrho\mathfrak{x}'' = \mathfrak{h}, \tag{71}$$

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_3^* = \mathfrak{t}\times\mathfrak{h} = \mathfrak{b}.$$

Der Vergleich von (34) bzw. (41) bzw. (44) mit den für s spezialisierten Gleichungen (69):

$$\mathfrak{x}' = a_1^*\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_1' = a_{12}^*\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_2' = -a_{12}^*\mathfrak{a}_1 + a_{23}^*\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_3' = -a_{23}^*\mathfrak{a}_2 \tag{72}$$

zeigt wegen (71) weiter:

$$a_1^* = 1 \text{ bzw. } a_{12}^* = \frac{1}{\varrho} \text{ bzw. } a_{23}^* = \frac{1}{\tau}, \tag{73}$$

woraus

$$\frac{a_{12}}{a_1} = \frac{a_{12}^*}{a_1^*} = \frac{1}{\varrho} \quad \text{und} \quad \frac{a_{23}}{a_1} = \frac{a_{23}^*}{a_1^*} = \frac{1}{\tau} \tag{74}$$

folgt. *Unser in* § 8 *gefundenes vollständiges und unabhängiges Invariantensystem der Kurve besteht also, geometrisch gesprochen, aus Bogenlänge, Krümmung und Windung.*

Durch Einsetzen von (71) und (73) in (72) entstehen die Beziehungen:

$$(75)\quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \quad * \quad + \frac{\mathfrak{h}}{\varrho} \quad * \\ \frac{d\mathfrak{h}}{ds} &= -\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} \quad * \quad + \frac{\mathfrak{b}}{\tau} \\ \frac{d\mathfrak{b}}{ds} &= \quad * \quad - \frac{\mathfrak{h}}{\tau} \quad * \end{aligned}} \qquad (0 < \varrho < +\infty, -\infty \leqq \tau \leqq +\infty, \tau \neq 0);$$

sie stammen von F. Frenet (Toulouse 1847) und bilden die Grundlage der ganzen (euklidischen) Differentialgeometrie der räumlichen Kurven.

Nach (33) waren die Geraden durch das identische Verschwinden der Krümmung gekennzeichnet. Aus der dritten Formel (75) können wir nun sofort auch die Kurven bestimmen, für die die Windung identisch Null ist. In diesem Fall gilt nämlich:

$$\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{b}(s) = \text{const}.$$

Da ferner wegen (34) und (36)

$$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \mathfrak{b}\mathfrak{t} = 0$$

ist, erhält man durch nochmalige Integration:

$$(76)\qquad \mathfrak{b}\mathfrak{x}(s) = \sum_{i=1}^{3} b_i x_i(s) = \text{const}.$$

Die Kurve liegt also auf Grund von (76) in der Ebene $\sum_{i=1}^{3} b_i x_i = \text{const}$. Umgekehrt ist die Windung bei einer ebenen Kurve identisch Null, denn die die Kurve enthaltende Ebene ist nach § 6 gleichzeitig die Schmiegebene der Kurve in allen ihren Punkten, so daß $\mathfrak{b}(s) = \text{const}$ gilt, woraus durch Zurückrechnen $\frac{1}{\tau} \equiv 0$ folgt.

Wir hatten $\mathfrak{x}' = \mathfrak{t}$. Durch Ableitung folgt $\mathfrak{x}'' = \mathfrak{t}' = \mathfrak{h} : \varrho$ und weiter, da ϱ nach (33) differenzierbar ist:

$$\mathfrak{x}''' = -\frac{\mathfrak{t}}{\varrho^2} - \frac{\varrho'\mathfrak{h}}{\varrho^2} + \frac{\mathfrak{b}}{\varrho\tau}.$$

Setzt man nun für den Rest dieses Paragraphen $\mathfrak{x}$ in einer Umgebung von $s = 0$ als analytisch voraus:

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{x}(0) + \mathfrak{x}'(0)\, s + \frac{1}{2}\mathfrak{x}''(0)\, s^2 + \frac{1}{6}\mathfrak{x}'''(0)\, s^3 + \cdots$$

und setzt man für die Vektoren $\mathfrak{x}'(0)$, $\mathfrak{x}''(0)$, $\mathfrak{x}'''(0)$ die soeben gefundenen Werte ein, so folgt, wenn man $\mathfrak{x}(0)$, $\mathfrak{t}(0)$, $\mathfrak{h}(0)$, $\mathfrak{b}(0)$ der Reihe nach mit dem Koordinatenursprung und den Koordinatenachsen zusammenfallen läßt, also ihnen die Koordinaten bzw. Komponenten gibt:

$$\mathfrak{x}(0) = \{0, 0, 0\}$$

$$\mathfrak{t}(0) = \{1, 0, 0\}$$

$$\mathfrak{h}(0) = \{0, 1, 0\}$$

$$\mathfrak{b}(0) = \{0, 0, 1\}$$

die sogenannte *kanonische Darstellung* für unsere Kurve in der Umgebung von $s = 0$:

(77)
$$\begin{aligned} x_1(s) &= s \quad * \quad -\frac{1}{6\varrho(0)^2}\, s^3 + \cdots, \\ x_2(s) &= * \quad +\frac{1}{2\varrho(0)}\, s^2 - \frac{\varrho'(0)}{6\varrho(0)^2}\, s^3 + \cdots, \\ x_3(s) &= * \quad * \quad +\frac{1}{6\varrho(0)\,\tau(0)}\, s^3 + \cdots. \end{aligned}$$

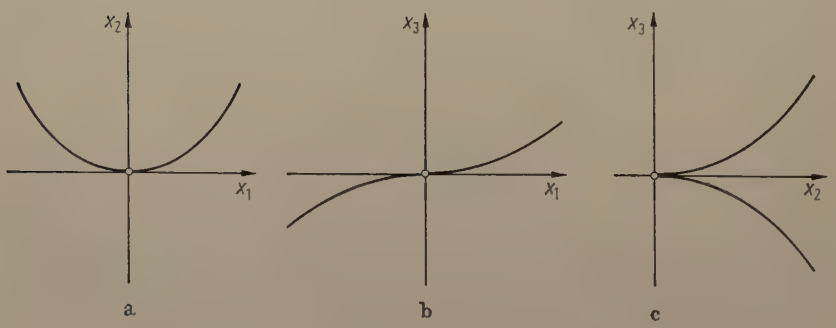


Fig. 2.

Da die Reihen rechts beliebig fortgesetzt werden können, wenn man Krümmung und Windung in ihrer Abhängigkeit von der Bogenlänge s kennt, so folgt, daß hierdurch und durch die Festlegung der Anfangslage unseres *begleitenden Dreibeins* $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ die Kurve eindeutig bestimmt ist. Außerdem kann man aus der kanonischen Entwicklung ablesen, wie die Normalrisse (senkrechten Projektionen) unserer Kurve auf die $x_i x_k$-Ebenen aussehen. Man vergleiche die beigegebene Fig. 2.

§ 10. Über das Vorzeichen der Windung

Es war nach (75)

$$\mathfrak{b}' = -\frac{\mathfrak{h}}{\tau},$$

also

$$\frac{1}{\tau} = -\mathfrak{h}\mathfrak{b}'.$$

Wir wollen rechts die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ einführen. Nach (35), (36) wird

$$\mathfrak{h} = \varrho\mathfrak{x}'', \quad \mathfrak{b} = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''),$$
$$\mathfrak{b}' = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''') + \varrho'(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'').$$

Somit ist

$$\frac{1}{\tau} = -\mathfrak{h}\mathfrak{b}' = \varrho^2(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''),$$

und wir haben zur Bestimmung von ϱ und τ aus $\mathfrak{x}$ wegen (33) die Formeln

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = \overset{+}{\sqrt{\mathfrak{x}''^2}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''')}{\mathfrak{x}''^2}}. \tag{78}$$

Wir wollen die Ausdrücke für Krümmung und Windung noch umrechnen für den Fall eines beliebigen (mit s wachsenden) Parameters t. Deuten — wie üblich — die Punkte Ableitungen nach t, die Striche Ableitungen nach s an, so ist

$$\mathfrak{x}' = \frac{\dot{\mathfrak{x}}}{\overset{+}{\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}}},$$

$$\mathfrak{x}'' = \frac{\ddot{\mathfrak{x}}}{\dot{\mathfrak{x}}^2} - \frac{(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})\dot{\mathfrak{x}}}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^2}, \tag{79}$$

$$\mathfrak{x}''' = \frac{\dddot{\mathfrak{x}}}{\overset{+}{\sqrt{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3}}} + \alpha\ddot{\mathfrak{x}} + \beta\dot{\mathfrak{x}} \quad \text{(vgl. (12) und (48), (49), (50))},$$

wo α und β uns nicht näher interessierende Zahlen bedeuten. Daraus ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\varrho^2} &= \frac{\dot{\mathfrak{x}}^2\ddot{\mathfrak{x}}^2 - (\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^2}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3} = \frac{(\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}})^2}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3}, \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}})}{(\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}})^2} \end{aligned}}. \tag{80}$$

Hieran ist neben der Tatsache, daß $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ nach (48), (49), (50) gegen *beliebige* (nicht nur gleichsinnige) Parametertransformationen in-

variant sind, besonders bemerkenswert, daß die Windung sich rational, ohne Ausziehen einer mehrwertigen Wurzel berechnen läßt. Ihr Vorzeichen hat also eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir an, daß das zugrunde gelegte Achsenkreuz so aussieht, daß man Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand der Reihe nach gleichzeitig mit der x_1-, x_2-, x_3-Achse zur Deckung bringen kann (Fig. 1), dann werden positiv und negativ gewundene Schraubenlinien schematisch durch Fig. 3 dargestellt.

In der Tat: Berechnen wir für unsere Schraube von § 5 (14) Krümmung und Windung, so erhalten wir:

$$\dot{x}_1 = -c\sin t,\quad \ddot{x}_1 = -c\cos t,\quad \dddot{x}_1 = +c\sin t,$$

$$\dot{x}_2 = +c\cos t,\quad \ddot{x}_2 = -c\sin t,\quad \dddot{x}_2 = -c\cos t,$$

$$\dot{x}_3 = d,\qquad \ddot{x}_3 = 0,\qquad \dddot{x}_3 = 0,$$

und daraus

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = c^2 + d^2,\quad \ddot{\mathfrak{x}}^2 = c^2,\quad (\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}) = 0,\quad (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}) = c^2 d.$$

Somit nach (80):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{c}{c^2 + d^2},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d}{c^2 + d^2}.$$

Die Windung ist also > 0 oder < 0, je nachdem $d > 0$ oder < 0 ist, was den Fig. 3a und 3b entspricht. Entsprechend kann man sich die Bedeutung des Vorzeichens von $1 : \tau$ für eine beliebige Kurve etwa an der kanonischen Darstellung (77) deutlich machen.

Spiegelt man unsere Kurve an einer Ebene, indem man etwa das Vorzeichen einer der Koordinaten x_i umkehrt, so ändert die Windung auf Grund von (80) ihr Vorzeichen. Man könnte eine Kurve vom Typ der

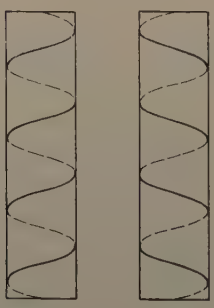


Fig. 3.

Fig. 3a auch als *weinwendig* und eine der Fig. 3b entsprechende auch als *hopfenwendig* bezeichnen, weil die Ranken des Weins positiv und die des Hopfens negativ gewunden wachsen.

§ 11. Kinematische Deutung von Frenets Formeln

Wir bringen jetzt eine kinematische Deutung der Frenetschen Formeln, die von G. Darboux stammt[1].

Dreht man einen starren Körper um eine Achse, so haben alle Punkte des Körpers, die von der Achse gleichen Abstand besitzen, auch die gleiche Geschwindigkeit. Je weiter ein Punkt von der Achse entfernt ist, eine um so größere Geschwindigkeit wird er besitzen, und zwar wächst die Geschwindigkeit direkt proportional dem Abstand von der Achse. Die (positive) Geschwindigkeit ω aller Punkte im Abstand 1 von der Achse pflegt man auch als die Winkelgeschwindigkeit der Drehung zu bezeichnen. Hat ein Punkt den Abstand r von der Achse, so ist seine Geschwindigkeit durch

$$\omega \cdot r \tag{81}$$

gegeben.

Wir denken uns nun den Ursprung $\mathfrak{o}$ unseres Koordinatensystems auf die Achse der Drehung gelegt. Von $\mathfrak{o}$ aus tragen wir auf der Achse den „Drehvektor" $\mathfrak{d}$ so ab, daß seine Länge $\sqrt[+]{\mathfrak{d}^2}$ gleich ω und sein Sinn so ausfällt, daß die Drehung um den Vektor, wenn man in dessen Richtung blickt, im Uhrzeigersinn erfolgt. Es sei nun weiter $\mathfrak{p}$ der Vektor, der vom Ursprung $\mathfrak{o}$ zu einem allgemeinen Punkt des starren Körpers hinführt.

---

[1] Vgl. Darboux, G.: Théorie des surfaces, Bd. I, Kap. I. Paris: Gauthier-Villars 1887. Dieses Werk von Darboux, das 4 Bände umfaßt, ist noch heute als eins der schönsten und reichhaltigsten Werke über Differentialgeometrie anzusehen. Gaston Darboux wurde 1842 in Nîmes geboren. Mit 18 Jahren kam er nach Paris. An dem geistigen Leben dieser Stadt hat er dann 57 Jahre lang hervorragenden Anteil gehabt. Schon als Student der École polytechnique und der École Normale erregte er durch seine mathematische Begabung Aufsehen. Sehr bald kam er zu Ämtern und Ehren. 1880 wurde er der Nachfolger von Chasles auf dem Lehrstuhl für Geometrie an der Sorbonne, vier Jahre später wurde er zum Membre de l'Institut ernannt. Seine besondere Lehrbefähigung machte Darboux zum Vater einer ausgedehnten geometrischen Schule in Frankreich.

Über Leben und Werk von Darboux vergleiche man: Voss, A.: Jahrbuch d. Kgl. bay. Ak. d. Wiss. 1917, S. 26—53, oder Jahresber. d. D. Math. Ver. **27**, 196 bis 217 (1918). Ferner: Eisenhart, L. P., Hilbert, D.: Acta mathematica **42**, 257—284 und 269—273 (1920). Schließlich sei noch auf den zum Teil autobiographischen Vortrag von Darboux hingewiesen, den er vor dem römischen Mathematikerkongreß 1908 gehalten hat. Atti del congresso I, S. 105—122.

Der Abstand r dieses Punktes $\mathfrak{p}$ von der Achse ist dann nach Fig. 4:

$$r = \sqrt[+]{\mathfrak{p}^2} \cdot \sin\varphi, \tag{82}$$

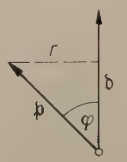


Fig. 4.

wenn φ der Winkel zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d}$ ist. Nach § 1 (14) gilt aber

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{d}}{\sqrt[+]{\mathfrak{p}^2}\ \sqrt[+]{\mathfrak{d}^2}}$$

und somit

$$r = \sqrt[+]{(\mathfrak{p}^2)\,(\mathfrak{d}^2) - (\mathfrak{p}\mathfrak{d})^2}\ :\sqrt[+]{\mathfrak{d}^2}. \tag{83}$$

Ersetzt man in (83) die erste Wurzel mittels § 2 (28) durch $\sqrt[+]{(\mathfrak{d}\times\mathfrak{p})^2}$, so erhält man nach (81) für die Geschwindigkeit v des Punktes $\mathfrak{p}$ unter Beachtung von $\omega = \sqrt[+]{\mathfrak{d}^2}$:

$$v = \sqrt[+]{(\mathfrak{d}\times\mathfrak{p})^2}. \tag{84}$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor des Punktes $\mathfrak{p}$, so gilt offenbar

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{d}\times\mathfrak{p}; \tag{85}$$

denn da $\mathfrak{v}$ sowohl auf $\mathfrak{d}$ wie auf $\mathfrak{p}$ senkrecht steht, gilt sicher

$$\mathfrak{v} = \lambda \cdot (\mathfrak{d}\times\mathfrak{p})$$

mit einem Faktor λ. Wegen $\mathfrak{v}\mathfrak{v} = v^2$ folgt aber aus (84) $\lambda^2 = 1$. Wegen der oben getroffenen Entscheidung über den Sinn von $\mathfrak{d}$ ergibt sich dann aber weiter $\lambda = +1$, womit (85) bewiesen ist.

Denken wir uns jetzt einen starren Körper, der im Ursprung fest ist, und der sich so bewegt, daß drei körperfeste, paarweise senkrechte Achsen in ihm immer parallel zu den Grundvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ verbleiben. Die Raumkurve wollen wir dabei mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen, so daß wir die Bogenlänge s gleich der Zeit setzen können.

Einen mitbewegten Punkt dieses Körpers können wir in der Form darstellen:

$$\mathfrak{p}(s) = u_1\mathfrak{t}(s) + u_2\mathfrak{h}(s) + u_3\mathfrak{b}(s).$$

Sein Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v} = d\mathfrak{p} : ds$ wird nach den Frenet-Formeln

$$\mathfrak{v} = -\frac{u_2}{\varrho}\mathfrak{t} + \left(\frac{u_1}{\varrho} - \frac{u_3}{\tau}\right)\mathfrak{h} + \frac{u_2}{\tau}\mathfrak{b}.$$

Daraus folgt nach (85), wenn man für $\mathfrak{d}$ eine Linearkombination von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ ansetzt und die auf (38) folgenden Gleichungen berücksichtigt:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{\tau}\mathfrak{t} + \frac{1}{\varrho}\mathfrak{b}. \tag{86}$$

Wir finden also:

Die Komponenten des (momentanen) Drehvektors für das begleitende Dreibein einer Raumkurve sind: die Windung in der Tangentenrichtung und die Krümmung in der Binormalenrichtung.

Wenn man umgekehrt den Drehvektor durch die Formel (86) einführt, so ergeben sich rückwärts sofort die Formeln Frenets:

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \mathfrak{d}\times\mathfrak{t} = +\frac{\mathfrak{h}}{\varrho},$$
$$\frac{d\mathfrak{h}}{ds} = \mathfrak{d}\times\mathfrak{h} = -\frac{\mathfrak{t}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{b}}{\tau},$$
$$\frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \mathfrak{d}\times\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{h}}{\tau}.$$

§ 12. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz

Die Frenetschen Formeln (75) lassen sich natürlich für ebene Kurven spezialisieren und somit für die Differentialgeometrie dieser Kurven verwenden. Dies hat jedoch den Nachteil, daß man etwaige Wendepunkte der Kurve (die durch $\mathfrak{x}'' = 0$ gekennzeichnet sind) ausschließen muß.

Bei *ebenen* zweimal stetig differenzierbaren Kurven läßt sich nun aber auch ein in Wendepunkten eindeutig bestimmtes, dem „begleitenden Dreibein" $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}\}$ der räumlichen Kurven analoges „begleitendes Zweibein" $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{n}\}$ in der folgenden Weise definieren: Ist $\mathfrak{e}$ ein zur Kurvenebene $x_3 = 0$ senkrechter Einheitsvektor, dann wird der orientierten Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ der Vektor

$$\mathfrak{x}'(s) = \mathfrak{t}(s)$$

als *Tangentenvektor* und der Vektor

$$\mathfrak{e}\times\mathfrak{t}(s) = \mathfrak{n}(s)$$

als *Normalenvektor* zugeordnet. Wegen $\mathfrak{t}^2 = \mathfrak{n}^2 = 1$ und $\mathfrak{t}\mathfrak{n} = 0$ gelten jetzt für $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ Ableitungsgleichungen der Gestalt:

$$\mathfrak{t}' = k\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -k\mathfrak{t} \tag{87}$$

(vgl. (56), (57) und (62)), oder komponentenweise unter Weglassung der verschwindenden x_3-Koordinaten geschrieben:

$$x_1'' = -kx_2', \quad x_2'' = kx_1'. \tag{88}$$

Der absolute Betrag der hierdurch eindeutig bestimmten Größe k hat den Wert $\sqrt[+]{\mathfrak{t}'^2} = \sqrt[+]{\mathfrak{x}''^2}$, ist also nach (33) gleich der Kurvenkrümmung, so daß wir k auch als die *mit einem Vorzeichen versehene Krümmung* der orientierten ebenen Kurve ansehen können. Man kann das Vorzeichen von k geometrisch wie folgt deuten: k ist positiv bzw. negativ, je nachdem die orientierte Kurve, von der Seite des Raums aus betrachtet, nach welcher der Vektor e weist, „im Gegenuhrzeigersinn" bzw. „im Uhrzeigersinn" gekrümmt ist. Das Vorzeichen des stetig von s abhängenden k kehrt sich also um, wenn man den Durchlaufungssinn der Kurve ändert.

Wir wollen von den Formeln (88) eine Anwendung machen und zum erstenmal einen Lehrsatz aus der *Differentialgeometrie „im Großen"* beweisen. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine geschlossene, ebene, dreimal stetig differenzierbare Kurve, deren Tangentenbild ein stets im gleichen Sinn umlaufener Kreis ist. Eine solche Kurve, für die k etwa positiv sein soll, und die von einer beliebigen Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, nennt man eine *„Eilinie"* oder *„Oval"*. Ein Beispiel einer Eilinie ist die Ellipse. Ein Punkt der Kurve, in dem die (stetig differenzierbare) Krümmung k verschwindende Ableitung ($k' = 0$) hat, soll ein *„Scheitel"* genannt werden. Solche Punkte sind bei einer Ellipse die Achsenpunkte, und zwar sind diese vier Punkte, wie man leicht nachrechnet, die einzigen Scheitel einer (nicht kreisförmigen) Ellipse.

Es soll nun gezeigt werden:

Die Mindestzahl der Scheitel einer Eilinie ist vier. (Vierscheitelsatz.)

Dazu beweisen wir den Hilfssatz, daß das rings um die Eilinie erstreckte Integral

$$\oint (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)\, k' \cdot ds = 0 \tag{89}$$

ist, wenn die a_i beliebige Konstante, $x_1(s)$, $x_2(s)$ die Koordinaten eines Punktes der Eilinie sind und $k(s)$ die zugehörige Krümmung bedeutet. Da die a_i beliebig sind, ist (89) mit den drei Gleichungen

$$\oint k'\, ds = 0, \quad \oint x_1 k'\, ds = 0, \quad \oint x_2 k'\, ds = 0$$

äquivalent. Die erste Gleichung folgt sofort aus der Geschlossenheit der Eilinie, die zweite und dritte bestätigt man durch partielle Integration unter Beachtung von (88); so ist z.B.

$$\oint x_1 k'\, ds = -\oint x_1' k\, ds = -\oint x_2''\, ds = 0.$$

Wir schließen den trivialen Fall $k(s) = \text{const}$ aus. Wegen der Stetigkeit von k gibt es sicher zwei verschiedene Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf unserer Eilinie, wo k seinen größten und seinen kleinsten Wert annimmt. Diese sind jedenfalls Nullstellen von k', und damit ist das Vorhandensein zweier Scheitel $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gesichert. Angenommen, k' wechselt auf der Eilinie nur

zweimal sein Zeichen, so daß also auf Grund der Extremaleigenschaft von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf dem einen sich zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ erstreckenden Teilbogen unserer Eilinie immer $k' \geqq 0$ und auf dem andern stets $k' \leqq 0$ gilt. Es sei dann $a_0 + a_1 x_1 + a_3 x_2 = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden $\mathfrak{pq}$, so daß der Ausdruck $(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)\, k'$ beim Durchlaufen unserer Eilinie niemals sein Zeichen ändert. Dann kann aber das Integral (89) nur in dem ausgeschlossenen Fall $k' \equiv 0$ verschwinden. Die Annahme von nur zwei Zeichenwechseln von k' auf unserer Eilinie führt also zu einem Widerspruch mit unserem Hilfssatz. Da aber aus der Geschlossenheit der Eilinie hervorgeht, daß die Zeichenwechsel von k', falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens vier verschiedenen Scheiteln. Da wir in der Ellipse eine Eilinie mit tatsächlich vier Scheiteln vor uns haben, ist die Vier als richtige Mindestzahl erkannt.

Der vorgetragene Nachweis des mehrfach bewiesenen Vierscheitelsatzes stammt von G. Herglotz[1].

§ 13. Krümmungsmittelpunkt und Schmiegkreis

Kehren wir zu räumlichen oder „gewundenen" Kurven zurück, und machen wir infolgedessen wieder die Voraussetzung $\mathfrak{x}'' \neq 0$! Eine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ und dem Halbmesser a kann man offenbar durch die Gleichung darstellen:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^2 = a^2,$$

wenn die Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ die laufenden Koordinaten der Punkte der Kugel darstellen. Soll die Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ und dem Halbmesser a an der Stelle $s = s_0$ mit der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ „drei zusammenfallende" Punkte gemein haben, so muß für die durch

$$f(s) = (\mathfrak{x}(s) - \mathfrak{y})^2 - a^2$$

gegebene Funktion

$$f(s_0) = 0,\ f'(s_0) = 0,\ f''(s_0) = 0$$

sein (vgl. den letzten Abschnitt von § 6!). Das gibt nach den Frenet-Formeln an einer beliebigen Stelle s:

$$\text{(90)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^2 = a^2, \\ &\text{b)} \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\,\mathfrak{t} = 0, \\ &\text{c)} \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\frac{\mathfrak{h}}{\varrho} + 1 = 0. \end{aligned}$$

[1] Andere Beweise bei: Mukhopadhyaya: Bull. Calcutta Math. Soc. Bd. 1, 1909; Kneser, A.: H. Weber-Festschrift S. 170–180. Leipzig u. Berlin, 1912; Blaschke, W.: Rendiconti di Palermo **36**, 220–222 (1913); Mohrmann, H.: Ebenda **37**, 267–268 (1914); Barner, M., Flohr, F.: Der Mathematikunterricht, Heft 4 (1958).

Nach (90b) liegt der Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ in der Normalebene, nach (90c) oder $(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{h} = \varrho$ hat der Normalriß von $\mathfrak{y}$ auf die Hauptnormale die Entfernung ϱ vom Punkte $\mathfrak{x}$. Setzen wir also von $\mathfrak{y}$ voraus, daß es in der Schmiegebene liegt, so haben wir:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{h}}\,. \tag{91}$$

Es gibt somit genau eine Kugel „durch drei benachbarte" Kurvenpunkte, die ihren Mittelpunkt auf der Schmiegebene liegen hat. Wir wollen den Punkt $\mathfrak{y}$ in der Schmiegebene, den Mittelpunkt dieser ausgezeichneten Kugel, *den Krümmungsmittelpunkt* nennen und den Schnittkreis der Kugel mit der Schmiegebene, also den Kreis durch drei benachbarte Kurvenpunkte, den *Schmiegkreis* oder *Krümmungskreis*. Damit ist eine geometrische Deutung für den „*Krümmungshalbmesser*" ϱ, den reziproken Wert der Krümmung gefunden. Da $\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \varrho\mathfrak{h}$ und $\varrho > 0$ ist, weist der Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{x}$ nach dem Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{y}$.

Die Schnittgerade der Ebenen (90b) und (90c), d. h. mit anderen Worten den Durchschnitt „benachbarter" Normalebenen pflegt man als „*Krümmungsachse*" der Kurve zu bezeichnen. Sie steht im Krümmungsmittelpunkt auf der Schmiegebene senkrecht.

§ 14. Schmiegkugeln

Wir wollen jetzt durch vier benachbarte Punkte von $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine Kugel legen, $\mathfrak{z}$ sei ihr Mittelpunkt, R ihr Halbmesser. Dann muß an einer gewissen Stelle

$$g(s) = (\mathfrak{x}(s) - \mathfrak{z})^2 - R^2 \tag{92}$$

gleichzeitig mit den Ableitungen bis zur dritten Ordnung Null sein. Das gibt neben den schon unter etwas anderer Bezeichnung berechneten Formeln (90) noch eine neue, nämlich insgesamt

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})^2 = R^2,\\
&\text{b)}\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})\,\mathfrak{t} = 0,\\
&\text{c)}\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})\,\frac{\mathfrak{h}}{\varrho} + 1 = 0,\\
&\text{d)}\ (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})\,\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\mathfrak{b}}{\tau} - \frac{\mathfrak{t}}{\varrho}\right) - (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})\,\frac{\varrho'\mathfrak{h}}{\varrho^2} = 0.
\end{aligned} \tag{93}$$

Setzt man zufolge b) und c)

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{h} + \sigma\mathfrak{b}, \tag{94}$$

so folgt aus d), wenn $1 : \tau \neq 0$ vorausgesetzt wird,

$$\sigma = \tau\varrho'.$$

Somit ist der Mittelpunkt der „*Schmiegkugel*“

$$\boxed{\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{h} + \varrho'\tau\mathfrak{b}}, \tag{95}$$

und ihr quadrierter Halbmesser hat nach a) den Wert

$$R^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\tau^2. \tag{96}$$

Der Mittelpunkt $\mathfrak{z}$ der Schmiegkugel liegt nach (95) auf der Krümmungsachse.

Durch Ableitung von (95) erhält man, falls $\varrho'\tau$ differenzierbar ist (was nach (95) mit der Differenzierbarkeit von $\mathfrak{z}$ gleichwertig ist), nach den Frenet-Formeln

$$\mathfrak{z}' = \left\{\frac{\varrho}{\tau} + (\varrho'\tau)'\right\}\mathfrak{b}. \tag{97}$$

Für eine „nicht ebene“ Kurve $\left(\frac{1}{\tau} \neq 0\right)$ auf einer festen Kugel ist also

$$\frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right) = 0. \tag{98}$$

Nehmen wir umgekehrt an, diese Differentialgleichung zwischen den Funktionen $\varrho(s)$, $\tau(s)$ sei identisch erfüllt, dann ist $\mathfrak{z}' = 0$, also $\mathfrak{z} = \text{const}$, und nach (96)

$$\frac{d(R^2)}{ds} = 2\varrho'\tau\left\{\frac{\varrho}{\tau} + (\varrho'\tau)'\right\} = 0$$

oder $R = \text{const}$. Das heißt, die Beziehung (98) ist für die nicht ebenen sphärischen Kurven kennzeichnend.

Nehmen wir einmal eine nicht ebene Kurve mit fester Krümmung $\left(\varrho' = 0, \frac{1}{\tau} \neq 0\right)$: Dann fällt der Mittelpunkt (95) der Schmiegkugel in den Krümmungsmittelpunkt (91):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\mathfrak{h} = \mathfrak{x}^*.$$

Man findet für die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*(s)$, ihre Bogenlänge s^* und ihre Krümmung $\frac{1}{\varrho^*}$

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \frac{\varrho}{\tau}\mathfrak{b}, \quad \frac{ds^*}{ds} = \pm\frac{\varrho}{\tau} \tag{99}$$

und somit

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \mathfrak{t}^* = \pm\mathfrak{b}; \tag{100}$$

ferner durch Ableitung von (100) nach s

$$\frac{d\mathfrak{t}^*}{ds} = \frac{\mathfrak{h}^*}{\varrho^*}\left(\pm\frac{\varrho}{\tau}\right) = \mp\frac{\mathfrak{h}}{\tau}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{h}^*}{\varrho^*} = -\frac{\mathfrak{h}}{\varrho}. \tag{101}$$

Bildet man das „skalare Quadrat", so folgt

$$\varrho^{*2} = \varrho^2 = \text{const}. \tag{102}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{z}^* = \mathfrak{x}^* + \varrho^*\mathfrak{h}^* = \mathfrak{x}^* - \varrho\mathfrak{h} = \mathfrak{x}. \tag{103}$$

Die Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*(s)$ haben also beide die gleiche feste Krümmung, und jede ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die andere.

Die Formeln (93) lassen noch eine andere Deutung zu. (93b) ist bei veränderlichem $\mathfrak{z}$ die Gleichung der Normalebene unserer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$. (93b) und (93c) zusammen ergeben daher als Schnitt benachbarter Normalebenen die Krümmungsachse, auf der $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegen. Nimmt man noch (93d) hinzu, so erkennt man, daß $\mathfrak{z}$ Schnittpunkt dreier benachbarter Normalebenen ist.

§ 15. Bertrand-Kurven

In den Kurvenpaaren mit fester Krümmung, die im letzten Paragraphen betrachtet wurden, haben wir ein Beispiel eines Kurvenpaares mit gemeinsamen Hauptnormalen. Alle derartigen Paare hat zuerst J. Bertrand[1] ermittelt, und zwar auf folgende Weise:

Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ die eine Kurve des Paares,

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + a\mathfrak{h} \tag{104}$$

die (wie $\mathfrak{x}$ als dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzte) zweite ($a \neq 0$). Durch Ableitung mit Benutzung der Frenet-Formeln folgt

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\mathfrak{t} + a'\mathfrak{h} + \frac{a}{\tau}\mathfrak{b}. \tag{105}$$

Da dieser Tangentenvektor auf $\mathfrak{h}$ senkrecht stehen soll, muß jedenfalls $a' = 0$, also a konstant sein. Bezeichnen wir den Winkel zwischen $\mathfrak{t}$ und dem Tangenteneinheitsvektor $\mathfrak{t}^*$ von $\mathfrak{x}^*$ mit ω, so ist

$$\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}\cos\omega + \mathfrak{b}\sin\omega. \tag{106}$$

Daraus folgt durch Ableitung

$$\frac{d\mathfrak{t}^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\mathfrak{h}^*}{\varrho^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \mathfrak{h}\left(\frac{\cos\omega}{\varrho} - \frac{\sin\omega}{\tau}\right) + \mathfrak{t}\frac{d\cos\omega}{ds} + \mathfrak{b}\frac{d\sin\omega}{ds}. \tag{107}$$

[1] Bertrand, J.: Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. Paris, Comptes Rendus **36** (1850) und Liouvilles Journal (1) **15**, 332–350 (1850).

Sollen also die Hauptnormalen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ zusammenfallen, so muß $\omega = \text{const}$ sein. Da die Vektoren $\mathfrak{t}^*$ und $d\mathfrak{x}^* : ds$ proportional sind, folgt aus (105) und (106)

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{a}{\varrho} & \frac{a}{\tau} \\ \cos\omega & \sin\omega \end{vmatrix} = 0, \tag{108}$$

also eine lineare Gleichung zwischen Krümmung und Windung:

$$\frac{a \sin\omega}{\varrho} + \frac{a \cos\omega}{\tau} = \sin\omega. \tag{109}$$

Für $\omega = \pi/2$ kommen wir auf den im vorigen Abschnitt behandelten Fall der Kurven mit fester Krümmung zurück. Schließen wir den trivialen Fall ebener Kurven, der für $\sin\omega = 0$ eintritt, aus, so können wir für

$$a \cot\omega = b$$

setzen und (109) in der Form schreiben

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{\tau} = 1 \quad (a \neq 0). \tag{110}$$

Eine solche Beziehung muß also für jede Kurve eines Bertrand-Paares erfüllt sein. Wenn man die Schlußfolge umgekehrt durchgeht, erkennt man die Bedingung (110) auch als hinreichend. Für eine Schraubenlinie ($\varrho, \tau = \text{const}$) gibt es unendlich viele Konstanten a und b, die (110) genügen, und entsprechend unendlich viele Schraubenlinien, die eine gegebene Schraublinie zu einem Bertrand-Paar ergänzen (vgl. § 5 (14)).

§ 16. Natürliche Gleichungen

Es handelt sich zunächst darum, ob durch Angabe der Funktionen $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}(s)$, $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau}(s)$ eine Kurve im Raum, abgesehen von Bewegungen, *eindeutig* bestimmt werden kann. Für den Fall analytischer Kurven war die Eindeutigkeit schon in § 9 (77) mittels der kanonischen Darstellung festgestellt worden. Macht man nur die üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, so kann man den Nachweis folgendermaßen führen.

Nach Frenet genügen die Komponenten ξ_{1k}, ξ_{2k}, ξ_{3k} ($k = 1, 2, 3$) der Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ des begleitenden Dreibeins den linearen, homogenen Differentialgleichungen mit schiefsymmetrischer Matrix

$$\frac{d\xi_{1k}}{ds} = \frac{\xi_{2k}}{\varrho}, \quad \frac{d\xi_{2k}}{ds} = -\frac{\xi_{1k}}{\varrho} + \frac{\xi_{3k}}{\tau}, \quad \frac{d\xi_{3k}}{ds} = -\frac{\xi_{2k}}{\tau}. \tag{111}$$

Angenommen, wir hätten außer der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ noch eine zweite $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$, deren $\bar{\xi}_{ik}$ denselben Gleichungen (111) genügen. Dann folgt aus

der schiefen Symmetrie der Frenet-Formeln, daß

$$\frac{d}{ds}(\xi_{1k}\bar{\xi}_{1k} + \xi_{2k}\bar{\xi}_{2k} + \xi_{3k}\bar{\xi}_{3k}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{112}$$

ist. Bewegen wir nun die Kurve $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$ so lange, bis das zur Stelle $s = 0$ gehörige Dreibein mit dem entsprechenden Dreibein zu $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ zusammenfällt, und wählen wir außerdem ein Koordinatensystem mit zu den Vektoren dieses gemeinsamen Dreibeins gleichgerichteten Achsen, so ist für $s = 0$

$$\xi_{1k}\bar{\xi}_{1k} + \xi_{2k}\bar{\xi}_{2k} + \xi_{3k}\bar{\xi}_{3k} = 1 \quad (k = 1, 2, 3), \tag{113}$$

und somit gilt die Formel wegen (112) für jedes s. Eine analoge Schlußweise zeigt

$$\xi_{1k}^2 + \xi_{2k}^2 + \xi_{3k}^2 = \bar{\xi}_{1k}^2 + \bar{\xi}_{2k}^2 + \bar{\xi}_{3k}^2 = 1 \ (k = 1, 2, 3).$$

Also fallen die Einheitsvektoren mit den Komponenten ξ_{ik}, $\bar{\xi}_{ik}$ $(i = 1, 2, 3)$ für jedes s zusammen: $\xi_{ik} = \bar{\xi}_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Insbesondere folgt für $i = 1$

$$\mathfrak{t} - \bar{\mathfrak{t}} = \frac{d}{ds}(\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}) = 0, \tag{114}$$

also, da für $s = 0$ nach unserer Annahme $\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} = 0$ ist, allgemein

$$\mathfrak{x}(s) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \tag{115}$$

w.z.b.w.

Es bleibt noch festzustellen, ob man die Funktionen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ *beliebig* vorgeben kann. Schreibt man in (111) an Stelle von ξ_{ik} kurz u_i, so hat man das System linearer, homogener Differentialgleichungen zu lösen:

$$\frac{du_1}{ds} = \frac{u_2}{\varrho}, \quad \frac{du_2}{ds} = -\frac{u_1}{\varrho} + \frac{u_3}{\tau}, \quad \frac{du_3}{ds} = -\frac{u_2}{\tau}. \tag{116}$$

Sind die Funktionen $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\tau}$ stetig, so haben diese Differentialgleichungen nach bekannten Existenzsätzen (vgl. den folgenden § 17) bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten ein Lösungssystem. Wir wollen drei derartige Lösungssysteme betrachten

$$(\eta_{11}, \eta_{21}, \eta_{31}); (\eta_{12}, \eta_{22}, \eta_{32}); (\eta_{13}, \eta_{23}, \eta_{33})$$

mit den Anfangswerten für $s = 0$

$$(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).$$

Da nach (116) für die Vektoren $\mathfrak{b}_i = \{\eta_{1i}, \eta_{2i}, \eta_{3i}\}$

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{117}$$

gilt (vgl. (112)), so erfüllen die $\mathfrak{b}_i$ nicht nur für $s = 0$, sondern für jedes s die Bedingungen

$$\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j = \delta_{ij} \begin{cases} = 0, \text{ für } i \neq j \\ = 1, \text{ für } i = j, \end{cases} \tag{118}$$

aus denen dieselben Beziehungen für die Vektoren $\mathfrak{a}_i = \{\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}\}$ folgen.

Setzen wir nun

$$\frac{dx_i}{ds} = \eta_{1i}, \quad \text{d. h.} \tag{119}$$

$$x_i = \int_0^s \eta_{1i}(s)\, ds,$$

so haben wir eine dreimal stetig differenzierbare Kurve mit der Bogenlänge s gefunden, deren Krümmung und Windung, wie man ohne Mühe bestätigt, die vorgeschriebenen Werte $1:\varrho(s)$, $1:\tau(s)$ haben, wenn $\frac{1}{\varrho}$ noch zusätzlich als stetig differenzierbar und positiv vorausgesetzt wird.

Durch Angabe der (im wesentlichen) beliebig vorgebbaren Funktionen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\tau}$ ist also eine Kurve, und zwar wie vorhin bewiesen wurde, abgesehen von Bewegungen eindeutig bestimmt. Man nennt deshalb die Formeln:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}(s), \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau}(s) \tag{120}$$

die *„natürlichen Gleichungen"* einer Kurve. „Natürlich", weil sie von der Koordinatenwahl unabhängig sind. Unwesentlich ist es, wenn in diesen Gleichungen s durch $\pm s + \text{const}$ ersetzt wird.

Berechnen wir als Beispiel die natürlichen Gleichungen einer *„Epizykloide"*, die von einem Punkt eines rollenden Kreises beschrieben wird, der auf einem festen Kreis seiner Ebene außen gleitungslos abrollt. Es seien a und λa die Halbmesser des festen und des rollenden Kreises. Dann findet sich für einen „Bogen" der Kurve (Fig. 5) die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_1 &= a\{(1+\lambda)\cos\lambda\varphi - \lambda\cos(\lambda+1)\varphi\}, \\ x_2 &= a\{(1+\lambda)\sin\lambda\varphi - \lambda\sin(\lambda+1)\varphi\} \end{aligned} \tag{121}$$

$$(0 < \varphi < 2\pi).$$

Man findet nach geeigneter Festlegung der Bogenlänge

$$s = 4\lambda(1+\lambda)\, a\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \varrho = \frac{4\lambda(1+\lambda)}{1+2\lambda}\, a\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{122}$$

Somit ergeben sich die natürlichen Gleichungen der Epizykloide

$$s^2 + (1 + 2\lambda)^2 \varrho^2 = \{4\lambda(1 + \lambda)\, a\}^2, \frac{1}{\tau} = 0. \tag{123}$$

Es ist bemerkenswert, daß bei dieser im allgemeinen transzendenten Kurve die Beziehung zwischen s und ϱ stets algebraisch ist.

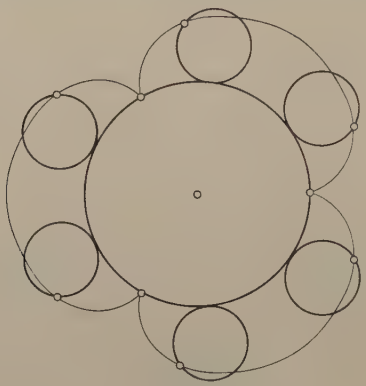


Fig. 5.

§ 17. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen

Im vorigen Paragraphen wurde benutzt, daß ein System von Gleichungen

$$\frac{du_i}{ds} = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} u_k;\ (i = 1, 2, 3), \tag{124}$$

wenn die c_{ik} in $0 \leqq s \leqq r$ stetig sind, ebenda differenzierbare Lösungen besitzt, die für $s = 0$ vorgeschriebene Anfangswerte u_i^0 mit $|u_i^0| < B$ annehmen. Den Nachweis erbringt man am einfachsten mittels „schrittweiser Näherungen". Man setze

$$\begin{aligned} u_i^1(s) &= u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^0\, ds, \\ u_i^2(s) &= u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^1\, ds, \\ &\cdots\cdots\cdots

Es sei $|c_{ik}(s)| < \frac{1}{3} C$. Dann wird für $0 \leqq s \leqq r$

$$|u_i^1(s) - u_i^0| < BCs,$$

$$|u_i^2(s) - u_i^1(s)| = \int_0^s \sum_k c_{ik}(u_k^1 - u_k^0)\, ds, \quad \text{d. h.}$$

$$|u_i^2(s) - u_i^1(s)| < BC^2 \frac{s^2}{2},$$

.....

$$|u_i^n(s) - u_i^{n-1}(s)| < BC^n \frac{s^n}{n!} \leqq BC^n \frac{r^n}{n!}.$$

Somit ist nach dem Majorantenkriterium die Funktionenfolge $u_i^n = u_i^0 + \sum_{\nu=1}^{n} (u_i^\nu - u_i^{\nu-1})$ im Intervall $0 \leqq s \leqq r$ gleichmäßig konvergent,

$$\lim_{n\to\infty} u_i^n(s) = u_i(s) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{126}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt aus (125) für $n \to \infty$

$$u_i(s) = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k\, ds \tag{127}$$

oder (da u_i stetig ist)

$$\frac{du_i}{ds} = \sum_k c_{ik} u_k, \quad u_i(0) = u_i^0, \tag{128}$$

w. z. b. w.

§ 18. Böschungslinien

Kurven, deren Tangenten mit einer festen Richtung einen festen Winkel bilden, nennt man nach E. Müller Böschungslinien. Beispiele dafür sind die ebenen Kurven und die Schrauben (§ 5). Das Tangentenbild einer Böschungslinie ist Teil eines Kreises. Nennen wir den Einheitsvektor in der festen Richtung $\mathfrak{e}$ und den festen Winkel ϑ ($0 < \vartheta < 2\pi$, $\vartheta \neq \pi$), so ist

$$\mathfrak{e}\mathfrak{t} = \cos\vartheta \tag{129}$$

und durch Ableitung

$$\mathfrak{e}\dot{\mathfrak{t}} = 0. \tag{130}$$

$\mathfrak{e}$ liegt somit in der Ebene von $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$. So können wir

$$\mathfrak{e}\mathfrak{b} = \sin\vartheta \tag{131}$$

setzen. Durch Ableitung von (130) folgt nach Frenet und wegen (129), (131)

$$\frac{\sin\vartheta}{\tau} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho} = 0 \text{ oder } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\varrho}\cot\vartheta, \tag{132}$$

d.h. *bei einer Böschungslinie stehen Krümmung und Windung in festem Verhältnis.*

Ist umgekehrt (132) erfüllt, so ist

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}\cos\vartheta + \mathfrak{b}\sin\vartheta) = 0 \quad (0 < \vartheta < 2\pi, \vartheta \neq \pi), \tag{133}$$

also die Richtung

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{t}\cos\vartheta + \mathfrak{b}\sin\vartheta \tag{134}$$

und

$$\mathfrak{e}\mathfrak{t} = \cos\vartheta \tag{135}$$

unveränderlich, unsere Kurve also eine Böschungslinie. Auch (130) oder $\mathfrak{e}\frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} = 0$ kennzeichnet die Böschungslinien, denn durch Integration folgt daraus:

$$\mathfrak{e}\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \text{const}.$$

Wir wollen uns die Böschungslinie auf eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$ projizieren. Der Grundriß sei $\bar{\mathfrak{x}}$:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{e})\mathfrak{e}. \tag{136}$$

Daraus folgt nach (129)

$$\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{t} - \mathfrak{e}\cos\vartheta, \tag{137}$$

$$\bar{\mathfrak{x}}'' = \frac{\mathfrak{h}}{\varrho}. \tag{138}$$

Ferner

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = \sin^2\vartheta, \frac{d\bar{s}}{ds} = \pm\sin\vartheta \text{ und etwa } \bar{s} = \pm s\sin\vartheta. \tag{139}$$

Somit ist

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{x}}}{d\bar{s}^2} = \bar{\mathfrak{x}}'' \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{\mathfrak{h}}{\varrho\sin^2\vartheta} = \frac{\bar{\mathfrak{h}}}{\bar{\varrho}}. \tag{140}$$

Man kann also setzen

$$\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \text{ und } \bar{\varrho} = \varrho\sin^2\vartheta. \tag{141}$$

§ 19. Böschungslinien auf einer Kugel

Soll man auf einer Kugel vom Halbmesser R die nicht ebenen Böschungslinien ($\cos\vartheta \neq 0$) ermitteln, so kann man zunächst die Formel (96) von § 14 heranziehen. Nämlich

$$\varrho^2 + \varrho'^2\tau^2 = R^2.$$

Nach (132) ist $\tau = \varrho \tan\vartheta$, also

$$\varrho^2(1 + \varrho'^2 \tan^2\vartheta) = R^2, \quad \varrho' \tan\vartheta = \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{\varrho}$$

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} \tan\vartheta = ds$$

und daraus nach geeigneter Wahl des Kurvenpunktes $s = 0$

(142) $$s = -\tan\vartheta \sqrt{R^2 - \varrho^2}$$

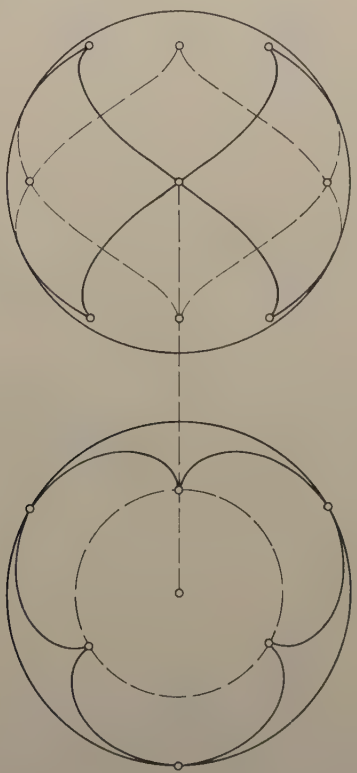


Fig. 5a.

oder

$$\varrho = \overset{+}{\sqrt{R^2 - s^2 \cot^2 \vartheta}} \quad (|s| < R\,|\tan \vartheta|). \tag{143}$$

Für den Grundriß unserer Böschungslinie (§ 18) folgt nach (139) und (141)

$$\bar{\varrho} = \overset{+}{\sqrt{R^2 \sin^4 \vartheta - \bar{s}^2 \cos^2 \vartheta}}. \tag{144}$$

Nach § 16 (123) sind diese Grundrisse also Epizykloiden. In der Fig. 5a wird dieser Zusammenhang zwischen sphärischen Böschungslinien und Epizykloiden in Auf- und Grundriß verdeutlicht. Der Grundriß ist dabei doppelt zu durchlaufen.

§ 20. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid

Als Grundriß der Böschungslinien auf einem Drehparaboloid, dessen Achse parallel zur festen Richtung e ist, auf eine Ebene senkrecht zu e erhält man *Kreisevolventen*, ebene Kurven also, die ihre Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise haben. Man kann diese Behauptung ohne viel Rechnung folgendermaßen bestätigen:

Es habe unser Vektor e die Komponenten $\{0, 0, 1\}$, liege also auf der x_3-Achse. Die Gleichung des Paraboloids sei:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2cx_3 \quad (c \neq 0). \tag{145}$$

Eine Schmiegebene unserer Böschungslinie schließt mit e nach (129) und (130) den Winkel ϑ ein, ihre Gleichung kann also, wenn wir sie um die x_3-Achse noch geeignet drehen, auf die Form

$$x_3 = x_1 \cot \vartheta + \text{const} \tag{146}$$

gebracht werden. Ihr Durchschnitt mit dem Paraboloid ist eine Ellipse, die mit unserer Böschungslinie drei benachbarte Punkte gemein hat. Der „Grundriß" dieser Ellipse auf $x_3 = 0$ ist eine neue Ellipse, die mit dem Grundriß der Böschungslinie wieder drei benachbarte Punkte gemein hat. Man findet ihre Gleichung durch Eliminieren von x_3 aus (145) und (146), nämlich:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2cx_1 \cot \vartheta + \text{const}. \tag{147}$$

Das ist aber offenbar ein Kreis, also der Schmiegkreis des Grundrisses der Böschungslinie. Sein Mittelpunkt hat vom Ursprung die feste Entfernung $c \cot \vartheta$. Somit liegt der Ort der Krümmungsmittelpunkte des Grundrisses unserer Böschungslinie tatsächlich auf einem Kreis.

§ 21. Evolventen, Evoluten

Die (stetig differenzierbaren) Kurven auf der Tangentenfläche (§ 6) einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, die die Tangenten senkrecht durchschneiden, nennt man *Fadenevolventen*. Setzt man

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} - r\mathfrak{t}, \tag{148}$$

so folgt

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = (1 - r')\,\mathfrak{t} - r\frac{\mathfrak{h}}{\varrho}, \tag{149}$$

also muß sein

$$\mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = 1 - r' = 0 \quad \text{und} \quad r \neq 0. \tag{150}$$

Daraus folgt $r = s + \text{const}$. Somit haben wir die gesuchten Evolventen in der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}^*(s) = \mathfrak{x}(s) - (s + \text{const})\frac{d\mathfrak{x}(s)}{ds}. \tag{151}$$

Anziehender ist die umgekehrte Aufgabe: zu $\mathfrak{x}^*$ rückwärts eine „*Evolute*" $\mathfrak{x}$ aufzusuchen. Vertauscht man die Bezeichnungen $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{x}$, so handelt es sich darum, Normalen von $\mathfrak{x}$ so anzuordnen, daß sie Tangenten einer (stetig differenzierbaren) Kurve $\mathfrak{x}^*$ werden. Setzen wir entsprechend

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + u_2\mathfrak{h} + u_3\mathfrak{b}, \tag{152}$$

so wird

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \left(1 - \frac{u_2}{\varrho}\right)\mathfrak{t} + \left(u_2' - \frac{u_3}{\tau}\right)\mathfrak{h} + \left(u_3' + \frac{u_2}{\tau}\right)\mathfrak{b}. \tag{153}$$

Aus $\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds}\,\mathfrak{t} = 0$ folgt dann zunächst

$$u_2 = \varrho, \tag{154}$$

d.h. die zum Punkt $\mathfrak{x}$ gehörigen Evolutenpunkte $\mathfrak{x}^*$ liegen auf der Krümmungsachse (§ 13) von $\mathfrak{x}$. Ferner müssen die beiden (nicht verschwindenden) Vektoren $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}$ und $\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds}$ linear abhängen, was

$$\begin{vmatrix} \varrho' - \frac{u_3}{\tau} & u_3' + \frac{\varrho}{\tau} \\ \varrho & u_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{155}$$

oder

$$\frac{\varrho' u_3 - u_3'\varrho}{\varrho^2 + u_3^2} = \frac{1}{\tau} \tag{156}$$

und

$$\left(\varrho' - \frac{u_3}{\tau}\right)^2 + \left(u_3' + \frac{\varrho}{\tau}\right)^2 \neq 0$$

ergibt. Daraus folgt:

$$\operatorname{arccot}\frac{u_3}{\varrho} = \int \frac{ds}{\tau} + c \tag{157}$$

oder

$$u_3 = \varrho \cot\left(\int \frac{ds}{\tau} + c\right) \tag{158}$$

und

$$\varrho' - \frac{\varrho}{\tau}\cot\left(\int \frac{ds}{\tau} + c\right) \neq 0.$$

Entsprechend der hier auftretenden Integrationskonstanten hängen die Evoluten

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varrho\left(\mathfrak{h} + \mathfrak{b}\cot\left(\int \frac{ds}{\tau} + c\right)\right) \tag{159}$$

noch von der Konstanten c ab. *Der Winkel φ, unter dem man zwei verschiedene Evoluten von $\mathfrak{x}$ aus sieht, ist unveränderlich,* bezeichnet man nämlich die zu c_1 uud c_2 gehörenden Evoluten mit $\mathfrak{x}_1^*$ und $\mathfrak{x}_2^*$, so errechnet sich auf Grund von (159):

$$\cos\varphi = \frac{(\mathfrak{x}_1^* - \mathfrak{x})\,(\mathfrak{x}_2^* - \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{x}_1^* - \mathfrak{x})^2\,(\mathfrak{x}_2^* - \mathfrak{x})^2}} = \pm\cos\,(c_2 - c_1).$$

Schließlich gilt für ebene Kurven

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varrho(\mathfrak{h} + \mathfrak{b}\cot c) \quad (\varrho' \neq 0). \tag{160}$$

Es gibt also eine einzige ebene Evolute ($\cot c = 0$) *einer ebenen Kurve. Die übrigen Evoluten sind Böschungslinien, deren Tangenten gegen die Ebene von $\mathfrak{x}$ feste Neigung haben,* wie man folgendermaßen einsieht: Nach (153), (154), (158) wird

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \pm(\mathfrak{h}\sin c + \mathfrak{b}\cos c) \quad (s^* = \text{Bogenlänge von } \mathfrak{x}^*),$$

d.h.

$$\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \pm\cos c.$$

§ 22. Isotrope Kurven

Es ist, selbst wenn man nur geometrisch anschauliche Ergebnisse herleiten will, doch zweckmäßig, gelegentlich auch komplexe Kurven zu betrachten, also die Funktionen $x_k = x_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ als komplexe analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $t = u + iv$ mit gemeinsamem Existenzgebiet vorauszusetzen. Für diese komplexen Kurven, die, wenn wir reelle „Dimensionen" zählen, Träger von „zweifach unendlich" vielen Punkten sind, da die Kurvenpunkte von zwei reellen Parametern u, v abhängen, ist die hier vorgetragene Theorie im großen und ganzen anwendbar; nur treten gewisse Ausnahmefälle auf. So ist

besonders der Fall möglich, daß die „Bogenlänge" einer solchen Kurve Null ist, ohne daß sich die Kurve auf einen Punkt zusammenzieht. Aus

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 0 \tag{161}$$

folgt nämlich jetzt nicht mehr $\dot{\mathfrak{x}} = 0$. Die durch $\dot{\mathfrak{x}}^2 = 0$, $\dot{\mathfrak{x}} \neq 0$ gekennzeichneten komplexen Kurven pflegt man *isotrope Kurven* zu nennen (oder auch „Minimalkurven"). Wir werden später sehen (Kap. 8, § 116), daß diese unanschaulichen komplexen Kurven zur Darstellung einer sehr anschaulichen reellen Flächenklasse verwendbar sind, nämlich zur Herleitung der „Minimalflächen", in die sich ein Seifenhäutchen formt, das längs eines geschlossenen (irgendwie gewundenen) Drahtes ausgespannt ist.

Aus $\dot{\mathfrak{x}}^2 = 0$ folgt $\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} = 0$, $\dot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}} = -\ddot{\mathfrak{x}}^2$ und daher nach dem Multiplikationssatz § 2 (20)

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}})^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\ddot{\mathfrak{x}}^2 \\ 0 & \ddot{\mathfrak{x}}^2 & * \\ -\ddot{\mathfrak{x}}^2 & * & * \end{vmatrix} = -(\ddot{\mathfrak{x}}^2)^3.$$

Ebenso gilt allgemeiner für den beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v})^2 = -\ddot{\mathfrak{x}}^2 \cdot (\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{v})^2. \tag{162}$$

Daraus folgt, daß $\ddot{\mathfrak{x}}^2$ genau dann identisch verschwindet, wenn $\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} \equiv 0$ ist. Dadurch waren aber nach § 6 die geraden Linien gekennzeichnet. Wir wollen im folgenden diese geradlinigen, isotropen Kurven, also die isotropen Geraden ausschließen und $\ddot{\mathfrak{x}}^2 \neq 0$, d.h. $\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} \neq 0$ voraussetzen. Dann sind aber die Lösungen $\mathfrak{z} = \dot{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{z} = \dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}}$ der linear unabhängigen Gleichungen $\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{z} = 0$, $\ddot{\mathfrak{x}}\mathfrak{z} = 0$ linear abhängig:

$$\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} = \alpha \dot{\mathfrak{x}} \quad (\alpha \neq 0). \tag{163}$$

Bei Einführung eines neuen Parameters p auf unserer Kurve ergibt sich im Falle $\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{v} \neq 0$

$$\frac{(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v})}{(\mathfrak{x}'\mathfrak{v})} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v})}{(\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{v})} \quad ((1)). \tag{164}$$

Wollen wir also den neuen Parameter p so wählen, daß

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}) = -(\mathfrak{x}', \mathfrak{v}) \tag{165}$$

wird, so brauchen wir nur

$$p = \int \sqrt{-\frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v})}{(\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{v})}}\, dt = \int \sqrt{-\alpha}\, dt \tag{166}$$

zu setzen, wo $\mathfrak{v}$ einen beliebigen konstanten Vektor mit $\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{v} \neq 0$ bedeutet. Dadurch ist dieser (von der Wahl von $\mathfrak{v}$ unabhängige) natürliche Para-

((1)) Die Ableitungen nach t bzw. p sind mit Punkten bzw. Strichen bezeichnet.

meter p, der zuerst von E. Vessiot und dann insbesondere von E. Study eingeführt worden ist[1], ähnlich wie früher die Bogenlänge durch eine (zweiwertige) Quadratwurzel erklärt.

Für $t = p$ wird nach (165)

$$\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'' = -\mathfrak{x}' \tag{167}$$

und nach (162)

$$\mathfrak{x}''^2 = -1. \tag{168}$$

Ferner ist nach (167), (168)

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''') = -\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''' = \mathfrak{x}''^2 = -1. \tag{169}$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$ stellen geeignete „Grundvektoren" zur Übertragung der invariantentheoretischen Betrachtungen von § 8 auf isotrope Kurven dar, was jedoch nicht näher ausgeführt werden soll.

§ 23. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven

Man kann alle „krummen" isotropen Kurven ($\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} \neq 0$) mittels einer willkürlichen analytischen Funktion f und deren Ableitungen „integrallos" darstellen. In der Tat! Die Gleichung der Schmiegebene einer derartigen, für alle p mit $|p - p_0| < \delta$ definierten Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(p)$ (p = natürlicher Parameter von Vessiot) lautet nach (26) und (167)

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = -(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{x}' = 0$$

oder

$$x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3 = \mathfrak{x}\mathfrak{x}' = g, \tag{170}$$

wobei $\mathfrak{x}'^2 = 0$ oder

$$(x_1' + ix_2')\,(x_1' - ix_2') = -x_3'^2 \quad (i^2 = -1) \tag{171}$$

ist und x_1', x_2', x_3' an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden. Dies hat zur Folge, daß auch $x_1' + ix_2'$ und $x_1' - ix_2'$ nirgends gleichzeitig Null werden, so daß wir (notfalls nach Spiegelung der Kurve an der x_2, x_3-Ebene, d.h. nach Ersetzung von x_1 durch $-x_1$) $x_1'(p_0) - ix_2'(p_0) \neq 0$ annehmen können. Nach etwaiger geeigneter Einschränkung des Parameterbereichs hat man $x_1' - ix_2' \neq 0$ und kann nun die Schmiegebene (170) auch in der Form

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = h \tag{172}$$

mit

$$a_k = \frac{2x_k'}{x_1' - ix_2'}\ (k = 1, 2, 3) \text{ und } h = \frac{2g}{x_1' - ix_2'} \tag{173}$$

[1] Vessiot, E.: Comptes Rendus **140**, 1381–1384 (1905); Study, E.: Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven. Trans. Amer. Math. Soc. **10**, 1–49 (1909). In dieser Arbeit werden die komplexen Kurven systematisch studiert.

darstellen. Jetzt ist wegen (173) und (171): $a_1 - ia_2 = 2$ und $a_1 + ia_2 = -\frac{a_3^2}{2}$, also $a_1 = 1 - \frac{a_3^2}{4}$, $a_2 = i\left(1 + \frac{a_3^2}{4}\right)$. Führt man noch $t = -\frac{1}{2}a_3(p)$ als neuen Parameter ein, was wegen

$$\frac{dt}{dp} = \frac{(x_3'x_1'' - x_1'x_3'') + i(x_2'x_3'' - x_3'x_2'')}{(x_1' - ix_2')^2} = (\text{nach (167)}) = \frac{-i}{x_1' - ix_2'} \neq 0$$

möglich ist, so erhält man schließlich als Gleichung der Schmiegebene in $\mathfrak{x}(p(t))$ (wenn noch die eventuelle Ersetzung von x_1 durch $-x_1$ rückgängig gemacht wird):

$$(174) \qquad \boxed{\pm(1-t^2)\,y_1 + i(1+t^2)\,y_2 - 2ty_3 = h(p(t)) = 2if(t)},$$

wo f eine (in einer Umgebung von $t_0 = -\frac{1}{2}a_3(p_0)$) analytische Funktion bedeutet.

Nun genügt aber ganz allgemein die Kenntnis der (als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzten) Schmiegebenenschar

$$(175) \qquad \mathfrak{a}(t)\mathfrak{y} = d(t)$$

einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$, um die letztere als „Hüllkurve" ihrer Schmiegebenen folgendermaßen zu bestimmen: Auf Grund der Schmiegebeneneigenschaft hat man zunächst $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = d$, $\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{x}} = 0$, $\mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{x}} = 0$ (§ 6), woraus durch Differentiation der ersten Gleichung

$$\dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} = \dot{d}$$

und

$$\ddot{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} + 2\dot{\mathfrak{a}}\dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{x}} = \ddot{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} + 2(\dot{\mathfrak{a}}\dot{\mathfrak{x}})^{\cdot} - \mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{x}}) + \mathfrak{a}\ddot{\mathfrak{x}} = \ddot{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} = \ddot{d}$$

folgt. Ist jetzt $(\mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}}, \ddot{\mathfrak{a}}) \neq 0$, so bestimmt sich $\mathfrak{x}$ als die Lösung des Gleichungssystems

$$(176) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{y} = d, \quad \dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{y} = \dot{d}, \quad \ddot{\mathfrak{a}}\mathfrak{y} = \ddot{d},$$

welches durch zweimaliges Ableiten bei festem $\mathfrak{y}$ aus (175) entsteht.

Wendet man dieses Verfahren auf die Schmiegebenenschar (174) an, so erhält man für unsere isotrope Kurve die gewünschte „integrallose" Darstellung

$$(177) \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \pm i\left(f(t) - t\dot{f}(t) - \frac{1-t^2}{2}\ddot{f}(t)\right) \\ x_2(t) &= \quad f(t) - t\dot{f}(t) + \frac{1+t^2}{2}\ddot{f}(t) \\ x_3(t) &= -i\left(\dot{f}(t) - t\ddot{f}(t)\right) \end{aligned}},$$

wobei wegen

$$\dot{x}_1(t) = \mp i\frac{1-t^2}{2}\dddot{f}(t),\ \dot{x}_2(t) = \frac{1+t^2}{2}\dddot{f}(t),\ \dot{x}_3(t) = it\dddot{f}(t) \tag{178}$$

und $\dot{\mathfrak{x}} \neq 0$

$$\dddot{f} \neq 0 \tag{179}$$

sein muß. Umgekehrt stellt (177) wegen der aus (178) folgenden Beziehung $\dot{\mathfrak{x}}^2 = 0$ *für beliebiges analytisches* f *mit* $\dddot{f} \neq 0$ eine krumme isotrope Kurve dar, so daß f in (177) nur der Einschränkung (179) unterworfen ist. Der „natürliche" Parameter p von Vessiot und Study hängt mit dem in (177) auftretenden speziellen Parameter t wie folgt zusammen:

$$p = \int \sqrt{\pm\dddot{f}(t)}\, dt. \tag{180}$$

§ 24. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 5.) Es sei $y = f(x)$ eine ebene Kurve, definiert für alle $x \geq 0$, wobei f stetig differenzierbar ist und $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$ gilt. Weiter sei $c(x)$ bzw. $s(x)$ Länge der Sehne bzw. Länge des Kurvenbogens von $(0, f(0))$ bis $(x, f(x))$. Man beweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{s(x)}{c(x)} = 1$.

2. (Zu §§ 5, 6.) Sei $\overset{\frown}{AB}$ ein stetig differenzierbarer ebener Kurvenbogen mit dem Anfang A und dem Ende B derart, daß die Tangentenrichtungen einen Winkelraum mit einem Öffnungswinkel ϑ $(0 < \vartheta < \pi)$ unbedeckt lassen. Man zeige: $\frac{l}{s} > \sin\frac{\vartheta}{2}$, falls l die Länge der Strecke AB und s die Länge von $\overset{\frown}{AB}$ ist. Diese Ungleichung ist scharf, Gleichheit tritt aber nie ein.

3. (Zu § 7.) Eine zweimal stetig differenzierbare Raumkurve C werde auf zwei beliebige, paarweise aufeinander orthogonale und zur Tangente von C im Punkte $s = s_0$ parallele Ebenen π_1 und π_2 orthogonal projiziert. Man zeige, daß für die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ bzw. $\frac{1}{\varrho_2}$ der Projektionen C_1 bzw. C_2 von C auf π_1 bzw. π_2 die Beziehung $\left(\frac{1}{\varrho}(s_0)\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho_1}(s_0)\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_2}(s_0)\right)^2$ gilt.

4. (Zu § 7.) Man zeige: Ist $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(t)$ eine dreimal stetig differenzierbare räumliche Kurve mit $\mathfrak{e}^2 = 1$ und $(\mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}, \ddot{\mathfrak{e}}) \neq 0$, so wird durch $\mathfrak{x} = a\int\limits_{t_0}^{t} (\mathfrak{e}\times\dot{\mathfrak{e}})\, dt$ $(a = \text{const} \neq 0)$ eine dreimal stetig differenzierbare Raumkurve konstanter Windung $\frac{1}{a} \neq 0$ dargestellt; und umgekehrt besitzt jede derartige Raumkurve einen Integraldarstellung der angegebenen Art.

5. (Zu § 9.) Es ist zu beweisen:

a) Ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(s)$ das Hauptnormalenbild einer viermal stetig differenzierbaren Raumkurve C: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, so ist C dadurch bis auf Integrationskonstanten eindeutig

bestimmt, es gilt nämlich:

$$\mathfrak{x}(s) = -\int \left(\cos\varphi \frac{\mathfrak{h}'}{|\mathfrak{h}'|} + \sin\varphi\left(\frac{\mathfrak{h}'}{|\mathfrak{h}'|} \times \mathfrak{h}\right)\right) ds, \text{ wobei } \varphi(s) = \int \frac{(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}', \mathfrak{h}'')}{\mathfrak{h}'^2}\, ds.$$

b) Umgekehrt wird durch diese Formeln eine zweimal stetig differenzierbare Raumkurve C mit vorgegebenem Hauptnormalenbild als Funktion des Bogenlängenparameters s von C dargestellt.

6. (Zu § 9.) Man beweise: Die Integration der drei Frenetschen Gleichungen einer Raumkurve ist gleichwertig mit der Integration einer einzigen Riccatischen Differentialgleichung im Komplexen, nämlich der Gleichung

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{i}{\varrho}\sigma + \frac{i}{2\tau}(\sigma^2 - 1)$$

mit

$$\sigma = \frac{t_x + ih_x}{1 - b_x} \text{ bzw. } \sigma = \frac{t_y + ih_y}{1 - b_y} \text{ bzw. } \sigma = \frac{t_z + ih_z}{1 - b_z},$$

wobei

$$\mathfrak{t} = \{t_x, t_y, t_z\},\ \mathfrak{h} = \{h_x, h_y, h_z\},\ \mathfrak{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

gesetzt ist.

7. (Zu § 12.) Ein Hund sieht seinen Herrn, der sich mit konstanter Geschwindigkeit 1 in der y-Achse eines cartesischen Koordinatensystems (im positiven Sinne) bewegt, und läuft auf einer Kurve C der (x, y)-Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit $v > 1$ immer genau auf seinen Herrn zu ($x > 0$). Man beweise: C besitzt die analytische Darstellung $2y = \frac{a}{1 + \frac{1}{v}}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{1}{v}} - \frac{a}{1 - \frac{1}{v}}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{1}{v}} + b$ ($a > 0$ und b = Integrationskonstanten). Trifft der Hund den Herrn?

8. (Zu § 12.) C sei eine einfach geschlossene, zweimal stetig differenzierbare, auf einer Kugel gelegene Kurve mit der Eigenschaft, daß keine ihrer Schmiegebenen den Kugelmittelpunkt enthält. Man beweise: C liegt dann schon ganz auf einer (offenen) Halbkugel. [Anleitung: Man projiziere C vom Kugelmittelpunkt aus auf eine geeignete Ebene!].

9. (Zu § 12.) Sei E eine dreimal stetig differenzierbare ebene Eilinie (d.h. eine einfach geschlossene überall positiv gekrümmte Kurve) und sei O ein innerer Punkt des von E umschlossenen Bereichs. Als „Fußpunktkurve" E' von E wird der geometrische Ort der Fußpunkte aller von O auf die Tangenten von E gefällten Lote bezeichnet. Man zeige: Durch Inversion von E' am Einheitskreis um O entsteht wieder eine (zweimal stetig differenzierbare) Eilinie E^*.

10. (Zu § 13, „Differenzengeometrie" einer Raumkurve.) Man beweise: Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ eine in dem Sinn wachsender t durchlaufene, zweimal stetig differenzierbare Raumkurve mit $\frac{1}{\varrho} > 0$, sind $\mathfrak{x}_\nu = \mathfrak{x}(t_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ drei paarweise verschiedene, benachbarte Punkte dieser Kurve, und wird $\frac{\mathfrak{x}_\mu - \mathfrak{x}_\nu}{t_\mu - t_\nu} = \mathfrak{x}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3; \mu \neq \nu)$, $2\frac{\mathfrak{x}_{23} - \mathfrak{x}_{12}}{t_3 - t_1} = \mathfrak{x}_{123}$ gesetzt, so ergeben sich für den Radius r des Umkreises dieses Dreiecks $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ und für den zum Mittelpunkt dieses Kreises führenden Ortsvektor $\mathfrak{m}$ die Formeln:

$$r = \frac{t_3 - t_1}{2} \frac{|\mathfrak{x}_{12}|\,|\mathfrak{x}_{23}|\,|\mathfrak{x}_{13}|}{|\mathfrak{x}_{12} \times \mathfrak{x}_{23}|}, \quad \mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3}{2} + (\mathfrak{x}_{12}\,\mathfrak{x}_{23}) \frac{(\mathfrak{x}_{12} \times \mathfrak{x}_{123}) \times \mathfrak{x}_{13}}{(\mathfrak{x}_{12} \times \mathfrak{x}_{123})^2}.$$

Daraus folgen weiter durch Grenzübergang $t_2 \to t_1$, $t_3 \to t_1$ die bekannten differentialgeometrischen Formeln für Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt der Raumkurve.

11. (Zu § 14.) Sei C eine fünfmal stetig differenzierbare Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit $\frac{1}{\varrho} > 0$, $\frac{1}{\tau} \neq 0$ und sei R der Radius einer Kugel, die für $s = s_0$ vier benachbarte Schmiegebenen von C berührt. Man zeige (als duales Analogon zu Sätzen in § 14!): $R = \left| \left(\left(\frac{\varrho}{\tau} \right)' (s_0) \right)^{-1} \right|$. Außerdem gilt: Alle Schmiegebenen von C berühren genau dann eine feste Kugel vom Radius R, wenn $\frac{\varrho(s)}{\tau(s)} = \pm \frac{1}{R} s + \text{const}$ gilt.

12. (Zu § 15.) Man beweise: Wenn zwei dreimal stetig differenzierbare Raumkurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*(s^*)$ mit überall nicht verschwindender Krümmung und Windung gemeinsame Binormalen besitzen, so sind sie identisch. Man gebe ein Beispiel dafür an, daß diese Aussage für ebene Kurven falsch wird.

13. (Zu § 16.) Man beweise: Alle „rektifizierenden" Ebenen $(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}(s))\, \mathfrak{h}(s) = 0$ einer dreimal stetig differenzierbaren Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit $\frac{1}{\varrho} > 0$ gehen genau dann durch einen festen Punkt, wenn $\frac{\varrho(s)}{\tau(s)} = as + b$ mit $a, b = \text{const}$, $a \neq 0$ gilt.

14. (Zu § 18.) Es ist zu beweisen: Wenn C: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine viermal stetig differenzierbare Raumkurve mit $\frac{1}{\varrho} > 0$ ist, dann ist C genau dann Böschungslinie, wenn $(\mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{x}'''') = 0$ gilt.

15. (Zu § 21.) Es soll gezeigt werden: Wenn $\mathfrak{x}$ eine beliebige dreimal stetig differenzierbare Raumkurve mit $\frac{1}{\varrho} > 0$, $\frac{1}{\tau} \neq 0$ ist, dann besitzt $\mathfrak{x}$ genau eine „Evolute zweiter Art" $\mathfrak{x}^*$ mit der charakteristischen Eigenschaft, daß die Schmiegebenen von $\mathfrak{x}^*$ die Normalebenen von $\mathfrak{x}$ sind. Die Punkte von $\mathfrak{x}^*$ sind die Schmiegkugelmittelpunkte von $\mathfrak{x}$. Man mache sich diesen Sachverhalt auch rein geometrisch klar.

16. (Zu § 22.) Man zeige: Bei isotropen Kurven tritt unter Verwendung des natürlichen Parameters p von § 22 und des begleitenden Dreibeins $\{\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''\}$ an die Stelle der Formeln von Frenet die einzige Ableitungsgleichung $\mathfrak{x}'''' = \frac{1}{2} F' \mathfrak{x}' + F \mathfrak{x}''$, wobei die (komplexe) Größe $F = \mathfrak{x}'''^2$ eine beliebig analytisch vorgebbare Funktion von p ist.

17. Sei $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(x_1, x_2, x_3)$ ein zweimal stetig differenzierbares (überall nicht verschwindendes) räumliches Kraftfeld mit der folgenden Eigenschaft: Die Bahnkurven jedes Massenpunktes unter dem Einfluß von k bei beliebigen Anfangsbedingungen sind stets eben. Dann gilt: Alle Kraftvektoren des Feldes weisen (lokal) zu ein und demselben (endlichen oder unendlichen) Punkt des Raumes.

b) Bemerkungen

1. (Zu § 5.) Eine stetige Raumkurve C: $x_\nu^1 = x_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ ist genau dann „rektifizierbar" in dem Sinne, daß die Längen aller zwischen zwei Punkten von C dieser Raumkurve einbeschriebenen Streckenzüge eine endliche obere Grenze besitzen, wenn die Funktionen x_ν von beschränkter Schwankung sind (Haupt-Aumann: Differential- und Integralrechnung I, Berlin: de Gruyter 1938, S. 105). Dieser Satz ist für Kap. II, § 30 von Wichtigkeit.

2. (Zu § 6.) Eine ebene stetige Kurve, die in jedem Punkt eine Tangente besitzt, enthält stets einen rektifizierbaren Teilbogen (Saks-Zygmund: Un teorema sulle curve continue. Boll. Un. Mat. Ital. I **4**, 7—10 (1925)).

3. (Zu § 6.) Man kann die in § 6 angegebene Definition der Tangente im Punkt P einer (stetig differenzierbaren) Kurve C verallgemeinern und für ein nur als stetig vorausgesetztes C die Gesamtheit der Limites von konvergenten Folgen $\{S_\nu\}$ von Sekanten $S_\nu = P_\nu Q_\nu$ von C mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} Q_\nu = P$ betrachten (= „Paratingente" von C in P von G. Bouligand). Es läßt sich zeigen: Ist die Paratingente von C in jedem Punkt P von C eine Gerade, so hängt dieselbe vom Kurvenpunkt P stetig ab (Haupt-Aumann: Differential- und Integralrechnung II, Berlin: de Gruyter 1938, S. 64).

4. (Zu § 6.) Verschiedene Definitionen von „Schmiegebene" bei stetigen Raumkurven mit Tangente in jedem Punkt werden gegeneinander abgewogen bei Kawaguchi: On various definitions of the osculating plane of the space curve. Tohoku Math. J. **26**, 35—53 (1926). Allgemeineres, insbesondere zur analytischen Definition von Schmiegfiguren findet sich bei G. Bol: Zur Definition von Schmiegfiguren in der Differentialgeometrie. Arch. Math. **1**, 262—270 (1948).

5. (Zu § 7.) Jede viermal stetig differenzierbare Raumkurve mit $\frac{1}{\varrho} > 0$, $\frac{1}{\tau} \neq 0$ ist durch ihr (beliebig vorgebbares) Tangentenbild T: $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(s_1)$ und ihre (beliebig vorgebbare) Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}(s_1) > 0$ bzw. durch ihr (beliebig vorgebbares) Binormalenbild B: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(s_3)$ mit $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'') \neq 0$ und ihre (beliebig vorggebbare) Windung $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau}(s_3)$ bzw. durch ihr (beliebig vorgebbares) Hauptnormalenbild H: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(s_2)$ und ihre (beliebig vorgebbare) „Lancretsche" Krümmung $\sqrt[+]{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \sqrt[+]{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}}(s_2) > 0$ eindeutig bestimmt und aus diesen Größen durch Quadraturen darstellbar. Hierbei sind mit s_1 bzw. s_2 bzw. s_3 die Bogenlängenparameter von T bzw. H bzw. B bezeichnet. (Vgl. K. Strubecker: Differentialgeometrie I, 2. Aufl. Sammlg. Göschen 1964 S. 162 und die Aufgaben 4. und 5. zu Kap. 1!).

6. (Zu § 9.) S. Bilinski gibt mittels der Rekursionsformeln $\varkappa_{i+1} = \sqrt[+]{(\varkappa_i)^2 + (\tau_i)^2}$, $\tau_{i+1} = \frac{\varkappa_i \tau_i' - \varkappa_i' \tau_i}{(\varkappa_i)^2 + (\tau_i)^2}$, $\mathfrak{t}_{i+1} = \mathfrak{b}_i \times \mathfrak{t}_i$, $\mathfrak{b}_{i+1} = \frac{\tau_i \mathfrak{t}_i + \varkappa_i \mathfrak{b}_i}{\sqrt[+]{(\varkappa_i)^2 + (\tau_i)^2}}$ $(i = 1, 2, \ldots; \varkappa_1 = \frac{1}{\varrho}$, $\tau_1 = \frac{1}{\tau}$, $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b})$ für eine hinreichend oft stetig differenzierbare Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ (s = Bogenlängenparameter!) abgeleitete i-te „Frenetsche Dreibeine" $\{\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i+1}, \mathfrak{b}_i\}$ an und findet gewisse „Isomorphieeigenschaften" der Kurventheorie, wenn die in den Frenetschen Ableitungsgleichungen vorkommenden Größen $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\tau}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ durch $\varkappa_i$, τ_i, $\mathfrak{t}_i$, $\mathfrak{t}_{i+1}$, $\mathfrak{b}_i$ ersetzt werden (Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II **10**, 175—180 (1955)).

7. (Zu § 9.) Einer zweimal stetig differenzierbaren Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit $\frac{1}{\varrho} \geq 0$ sei ein stetig differenzierbarer Einheitsvektor $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}(s)$ mit $\mathfrak{e}\mathfrak{t} = 0$ und mit $\mathfrak{e}' = \alpha(\mathfrak{e} \times \mathfrak{t})$ zugeordnet. Dann gilt: Die Kurve besitzt eine eindeutig bestimmte Windung und die Frenetschen Ableitungsgleichungen bleiben erfüllt, obwohl die

Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{b}$ nicht eindeutig bestimmt sind (Wintner, A.: On Frenets equations. Am. J. of Math. **78**, 349–356 (1956)).

8. (Zu § 12.) Einen vom Herglotzschen Beweis des Vierscheitelsatzes ganz verschiedenen Beweis desselben nach einer Methode von E. Schmidt wird in Kap. 2, § 31 angegeben werden. Man kann den Vierscheitelsatz aber auch aus einem Satz über stationäre Schmiegebenen einer Raumkurve herleiten, vgl. Barner, M.: Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven. Abh. Math. Sem. Hamb. **19**, 196–215 (1955). Allgemeiner zeigt Barner: Eine ($(2m+1)$-mal stetig differenzierbare) geschlossene, „konvexe" Kurve im euklidischen Raum E_{2m} von $2m$ Dimensionen besitzt mindestens $2m+2$ Scheitel. Dabei heißt eine Kurve C konvex, wenn durch je $2m$ Punkte der Kurve eine Hyperebene oder Hypersphäre geht, die keine weiteren Punkte mit C gemein hat; und ein Scheitel ist ein Punkt, für den die Schmieghyperkugel stationär ist. Der Satz läßt sich in dieser Form nicht auf geschlossene Kurven in einem euklidischen Raum ungerader Dimension übertragen. In diesem Zusammenhang sei bemerkt, daß es im dreidimensionalen Raum geschlossene (viermal stetig differenzierbare) Kurven gibt, die nur zwei Scheitel besitzen in dem Sinne, daß die Krümmung einen stationären Wert annimmt. Vgl. dazu das folgende Beispiel von H. Gericke (Jahresber. DMV **47**, 22–24 (1937)): Die auf einem Torus liegende Kurve

$x_1 = (a - \sin\frac{\varphi}{2})\cos\varphi$, $x_2 = (a - \sin\frac{\varphi}{2})\sin\varphi$, $x_3 = \cos\frac{\varphi}{2}$ $(0 \leqq \varphi \leqq 4\pi)$ hat für hinreichend großes $a > 1$ nur an den beiden Stellen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 3\pi$ einen Scheitel. Schließlich wollen wir erwähnen: Jede einfach geschlossene, ebene (dreimal stetig differenzierbare) Kurve, die von einem Kreis $2n$-mal geschnitten wird, enthält mindestens $2n$ Scheitel (S. B. Jackson: Vertices for plane curves. Bull. Am. Math. Soc. **50**, 564–578 (1944)).

9. (Zu § 12.) Blaschke, Rothe und Weitzenböck stellten die Frage, ob es ebene konvexe Kurven mit zwei „Speichenpunkten" d.h. Punkten gibt, für welche alle durch diese Punkte gehenden Sehnen der Kurve (Speichen) gleiche Länge haben (Aufgabe 552. Arch. Math. Phys. **27**, 82 (1917)). Dieses Problem ist bis heute ungelöst, H. Kneser und E. Wirsing konnten aber zeigen: Wenn es eine (einfach) geschlossene, stetige, ebene „Doppelspeichenkurve" gibt, dann ist dieselbe notwendig analytisch (Wirsing, E.: Zur Analytizität der Doppelspeichenkurven. Arch. Math. **9**, 300–307 (1958)).

10. (Zu § 20.) R. Bereis bestimmt konstruktiv die Grundrisse aller Böschungslinien auf Drehquadriken mit vertikaler Achse (Mh. Math. Phys. **56**, 344–351 (1952)). Sie sind (in gewissem erweiterten Sinne) sämtlich Zykloiden.

11. (Zu § 22.) M. Pinl gibt eine integrallose Darstellung für isotrope Kurven im n-dimensionalen euklidischen Raum an (Mh. Math. Phys. **44**, 1–12 (1936)).

12. G. Grüss untersucht die Tangentenfläche F einer analytischen Raumkurve C: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mit $\frac{1}{\tau} > 0$ in der Umgebung eines singulären Punktes $s = s_0$ mit $\mathfrak{x}''(s_0) = \cdots = \mathfrak{x}^{(n-1)}(s_0) = 0$, $\mathfrak{x}^{(n)}(s_0) \neq 0$. Es zeigt sich ein unterschiedliches Verhalten im Falle n gerade („Flachpunkt" – F hat zwei Blätter, die an C „zusammenstoßen") und n ungerade („Wendepunkt" – F hat vier Blätter, die längs C und längs der Tangente von C in s_0 zusammenstoßen) (J. reine u. angew. Math. **184**, 65–76 (1943)).

2. Kapitel

Extreme bei Kurven

§ 25. Die erste Variation der Bogenlänge

Wir wollen jetzt weitere Fragen der Kurventheorie behandeln, indem wir die Methoden der Variationsrechnung heranziehen. Diese Methoden werden für spätere Entwicklungen wichtig werden. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine ebene oder räumliche Kurve mit denselben Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wie in Kapitel 1. Wir leiten daraus eine zweite Kurve $\bar{\mathfrak{x}}$ her durch den Ansatz:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + u\mathfrak{t} + v\mathfrak{h} + w\mathfrak{b} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins von $\mathfrak{x}$ und u, v, w stetig differenzierbare Funktionen von s bedeuten, die noch einen Parameter ε enthalten:

$$u = \varepsilon\bar{u}(s), \quad v = \varepsilon\bar{v}(s), \quad w = \varepsilon\bar{w}(s), \tag{2}$$
$$\mathfrak{y} = \varepsilon\bar{\mathfrak{y}}(s).$$

Rückt $\varepsilon \to 0$, so rückt die Nachbarkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ gegen $\mathfrak{x}$. Wir wollen die Länge der Nachbarkurve

$$\bar{s} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\bar{\mathfrak{x}}'^2}\, ds \tag{3}$$

mittels der Taylorschen Formel nach Potenzen von ε entwickeln. Diese Entwicklung wird die Form haben

$$\bar{s} = s + \delta s + \cdots, \tag{4}$$

wenn mit δs das in ε lineare Glied bezeichnet wird:

$$\delta s = \varepsilon \frac{d\bar{s}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{5}$$

Man nennt δs die *„erste Variation"* der Bogenlänge. Dieses δs soll zunächst berechnet werden.

Zur Abkürzung für Krümmung und Windung von $\mathfrak{x}$ führen wir die Bezeichnungen ein

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho}, \quad \sigma = \frac{1}{\tau}, \tag{6}$$

wodurch die Frenet-Formeln (§ 9) die Gestalt annehmen

$$\mathfrak{t}' = \varkappa\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{h}' = -\varkappa\mathfrak{t} + \sigma\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b}' = -\sigma\mathfrak{h}. \tag{7}$$

Aus (1), (2) und (7) folgt:

$$\bar{\mathfrak{y}}' = \varepsilon\bar{\mathfrak{y}}' = (u' - \varkappa v)\,\mathfrak{t} + (v' + \varkappa u - \sigma w)\,\mathfrak{h} + (w' + \sigma v)\,\mathfrak{b}. \tag{7a}$$

Aus (1) folgt nun durch Ableitung nach der Bogenlänge s von $\mathfrak{x}$

$$\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{x}' + \mathfrak{y}'. \tag{8}$$

Daraus ist das innere Quadrat

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = \mathfrak{x}'^2 + 2\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}'^2. \tag{9}$$

Weiter folgt

$$\left.\frac{d\bar{s}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \sqrt{\bar{\mathfrak{x}}'^2}\,\Big|_{\varepsilon=0} ds \tag{10}$$

und mittels (9), (2), (7a) und $\mathfrak{x}' = \mathfrak{t}$:

$$\left.\frac{d\bar{s}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{x}'\bar{\mathfrak{y}}'\,ds = [\bar{u}]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \varkappa\bar{v}\,ds. \tag{11}$$

Somit ist endlich

$$\boxed{\delta s = [u]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \varkappa v\,ds}. \tag{12}$$

Hieraus kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen. Da in δs zwar $\bar{u}, \bar{v}$, aber nicht $\bar{w}$ vorkommt, so sieht man, daß *bei beliebiger unendlich kleiner Verrückung der Kurve in Richtung der Binormalen die Bogenlänge stationär bleibt.* Ferner: haben $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ die Randpunkte gemein (also $u(s_1) = u(s_2) = 0$), so wird

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa v\,ds. \tag{13}$$

$v = \varepsilon\bar{v} = \varepsilon \left.\frac{dv}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \delta v$ sind die auf der Hauptnormalen von $\mathfrak{x}$ abgetragenen Komponenten von $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \delta\mathfrak{x}$. Wir wollen für δv auch δn schreiben, also

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa \cdot \delta n \cdot ds. \tag{14}$$

Diese Formel werden wir später verwerten.

§ 26. Variationsprobleme von J. Radon

Jetzt soll ermittelt werden, wie sich die Krümmung $\varkappa$ beim Übergang von der (als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzten) Kurve $\mathfrak{x}$ zur (zweimal stetig differenzierbaren) Nachbarkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ ändert.

Aus $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon\bar{\mathfrak{y}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}' &= \mathfrak{t} + \varepsilon\bar{\mathfrak{y}}', \\ \bar{\mathfrak{x}}'' &= \varkappa\mathfrak{y} + \varepsilon\bar{\mathfrak{y}}''. \end{aligned} \tag{15}$$

Nach § 10 (80) ist die Krümmung $\bar{\varkappa} = 1 : \bar{\varrho}$ von $\bar{\mathfrak{x}}$

$$\bar{\varkappa} = \frac{\sqrt[+]{\bar{\mathfrak{x}}'^2\bar{\mathfrak{x}}''^2 - (\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'')^2}}{(\sqrt[+]{\bar{\mathfrak{x}}'^2})^3}.$$

Nach (15) beginnt die Taylorentwicklung von $(\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'')^2$ mit Gliedern in ε^2. Läßt man die in ε quadratischen Glieder und die Glieder mit höheren Potenzen von ε weg, so wird also

$$\bar{\varkappa} = \frac{\sqrt[+]{\bar{\mathfrak{x}}''^2}}{\bar{\mathfrak{x}}'^2} + \cdots. \tag{16}$$

Somit hat man nach (15)

$$\bar{\varkappa} = \varkappa + \varepsilon[(\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}'') - 2\varkappa(\mathfrak{t}\bar{\mathfrak{y}}')] + \cdots.$$

Es gilt also für die Variation

$$\delta\varkappa = \varepsilon \cdot \frac{d\bar{\varkappa}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}:$$

$$\delta\varkappa = \varepsilon[(\mathfrak{y}\bar{\mathfrak{y}}'') - 2\varkappa(\mathfrak{t}\bar{\mathfrak{y}}')]^{((1))}. \tag{17}$$

Nach (2), (7a) und der sich mittels (7a) leicht ergebenden Linearkombination von $\bar{\mathfrak{y}}''$ aus den Grundvektoren erhält man daraus:

$$\delta\varkappa = \varkappa^2 v - \varkappa u' + \frac{d}{ds}(v' + \varkappa u - \sigma w) - (w' + \sigma v)\,\sigma. \tag{18}$$

Es sei nun nach J. Radon ein „Variationsproblem" von folgender Art vorgelegt: Man soll zwei gegebene Punkte des Raumes durch eine Kurve $\mathfrak{x}$ miteinander verbinden, längs derer das Integral

$$J = \int \varphi(\varkappa) \cdot ds \tag{19}$$

einen extremen Wert bekommt. Dabei sei φ eine dreimal stetig differenzierbare vorgegebene Funktion mit $\varphi' \neq 0$. Gehen wir dann zu einer Nachbarkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ mit denselben Randpunkten über, so muß jedenfalls die „erste Variation" von J, das ist wieder das in ε lineare Glied der Taylorentwicklung von J nach Potenzen von ε, verschwinden.

((1)) Vgl. zu dieser Formel auch die Arbeit von Hamel, G.: Sitzgsber. Berl. Math. Ges. **16**, 5 (1917).

Wir wollen der Einfachheit halber die Variation (1) so vornehmen, daß $u = 0$ ist. Wir gehen also von den einzelnen Punkten der ursprünglichen Kurve zu den entsprechenden Punkten der variierten Kurve immer durch Antragen von solchen Vektoren $\mathfrak{y}$ über, die zur Kurventangente senkrecht sind. Diese Einschränkung ist offenbar deshalb ganz unwesentlich, weil man, wenigstens wenn die Enden unserer Kurve festbleiben, zu jeder variierten Kurve durch eine solche „zur Kurve senkrechte" Variation gelangen kann. Wegen (9) haben wir jetzt $\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)_{\varepsilon=0} = -\varkappa\bar{v}$. Es wird

$$\bar{J} = \int \varphi(\bar{\varkappa})\, d\bar{s} = \int \varphi(\bar{\varkappa}) \frac{d\bar{s}}{ds}\, ds. \tag{20}$$

Also ist

$$\delta J = \varepsilon \frac{d\bar{J}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int \varphi'\, \delta\varkappa\, ds - \int \varphi\varkappa v\, ds. \tag{21}$$

Für $\delta\varkappa$ setze man aus (18) mit $u = 0$ den Wert ein und forme den Ausdruck durch partielle Integration um unter Beachtung der festen Randpunkte. Dabei wollen wir annehmen, daß am Rand nicht nur v und w, sondern auch noch v' verschwinden soll. So erhält man

$$\delta J = \int \left[\left\{ (\varkappa^2 - \sigma^2)\, \varphi' + \frac{d^2\varphi'}{ds^2} - \varkappa\varphi \right\} v + \left\{ \sigma \frac{d\varphi'}{ds} + \frac{d}{ds}(\sigma\varphi') \right\} w \right] ds. \tag{22}$$

Soll nun δJ bei beliebiger Wahl der Verrückungen $v(s), w(s)$, die nur verschwindende Randwerte und am Rand verschwindendes v' zu haben brauchen, gleich Null sein, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(\varkappa^2 - \sigma^2)\, \varphi' + \frac{d^2\varphi'}{ds^2} - \varkappa\varphi = 0, \tag{23}$$

$$\sigma \frac{d\varphi'}{ds} + \frac{d}{ds}(\sigma\varphi') = 0. \tag{24}$$

Wäre nämlich einer der beiden Ausdrücke auf der linken Seite von (23, 24) an einer Stelle s_0 im Innern des Integrationsintervalls von Null verschieden, so würde dies aus Stetigkeitsgründen auch in einer Umgebung

$$s_0 - \delta < s < s_0 + \delta \quad (\delta > 0)$$

gelten. Wählt man dann v bzw. w so, daß diese Funktion in der erwähnten Umgebung überall $\neq 0$ ist und sonst verschwindet und daß die andere Funktion identisch verschwindet, so ergibt sich $\delta J \neq 0$, d. h. ein Widerspruch. Die Differentialgleichung (24), die für ebene Kurven ($\sigma = 0$) von selbst erfüllt ist, läßt sich integrieren. Es ist

$$2\sigma \frac{d\varphi'}{ds} + \varphi' \frac{d\sigma}{ds} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d\varphi'}{\varphi'} = 0,$$

$$\sigma = \frac{c}{\varphi'^2}. \tag{26}$$

Damit ist die Windung der „Extremalen" unseres Variationsproblems bestimmt. Als Extremalen bezeichnet man die Kurven, für die $\delta J = 0$ ist, für die also die Differentialgleichungen (23, 24) gelten.

§ 27. Bestimmung der Extremalen unserer Variationsprobleme

Radon hat bemerkt, daß man die gefundenen Differentialgleichungen zusammen mit $\frac{d}{ds}\varphi = \varphi' \frac{d\varkappa}{ds}$ so schreiben kann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\varkappa\varphi' - \varphi) &= +\varkappa \frac{d\varphi'}{ds}, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right) &= -\varkappa(\varkappa\varphi' - \varphi) + \sigma\frac{c}{\varphi'}, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{c}{\varphi'}\right) &= -\sigma\frac{d\varphi'}{ds}. \end{aligned} \tag{27}$$

Diese drei linearen, homogenen Differentialgleichungen haben wie die Frenet-Formeln (§ 16) eine schiefsymmetrische Matrix. Also gilt

$$\frac{d}{ds}\left\{(\varkappa\varphi' - \varphi)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\} = 0$$

und

$$(\varkappa\varphi' - \varphi)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2 = a^2. \tag{28}$$

Hier kann man $\varkappa$ als unabhängige Veränderliche nehmen und im Fall $\varphi'' \neq 0$ $ds : d\varkappa$ als Funktion von $\varkappa$ berechnen. [Im Fall $\varphi'' = 0$ folgt wegen (23, 26) entweder $\varphi(\varkappa) = A\varkappa$ ($A = \text{const} \neq 0$) und $\sigma = 0$, was wir im folgenden ausdrücklich ausschließen, oder $\varphi(\varkappa) = A\varkappa + B$ ($A = \text{const} \neq 0$, $B = \text{const} \neq 0$) und $\varkappa = -\frac{c^2}{A^3 B}$, $\sigma = \frac{c}{A^2}$!]. Somit ist die Differentialgleichung (28) im allgemeinen durch eine einzige Integration („Quadratur") lösbar, also auch umgekehrt $\varkappa$ als Funktion von s zu bestimmen. Da nach (26) σ als Funktion von s bekannt ist, so sind damit die natürlichen Gleichungen der Extremalen ermittelt.

Aber noch mehr: Die Formeln (27) haben nicht nur die schiefsymmetrische Gestalt der Frenet-Formeln, sie sind sogar, wenn man für $\varkappa$, σ wieder $1 : \varrho$, $1 : \tau$ schreibt, mit den Frenet-Formeln identisch. Deshalb und wegen (28) mit der (wegen unseres ausgeschlossenen Falles) mit Ausnahme des Falles $\varkappa = \text{const} = \varkappa_0$, $\sigma = 0$, $\varphi(\varkappa_0) = \varkappa_0 \cdot \varphi'(\varkappa_0)$ von Null verschiedenen Konstanten a kann man das Achsenkreuz so wählen, daß für die dritten Komponenten t_3, h_3, b_3 der Vektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ des begleitenden Dreibeins

$$t_3 = \frac{\varkappa\varphi' - \varphi}{a}, \quad h_3 = \frac{1}{a} \cdot \frac{d\varphi'}{ds}, \quad b_3 = \frac{c}{a}\frac{1}{\varphi'} \tag{29}$$

wird. Daraus ergibt sich dann

$$\frac{dx_3}{ds} = \frac{\varkappa\varphi' - \varphi}{a}. \tag{30}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2. \tag{31}$$

Nach (30) und (28) kann man dafür auch schreiben:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}. \tag{32}$$

Aus

$$\mathfrak{t} \times \mathfrak{h} = \mathfrak{b}$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} \times \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} = \varkappa\mathfrak{b}$$

folgt nach (29)

$$\frac{dx_1}{ds} \cdot \frac{d^2x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds} \cdot \frac{d^2x_1}{ds^2} = \varkappa b_3 = \frac{c}{a}\,\frac{\varkappa}{\varphi'}.$$

Nach (32) ist daraus

$$\frac{\dfrac{dx_1}{ds} \cdot \dfrac{d^2x_2}{ds^2} - \dfrac{dx_2}{ds} \cdot \dfrac{d^2x_1}{ds^2}}{\left(\dfrac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_2}{ds}\right)^2} = ac \cdot \frac{\varkappa}{\varphi'\left\{\left(\dfrac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}}$$

und durch Integration

$$\arctan\left\{\frac{dx_2}{ds} : \frac{dx_1}{ds}\right\} = ac\int \frac{\varkappa\, ds}{\varphi'\left\{\left(\dfrac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}}. \tag{33}$$

Jetzt sind die Ableitungen von x_1, x_2 und x_3 nach s aus den Gleichungen (32), (33) und (30) zu ermitteln und daraus diese Funktion selbst durch Integration.

Damit ist das Ergebnis von Radon gefunden:

Die Extremalen der Variationsprobleme

$$\delta \int \varphi(\varkappa) \cdot ds = 0 \tag{34}$$

sind im allgemeinen durch Quadraturen auffindbar.

Betrachten wir den besonderen Fall

$$\varphi(\varkappa) = \sqrt{\varkappa}, \tag{35}$$

so wird nach (26)

$$\sigma = 4c\varkappa. \tag{36}$$

Das heißt nach § 18: die Extremalen sind Böschungslinien. Umgekehrt folgt aus (26), daß das Variationsproblem (35) unter denen von der Gestalt (34) im wesentlichen das einzige ist, dessen Extremalen Böschungslinien sind.

Aus (28) erhält man im Fall (35) für $\varkappa$ nach geeigneter Wahl des Kurvenpunktes $s = 0$

$$\varkappa = \frac{1}{4a^2 s^2 + \frac{1 + 16c^2}{4a^2}}. \tag{37}$$

Die Tangenten der Böschungslinien schließen nach § 18 mit einer festen Richtung e einen festen Winkel ϑ ein, und zwar ist nach (36) und nach § 18 (132)

$$4c = \cot \vartheta. \tag{38}$$

Für die Bogenlänge $\bar{s}$ und die Krümmung $\bar{\varkappa}$ des Grundrisses unserer Böschungslinie auf eine zu e senkrechte Ebene haben wir nach § 8 (139), (141)

$$\bar{s} = \pm s \sin \vartheta, \quad \varkappa = \bar{\varkappa} \sin^2 \vartheta.$$

Somit ergibt sich für diesen Grundriß die natürliche Gleichung

$$\bar{\varkappa} = \frac{1}{4a^2 \bar{s}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \frac{1 + 16c^2}{4a^2}} = \frac{1}{4a^2 \bar{s}^2 + \frac{1}{4a^2}}. \tag{39}$$

Diese Kurven bezeichnet man als „*Kettenlinien*".

§ 28. Die Isoperimetrie des Kreises

Unter allen einfach geschlossenen Kurven desselben Umfangs in der Ebene soll die ermittelt werden, die den größten Flächeninhalt umschließt. Das ist die klassische „*isoperimetrische*" Aufgabe. Beim Übergang von einer (als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzten) geschlossenen Kurve mit der Krümmung k zu den benachbarten Kurven findet man für die Änderung des Umfangs L wegen der Periodizität der Verrückung u nach (12)

$$\delta L = -\oint k v \, ds. \tag{40}$$

Die Variation des Flächeninhalts $\delta F = \varepsilon \frac{dF}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ berechnet sich nach (1) und (2) wegen

$$\begin{aligned} \bar{F}\mathfrak{e} &= \tfrac{1}{2} \oint (\bar{\mathfrak{x}} \times \bar{\mathfrak{x}}') \, ds = F\mathfrak{e} + \tfrac{1}{2} \oint (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}') \, ds + \tfrac{1}{2} \oint (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}') \, ds + \cdots \\ &= F\mathfrak{e} + \oint (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}') \, ds + \cdots \text{ (partielle Integration!)} \\ &= (F - \oint v \, ds + \cdots) \, \mathfrak{e} \end{aligned}$$

(vgl. § 12!) zu

$$\delta F = -\oint v\, ds, \tag{41}$$

vorausgesetzt, daß man über das Vorzeichen von F geeignete Festsetzungen trifft. Soll nun die einfach geschlossene Kurve, längs der integriert wird, unsere Aufgabe lösen, so muß für jede durch Streckung im Verhältnis $L : \bar{L}$ zur Kurve $\mathfrak{x}$ umfangsgleich gemachte Nachbarkurve $\mathfrak{x}^* = \frac{L}{\bar{L}}\bar{\mathfrak{x}}$ gelten:

$$|F^*| = \left(\frac{L}{\bar{L}}\right)^2 \cdot |\bar{F}| \leqq |F|,$$

d.h. es muß speziell für jede (stetig differenzierbare) Funktion v mit der Periode L, für die $\delta L = 0$ ist, von selbst auch

$$\varepsilon \frac{dF^*}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -\frac{2F}{L}\delta L + \delta F = 0$$

sein. Dafür ist $k = \text{const}$ hinreichend.

Daß diese Bedingung auch notwendig ist, erkennt man etwa so. Hätte die Funktion k auf der Strecke $0 \leqq s < L$ an zwei Stellen s_1, s_2, zwei verschiedene Werte k_1, k_2, so könnte man die Funktion v in der in der Fig. 6 gezeichneten Art wählen, so daß wegen der Stetigkeit von k

$$\oint v\, ds \quad \text{nahezu} = d(h_1 + h_2),$$
$$\oint kv\, ds \quad \text{nahezu} = d(h_1 k_1 + h_2 k_2)$$

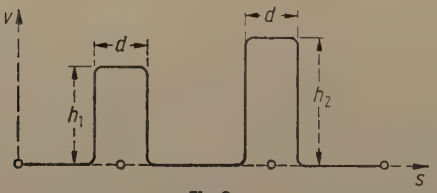


Fig. 6.

wird. Ist also $k_1 \neq k_2$, so kann man d, h_1, h_2 so wählen, daß $\delta L = 0$ und $\delta F \neq 0$ wird, entgegen der Voraussetzung.

Gibt es also unter allen einfach geschlossenen, stetig differenzierbaren Kurven der Ebene mit vorgegebenem Umfang eine zweimal stetig differenzierbare Kurve mit größtem Flächeninhalt, so muß für sie $k = \text{const} \neq 0$, d.h. die Kurve muß ein Kreis sein[1]. Hier bleibt also eine Existenzfrage offen. Ferner kann man den isoperimetrischen Satz noch in sehr

[1] Es ist nämlich der Krümmungsmittelpunkt in diesem Falle ein fester Punkt: $\frac{d}{ds}\left(x_1 - \frac{1}{k}x_2'\right) = 0$, $\frac{d}{ds}\left(x_2 + \frac{1}{k}x_1'\right) = 0$ nach § 12 (88).

verschiedenem Umfang beweisen, je nach den Voraussetzungen, die man über die zur Auswahl zugelassenen Kurven macht[1].

§ 29. Beweis von E. Schmidt[2]

Wenn die Kreislinie wirklich die isoperimetrische Eigenschaft hat, so kann man diese Tatsache folgendermaßen fassen. *Zwischen Flächeninhalt* $|F|$ *und Umfang* L *eines Kreises besteht die Beziehung*

$$L^2 - 4\pi |F| = 0 \tag{42a}$$

und für jede andere einfach geschlossene, ebene, stetig differenzierbare Kurve ist

$$L^2 - 4\pi |F| > 0. \tag{42b}$$

Für diesen Satz soll hier ein sehr einfacher Beweis angegeben werden, den man Erhard Schmidt verdankt: Zunächst berechnet sich der von der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = \{x_1(s), x_2(s)\}$ (s = Bogenlängenparameter!) mit dem Umfang L umschlossene (absolute) Flächeninhalt $|F|$ zu

$$\begin{aligned} |F| &= \left| \frac{1}{2} \oint (\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}') \, ds \right| = \left| \frac{1}{2} \oint (x_1 x_2' - x_2 x_1') \, ds \right| \\ &= \left| \int_0^L x_1 x_2' \, ds \right| \quad \text{(partielle Integration!)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Weiter seien s_1 bzw. s_2 diejenigen Parameterwerte, für die die stetige Funktion x_1 ihr Maximum bzw. ihr Minimum annimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hierbei $0 \leqq s_1 < s_2 < L$ und $x_1(s_1) + x_1(s_2) = 0$ vorausgesetzt werden, was sich durch eine eventuelle Änderung des Sinnes der Bogenlängenmessung und durch eine Parallelverschiebung der Kurve in x_1-Richtung immer erreichen läßt. Die Hauptidee des Beweises besteht nun darin, die gegebene Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ mittels gleicher x_1-Werte punktweise auf den Kreis $\mathfrak{x} = \hat{\mathfrak{x}}(s) = \{\hat{x}_1(s), \hat{x}_2(s)\}$ um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = x_1(s_1) = -x_2(s_2) > 0$ abzubilden und dann den durch ein Integral über den Parameter s ausgedrückten Flächeninhalt des Kreises $\hat{\mathfrak{x}}$ zu $|F|$ zu addieren. Wir setzen also dementsprechend

$$\hat{x}_1(s) = x_1(s) \text{ und } \hat{x}_2(s) = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x_1^2(s)} & \text{falls } s_1 \leqq s \leqq s_2 \\ -\sqrt{r^2 - x_1^2(s)} & \text{sonst} \end{cases}$$

---

[1] Unter recht allgemeinen Voraussetzungen findet man den Beweis in dem Büchlein des erstgenannten Verfassers „Kreis und Kugel" (Leipzig 1916) geführt. Sehr ausführliche Literaturangaben finden sich in der Monographie von Hadwiger, H.: „Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie" Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1957.

[2] Schmidt, E.: Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Z. **44**, 690–694 (1938).

und finden

$$\pi r^2 = -\int_{+r}^{-r} \overset{+}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}\, dx_1 - \int_{-r}^{+r} \overset{-}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}\, dx_1$$

(44)

$$= -\oint \hat{x}_2 \hat{x}_1'\, ds = \left| \int_0^L \hat{x}_2 \hat{x}_1'\, ds \right| \quad \text{(Substitutionsregel!)}.$$

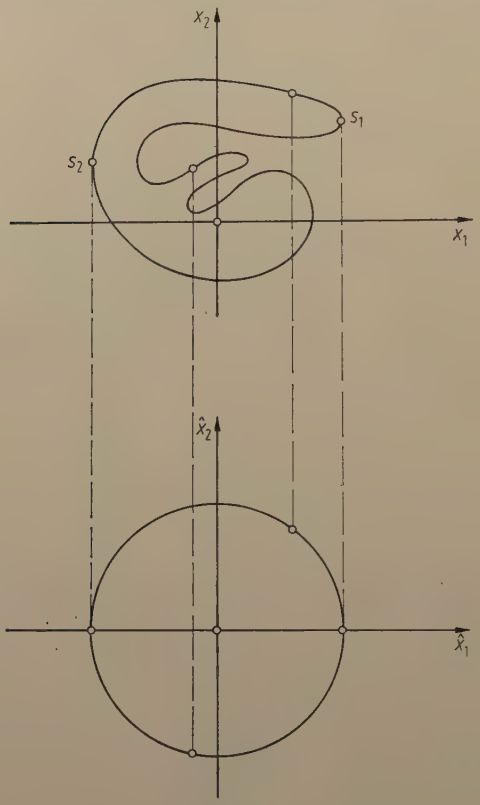


Fig. 7.

Durch Addition von (43) und (44) erhält man unter Benutzung der „Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel" zweier Zahlen $a, b > 0$:

$$\overset{+}{\sqrt{ab}} \leqq \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{(Gleichheit nur für } a = b\text{!)} \ ^1$$

[1] Diese Ungleichung folgt unmittelbar aus der Identität $ab + \frac{1}{4}(a - b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$.

sowie der „Schwarzschen Ungleichung" zweier Funktionenpaare f_1, f_2 und g_1, g_2:

$$(f_1 g_1 + f_2 g_2)^2 \leqq (f_1^2 + f_2^2)\,(g_1^2 + g_2^2)$$

(Gleichheit nur im Fall $f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0$!) [1]

die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2\sqrt[+]{|F| \cdot \pi r^2} &\leqq |F| + \pi r^2 = \left| \int_0^L x_1 x_2'\, ds \right| + \left| \int_0^L \hat{x}_2 \hat{x}_1'\, ds \right| \\ &\leqq \int_0^L \left(|x_1|\,|x_2'| + |\hat{x}_2|\,|\hat{x}_1'| \right) ds = \int_0^L \left(|\hat{x}_1|\,|x_2'| + |\hat{x}_2|\,|x_1'| \right) ds \\ &\leqq \int_0^L \sqrt[+]{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)\,(x_2'^2 + x_1'^2)}\, ds = rL, \end{aligned} \tag{45}$$

d.h. (nach Quadrierung!) in der Tat die behauptete „isoperimetrische Ungleichung" $L^2 - 4\pi |F| \geqq 0$ für $|F|$ und L. Die Gleichheit $L^2 - 4\pi |F| = 0$ kann hierbei nur dann eintreten, wenn bei allen Ungleichungen in (45) Gleichheit herrscht, d.h. wenn insbesondere $|F| = \pi r^2$ und $|\hat{x}_1|\,|x_1'| - |\hat{x}_2|\,|x_2'| = 0$, $|\hat{x}_1|\,|x_2'| + |\hat{x}_2|\,|x_1'| = \sqrt[+]{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)\,(x_2'^2 + x_1'^2)} = r$ ist. Hieraus folgt unmittelbar $|\hat{x}_1| = r\,|x_2'|$, $|\hat{x}_2| = r\,|x_1'|$ und damit speziell $x_1^2 = \hat{x}_1^2 = r^2 x_2'^2 = \frac{|F|}{\pi} x_2'^2$. Durch Vertauschung der Rollen von x_1 und x_2 findet man völlig analog $x_2^2 = \frac{|F|}{\pi} x_1'^2$. Addition ergibt nun

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{|F|}{\pi}\,(x_1'^2 + x_2'^2) = \frac{|F|}{\pi},$$

d.h. unsere Kurve stellt im Falle $L^2 - 4\pi |F| = 0$ einen Kreis dar. Damit sind die Behauptungen (42a) und (42b) auf „direktem Wege" vollständig bewiesen. Es sei noch vermerkt, daß sich in ihnen die über die Kurve gemachten Voraussetzungen noch stark abschwächen lassen, worauf an dieser Stelle nicht mehr weiter eingegangen werden soll.

§ 30. Ein Beweis von A. Hurwitz

Wir werden später den isoperimetrischen Satz unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen über die zulässigen Vergleichskurven anzuwenden haben. Wir wollen deshalb hier noch einen zweiten auf direktem Wege erfolgenden rechnerischen Beweis andeuten, der sich einiger Sätze über trigonometrische Reihen bedient, und der die erstrebte Allgemein-

[1] Diese Ungleichung folgt unmittelbar aus der Identität $(f_1 g_1 + f_2 g_2)^2 + (f_1 g_2 - f_2 g_1)^2 = (f_1^2 + f_2^2)\,(g_1^2 + g_2^2)$.

gültigkeit hat. Es sei

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s); \quad 0 \leqq s \leqq L$$

eine stetige, einfach geschlossene Kurve, von der wir nur noch anzunehmen brauchen, daß sie im Sinne von § 5 eine Bogenlänge s besitzt, d.h. daß sie *„rektifizierbar"* ist. Wir führen an Stelle von s den proportionalen Parameter u ein durch die Formel

$$u = \frac{2\pi}{L} s$$

und betrachten die Fourier-Reihen der mit der Periode 2π periodischen Funktionen x_1 bzw. x_2 von u:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku) \quad \text{bzw.}$$

(46)

$$\frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos ku + b'_k \sin ku).$$

Wenn die Kurve rektifizierbar ist, sind die Funktionen x_1, x_2 von „beschränkter Schwankung" und somit nach H. Lebesgue „fast überall" differenzierbar mit „summierbarer Ableitung". Die Fourier-Reihen der Ableitungen lauten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a'_k \cos ku - a_k \sin ku) \quad \text{bzw.}$$

(47)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b'_k \cos ku - b_k \sin ku).$$

Während die Reihen (46) wegen der Voraussetzungen über unsere Kurve stets konvergieren und die Funktionen x_1 bzw. x_2 darstellen, braucht dasselbe für die Reihen (47) und die Funktionen $\frac{dx_1}{du}$ bzw. $\frac{dx_2}{du}$ nicht mehr zuzutreffen.

Nun ist

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 1.$$

Daraus folgt für die Differentiation nach dem Parameter u

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

und für die nachfolgende (wegen der Beschränktheit von $\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2$ und $\left(\frac{dx_2}{du}\right)^2$ mögliche) Integration nach u im Sinne von Lebesgue

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2\right\} du = 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{48}$$

Ist nun

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos ku + \alpha'_k \sin ku)$$

die Fourier-Reihe einer Funktion f von u, deren Quadrat summierbar, d.h. im Sinne von Lebesgue integrierbar ist, so gilt die *„Vollständigkeitsbeziehung"* für das Fourier-Orthogonalsystem

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u)^2 \, du = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \alpha_k'^2). \tag{49}$$

Ein wenig allgemeiner: Für die Fourier-Reihen

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos ku + \alpha'_k \sin ku)$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \cos ku + \beta'_k \sin ku)$$

der „quadratisch summierbaren" Funktionen f bzw. g von u folgt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \, g(u) \, du = \frac{1}{2} \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \beta_k + \alpha'_k \beta'_k). \tag{50}$$

Somit ergibt sich aus (48), wenn man die Reihen (47) einsetzt, nach (49)

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + a_k'^2 + b_k^2 + b_k'^2) = 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{51}$$

Erklärt man andererseits den (mit einem Vorzeichen behafteten) Flächeninhalt unserer Kurve durch das Lebesguesche Integral

$$F = \int_{-\pi}^{+\pi} x_1 \frac{dx_2}{du} \, du \quad \text{(vgl. (43)!)}, \tag{52}$$

so erhält man durch Einsetzen der Reihen (46), (47) wegen (50)

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k b'_k - a'_k b_k) = F. \tag{53}$$

Aus den gefundenen Formeln (51), (53) folgt aber

$$\frac{L^2}{2\pi} \mp 2F = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{(k a_k \mp b'_k)^2 + (k a'_k \pm b_k)^2 + (k^2 - 1)(b_k^2 + b_k'^2)\}.$$

Darin ist aber offenbar die isoperimetrische Ungleichheit

$$L^2 - 4\pi |F| \geqq 0$$

enthalten. Man erkennt, daß das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn

$$a_1' \pm b_1 = 0, \quad a_1 \mp b_1' = 0,$$

$$a_k = a_k' = b_k = b_k' = 0; \quad k = 2, 3, \ldots$$

Dann haben die Entwicklungen von x_1 und x_2 die Form

$$x_1 = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\pm u) - b_1 \sin(\pm u),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos(\pm u) + a_1 \sin(\pm u)$$

und stellen einen Kreis dar. Damit ist ganz allgemein gezeigt:

Bei allen einfach geschlossenen, rektifizierbaren ebenen Kurven gilt zwischen Umfang L und dem durch (52) *erklärten Flächeninhalt F die Beziehung $L^2 - 4\pi |F| \geqq 0$. Es ist dann und nur dann $L^2 - 4\pi |F| = 0$, wenn die Kurve ein Kreis ist.*

Der vorgetragene Beweis stammt von A. Hurwitz aus dem Jahre 1902[1]. Wegen der benutzten Hilfsmittel aus der Theorie der trigonometrischen Reihen und reellen Funktionen vergleiche man ein neueres Lehrbuch über diesen Gegenstand[2].

§ 31. Sätze über Raumkurven mit vorgegebener Krümmung

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz Ia: *Ein ebener, zweimal stetig differenzierbarer Kurvenbogen bilde mit seiner Sehne die Begrenzung eines konvexen Bereiches. Dann wird bei jeder Verwindung, d.h. bei jeder Transformation der Kurve unter Erhaltung der Bogenlängen und Krümmungen die Sehne nicht kürzer.* Mit anderen Worten: Bezeichnet $\bar{l}$ die Länge der ebenen Kurve, $\bar{d}$ die Länge ihrer Sehne und $1 : \bar{\varrho}(s)$ die Krümmung als Funktion der vom Anfangspunkt gemessenen Bogenlänge und bezeichnen l, d und $1 : \varrho(s)$ die entsprechenden Größen für die transformierte Raumkurve, so folgt aus

$$l = \bar{l}, \quad \frac{1}{\varrho(s)} = \frac{1}{\bar{\varrho}(s)} \tag{53a}$$

die Gültigkeit der Ungleichung:

$$d \geqq \bar{d}. \tag{54}$$

Wir wollen gleich einen etwas allgemeineren Satz Ib beweisen, der den soeben ausgesprochenen als Spezialfall enthält. *Wir zeigen nämlich,*

---

[1] Hurwitz, A.: Quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'École Normale (3), **19**, 357–408, bes. 392–394 (1902).

[2] Etwa v. Mangoldt-Knopp: „Einführung in die Höhere Mathematik III, 12. Aufl. Stuttgart: Hirzel 1963, S. 230 u. S. 536 und Natanson: „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen", 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1961, S. 245.

daß schon aus den Annahmen

$$l = \bar{l}, \quad \frac{1}{\varrho(s)} \leqq \frac{1}{\bar{\varrho}(s)} \tag{55}$$

die Ungleichung (54) *folgt.*

Um die Aufmerksamkeit nicht abzulenken, setzen wir zunächst voraus, daß die Krümmung stetig und $\bar{d} > 0$ sei.

Sei $\bar{t}(s)$ bzw. $t(s)$ das Tangentenbild der ebenen Kurve $\bar{C}$ bzw. der Raumkurve C. Dann ist nach (33) $|\bar{t}'(s)| = 1 : \bar{\varrho}(s)$ bzw. $|t'(s)| = 1 : \varrho(s)$.

Wegen (55) ist mithin, wenn $\bar{t}$ und $\bar{t}_1$ zwei beliebige Lagen der von $\bar{t}$ auf der Einheitskugel beschriebenen Bahn bezeichnen und t und t_1 die entsprechenden Punkte der von t beschriebenen Bahn sind,

$$\text{Bogenlänge } \{t, t_1\} \leqq \text{Bogenlänge } \{\bar{t}, \bar{t}_1\}. \tag{56}$$

Es möge nun $[\bar{t}\bar{t}_1]$ den zwischen 0 und π liegenden Winkel zwischen den Richtungen bezeichnen, die den Punkten $\bar{t}$ und $\bar{t}_1$ entsprechen; in gleicher Weise erkläre man $[tt_1]$.

Da $\bar{C}$ eben und konvex ist, läuft $\bar{t}$ auf einem Großkreis in einem Sinne. Wenn also

$$\text{Bogenlänge } \{\bar{t}, \bar{t}_1\} \leqq \pi \tag{57}$$

ist, so ist

$$\text{Bogenlänge } \{\bar{t}, \bar{t}_1\} = [\bar{t}\,\bar{t}_1]. \tag{58}$$

Wegen der Eigenschaft der Großkreisbogen der Länge $\leqq \pi$, kürzeste Verbindungskurve ihrer Endpunkte zu sein (eine Folgerung aus der dem Kosinussatz folgenden Dreiecksungleichung der sphärischen Trigonometrie!), folgt ferner

$$[tt_1] \leqq \text{Bogenlänge } \{t, t_1\}. \tag{59}$$

Aus (56), (57), (58), (59) folgt also, daß unter der Voraussetzung (55)

$$0 \leqq [tt_1] \leqq [\bar{t}\bar{t}_1] \leqq \pi \tag{60}$$

gilt.

Es bezeichne nun $\bar{\mathfrak{x}}_1$ einen Punkt der ebenen Kurve $\bar{C}$, in welchem die Tangente der Sehne parallel ist. Der Durchlaufungssinn der Tangente in $\bar{\mathfrak{x}}_1$ stimmt dann mit der Richtung der vom Anfangspunkt zum Endpunkt gerichteten Sehne überein. Die dem Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_1$ auf der Raumkurve C und den Bahnen der Punkte $\bar{t}$ und t entsprechenden Punkte seien $\mathfrak{x}_1$, $\bar{t}_1$ und t_1. Wegen der Voraussetzung der Konvexität des von der ebenen Kurve $\bar{C}$ und ihrer Sehne begrenzten Bereiches ist bei dieser Wahl von

$\bar{\mathfrak{x}}_1$ für alle Punkte $\bar{\mathfrak{t}}$ die Voraussetzung (57) gesichert. Mithin gilt die Ungleichung (60).

Nun ist $\bar{d}$ gleich der Projektion von $\bar{C}$ auf die $\bar{\mathfrak{t}}_1$ entsprechende Richtung. Es ist also bei Berücksichtigung von $(55)_1$:

$$\bar{d} = \int_0^l \cos\,[\bar{\mathfrak{t}}\bar{\mathfrak{t}}_1]\,ds. \tag{61}$$

Ferner ist die Projektion von d auf die $\mathfrak{t}_1$ entsprechende Richtung gleich der Projektion von C auf diese Richtung. Da d nicht kleiner sein kann als eine Projektion von d, so ist mithin:

$$d \geqq \int_0^l \cos\,[\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1]\,ds. \tag{62}$$

Aus (60), (61), (62) folgt die zu beweisende Behauptung (54).

Ist $\bar{d} = 0$, d.h. fallen Anfangs- und Endpunkt des einen konvexen Bereich begrenzenden ebenen Kurvenbogens $\bar{C}$ — etwa im Punkte $\bar{\mathfrak{a}}$ — zusammen, so wähle man als Punkt $\bar{\mathfrak{x}}_1$ einen Punkt des Bogens, in welchem die Tangente einer Stützgeraden[1] in $\bar{\mathfrak{a}}$ parallel wird; im übrigen verläuft der Beweis unverändert.

Besteht die Kurve $\bar{C}$ etwa aus einer endlichen Anzahl von stetig gekrümmten Kurvenstücken, die miteinander Ecken bilden dürfen, so darf die Kurve C an den diesen Ecken entsprechenden Punkten ebenfalls Ecken aufweisen; doch darf der absolute Betrag des Richtungssprunges in den Ecken von C denjenigen des Richtungssprunges in den entsprechenden Ecken von $\bar{C}$ nicht überschreiten. Den Ecken entsprechen dann in den Bahnen von $\mathfrak{t}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ Lücken. Diese fülle man durch Großkreisbogen $< \pi$ aus. Sind dann $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\mathfrak{e}$ zwei einander entsprechende Ecken von $\bar{C}$ und C, so ist der $\bar{\mathfrak{e}}$ entsprechende Großkreisbogen jedenfalls nicht kürzer als der $\mathfrak{e}$ entsprechende. Man ordne die Großkreisbogen punktweise einander so zu, daß, wenn der eine mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, das auch für den anderen gilt. Nunmehr durchlaufen wieder $\bar{\mathfrak{t}}$ und $\mathfrak{t}$ stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurven dergestalt, daß die Ungleichung (56) bestehen bleibt. Wählt man nun als $\bar{\mathfrak{t}}_1$ den Richtungspunkt derjenigen Tangente oder Stützgeraden von $\bar{C}$, die mit der vom Anfangspunkt zum Endpunkt führenden Sehne $\bar{d}$ gleichgerichtet ist, so fällt $\bar{\mathfrak{t}}_1$ gewiß auf die ergänzte Bahn von $\bar{\mathfrak{t}}$, und der Beweis verläuft wie oben.

---

[1] Eine Gerade heißt „Stützgerade" eines konvexen Bereichs, wenn sie diesen trifft, ohne ihn zu durchsetzen.

Aus dem Beweise ergibt sich endlich unmittelbar, daß das Gleichheitszeichen in (54) nur gilt, wenn es in (59) und $(55)_2$ gilt, d.h. wenn C eben und mit $\bar{C}$ kongruent ist.

Aus unserem somit bewiesenen allgemeinen Satz Ib können wir unmittelbar einen neuen Beweis des Vierscheitelsatzes in § 12 gewinnen.

In der Tat: Sei C eine geschlossene, ebene, dreimal stetig differenzierbare Kurve, welche einen konvexen Bereich begrenzt. Wir machen die Annahme, die Ableitung der Krümmung $k = \frac{1}{\varrho}$ von C nach dem Bogenlängenparameter s besitze längs C nur zwei Zeichenwechsel, d.h. $\frac{1}{\varrho}$ ist zwischen den Stellen ihres minimalen und maximalen Wertes eine monoton wachsende bzw. fallende Funktion. Ordnet man dann jedem Punkt von C denjenigen Punkt als „Gegenpunkt" zu, der zusammen mit dem gegebenen Punkt den Umfang L von C halbiert, so existiert aus Stetigkeitsgründen ein spezielles derartiges Punktepaar $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ mit gleicher Krümmung $\frac{1}{\varrho}(s_1) = \frac{1}{\varrho}(s_1 + l)$ $\left(l = \frac{1}{2}L\right)$. Daraus folgt wegen der angegebenen Monotonieeigenschaft von $\frac{1}{\varrho}$:

$$(63) \qquad \frac{1}{\varrho}(s) \leqq \frac{1}{\varrho}(s_1) = \frac{1}{\varrho}(s_1 + l) \leqq \frac{1}{\varrho}(s + l) \quad (s_1 \leqq s \leqq s_1 + l).$$

Betrachtet man nun die beiden durch $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ begrenzten Teilbogen von C, so trifft auf sie wegen (63) die Voraussetzung (55) von Satz Ib zu, so daß für die Länge d der Sehne von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_2$ folgt: $d < d$. Dieser Widerspruch zeigt, daß die gemachte Annahme falsch war, und man schließt daraus wie in § 12 auf die Gültigkeit des Vierscheitelsatzes.

Weiter beweisen wir den Satz II:

Eine geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Raumkurve mit höchstens einer Ecke und einer die Schranke $1 : R$ *nirgends überschreitenden Krümmung hat mindestens den Umfang* $2\pi R$.

Wählt man nämlich im Falle des Vorhandenseins eines Eckpunktes diesen und sonst einen beliebigen Punkt als Anfangs- und Endpunkt des Raumkurvenbogens C, so ist $d = 0$. Wäre nun die Länge dieses Bogens kleiner als $2\pi R$, so wären beim Vergleich mit dem Bogen $\bar{C}$ gleicher Länge auf einem Kreis mit dem Radius R die Voraussetzungen des Satzes Ib erfüllt, während sich im Widerspruch zur Aussage dieses Satzes $d = 0 < \bar{d}$ ergäbe. Aber auch gleich $2\pi R$ kann die Länge von C nur dann sein, wenn die Kurve C ein Kreis mit dem Radius R ist. Denn bei Satz Ib gilt die Gleichheit $d = \bar{d}$ nur dann, wenn C und $\bar{C}$ kongruent sind.

Satz II ist (wenn man von der zugelassenen einen Ecke absieht) eine unmittelbare Folgerung von Satz III:

Die „Gesamtkrümmung“ $\oint \frac{1}{\varrho}(s)\,ds$ *einer geschlossenen, zweimal stetig differenzierbaren Raumkurve* C *ist nicht kleiner als* 2π. *Gleichheit herrscht hierbei dann und nur dann, wenn* C *eben ist und einen konvexen Bereich begrenzt.*

Die Gesamtkrümmung von C ist nach (33) nämlich nichts anderes als die Gesamtlänge L des Tangentenbildes T von C auf der Einheitskugel. Wir betrachten nun zwei Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ von C, deren auf T entsprechende Punkte t_1 und t_2 den Umfang L von T halbieren. Bilden speziell t_1 und t_2 ein Antipodenpaar der Einheitskugel, so folgt unmittelbar

$$\frac{L}{2} = \text{Bogenlänge}\,\{t_1, t_2\} \geqq [t_1\, t_2] = \pi \tag{64}$$

und damit der erste Teil unserer Behauptung.

Sind t_1 und t_2 aber nicht Gegenpunkte, so betrachte man den Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ des von t_1 und t_2 begrenzten Großkreisbogens der Länge $< \pi$. $\mathfrak{p}$ kann als „Pol“ des „Äquatorgroßkreises“ K aufgefaßt werden. Wir bemerken, daß das Tangentenbild T den Großkreis K durchsetzen und daher mit K mindestens einen Punkt t_3 gemein haben muß. Anderenfalls wäre nämlich für alle Punkte von C: $\mathfrak{p}\mathfrak{t}(s) \geqq 0$ mit $\mathfrak{p}\mathfrak{t}_1 > 0$, $\mathfrak{p}\mathfrak{t}_2 > 0$, was wegen $\oint \mathfrak{p}\mathfrak{t}(s)\,ds = \mathfrak{p} \oint \mathfrak{x}'(s)\,ds = 0$ unmöglich ist. Wir bezeichnen jetzt mit $\{t_1, t_2\}$ denjenigen Teilbogen von T mit den Endpunkten t_1 und t_2, welcher t_3 enthält. Außerdem sei t_2^* der Spiegelpunkt von t_2 an der durch K gehenden Ebene, d.h. (nach Konstruktion von K!) der Gegenpunkt von t_1. Damit erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \text{Bogenlänge}\,\{t_1, t_2\} = \text{Bogenlänge}\,\{t_1, t_3\} + \text{Bogenlänge}\,\{t_3, t_2\} \\ &\geqq [t_1 t_3] + [t_3 t_2] = [t_1 t_3] + [t_3 t_2^*] = \pi \end{aligned} \tag{65}$$

und damit wiederum den ersten Teil der Behauptung.

Aus dem bisherigen Beweise ergibt sich schließlich, daß bei (65) nie und bei (64) nur in dem Fall das Gleichheitszeichen stehen kann, wo T ein Großkreis ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn C eben ist und einen konvexen Bereich begrenzt, womit auch der zweite Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Satz II ist von H. A. Schwarz in den achtziger Jahren gefunden worden[1], den Satz Ia hat A. Schur 1921[2] bewiesen. Der Satz Ib sowie der hier gegebene Beweis wurde 1925 von E. Schmidt[3] angegeben. Satz III

[1] Die Kenntnis des Satzes verdankt der erstgenannte Verfasser einer Mitteilung von C. Caratheodory.

[2] Math. Ann. **83**, 143–148 (1921).

[3] Sitz.ber. Akad. Berlin 1925, S. 485–490.

stammt schließlich von W. Fenchel 1929[1] und der hier dafür aufgeführte Beweis von H. Liebmann[2].

§ 32. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 26.) Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine ebene, geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurve mit der Krümmung $\varkappa > 0$ und den (ebenfalls geschlossenen und zweimal stetig differenzierbaren) räumlichen Nachbarkurven $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s) = \mathfrak{x}(s) + \varepsilon\,\delta\mathfrak{x}(s)$ (s = Bogenlängenparameter der Kurve $\mathfrak{x}$!). Man beweise, daß die erste Variation $\delta\varkappa$ der Krümmung von $\mathfrak{x}$ den Integralformeln a) $\oint \delta\varkappa\, ds = 0$ und b) $\oint \delta\varkappa\, \mathfrak{x}\, ds = 0$ genügt, falls die erste Variation δs der Bogenlängen auf $\mathfrak{x}$ verschwindet.

2. (Zu § 26.) Es sei $\mathfrak{x}$ eine auf ihren natürlichen Parameter p bezogene isotrope Kurve (vgl. § 22) und $F = (\mathfrak{x}''')^2$ die (schon in Aufg. 16 erklärte) Differentialinvariante niedrigster Ordnung von $\mathfrak{x}$. Man beweise: a) Für die erste Variation $\delta\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}$ (unter Erhaltung der Eigenschaft des Isotropseins) gilt: $\delta\mathfrak{x} = g\mathfrak{x}' - h'\mathfrak{x}'' + h\mathfrak{x}'''$ mit $g = \varepsilon\bar{g}$, $h = \varepsilon\bar{h}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ = beliebige analytische Funktionen von p. b) Ebenso ist für die erste Variation δp von p bei festgehaltenen Endelementen der Kurve (bis einschließlich der ersten Differentiationsordnung): $\delta p = \frac{1}{4}\int_{p_0}^{p_1} F'h\, dp$.

3. (Zu § 26.) Man leite die der Formel (17) für die erste Variation der Krümmung entsprechende Formel für die erste Variation der Windung her:

$$\delta\sigma = \varepsilon\left\{(\varkappa\mathfrak{b} - \sigma\mathfrak{t})\,\bar{\mathfrak{y}}' + \left(\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{y}}'')\right)'\right\}.$$

4. (Zu § 30.) Man beweise: Für jede einfach geschlossene, stetige und rektifizierbare Raumkurve C (vgl. Bem. 1. von Kap. 1!) gilt als Verallgemeinerung der isoperimetrischen Ungleichung: $L^4 \geqq 16\pi^2((F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2)$, wenn F_1 bzw. F_2 bzw. F_3 die (mit einem Vorzeichen versehenen) Flächeninhalte der von der Orthogonalprojektion von C auf die (x_2, x_3)-Ebene bzw. die (x_3, x_1)-Ebene bzw. die (x_1, x_2)-Ebene begrenzten Bereiche sind (Fourierreihenentwicklung!).

5. (Zu § 31.) Es sei C: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine dreimal stetig differenzierbare geschlossene Raumkurve mit dem Binormalenbild B: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(s)$ und der Windung σ. Sei weiter r der sphärische Radius von einer kleinsten Kugelkappe K auf der Einheitskugel, welche B enthält. Man zeige: Für die „Totalwindung" $\oint |\sigma|\, ds$ von C gilt die Abschätzung:

$$\oint |\sigma|\, ds \geqq \begin{cases} 4r, \text{ falls } r \leqq \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\pi \text{ sonst.} \end{cases}$$

Gleichheit tritt hierbei genau dann ein, wenn B Großkreis oder ein Punkt ist.

[Anl.: Man benutze, daß der Rand von K das Binormalenbild B in drei Punkten mit Zentriwinkeln $2\alpha_i$ berührt, für welche $0 \leqq \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2}$ und $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \pi$ gilt.]

6. (Zu § 31.) Man zeige, daß alle stetig differenzierbaren und stückweise zweimal stetig differenzierbaren Raumkurven C mit einer Krümmung $\varkappa \leqq 1$, die von einem festen Punkt $\mathfrak{p}$ mit der festen Richtung α ausgehen und deren Länge nicht

---

[1] Math. Ann. **101**, 238—252 (1929).

[2] Sitz.ber. Akad. Berlin 1929, S. 392—393.

größer als $\pi/2$ ist, einen Körper erfüllen, der durch Umdrehung eines gewissen Flächenstücks um seine Symmetrieachse beschrieben wird. Das Flächenstück ist durch zwei Viertelkreisbogen mit dem Radius 1 und durch zwei Bogen von Evolventen dieser Viertelkreise begrenzt.

[Anl.: Es ist zweckmäßig, die Bogenlänge $\tilde{s}$ der Orthogonalprojektion $\tilde{C}$ einer derartigen Kurve C auf eine zu α senkrechte Ebene zu verwenden.]

b) Bemerkungen

1. (Zu § 30.) Eine Reihe weiterer Beweise der isoperimetrischen Ungleichung finden sich dargestellt in Blaschke, W., Reichardt, H.: Einführung in die Differentialgeometrie 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1960, S. 32—35. Wir erwähnen außerdem noch die Erweiterung der isoperimetrischen Ungleichung nach der anderen Seite durch Hurwitz: $0 \leqq \frac{L^2}{4\pi} - F \leqq \frac{1}{4} E$, wobei E der absolute Inhalt der Evolute der Kurve C darstellt (einen einfachen Beweis dafür lieferte A. Dinghas in Rev. math. Union Interbalkan **3**, 7 S. (1940)).

2. (Zu § 31.) Sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ eine stetig differenzierbare ebene Kurve. Wir sagen, daß diese Kurve eine „Durchschnittskrümmung" $\leqq \frac{1}{R}$ besitzt, wenn für jedes Paar s_1, s_2 von Parameterwerten $|\mathfrak{x}'(s_1) - \mathfrak{x}'(s_2)| : |s_1 - s_2| \leqq \frac{1}{R}$ gilt ($R = \text{const} > 0$). Falls die Kurve zweimal stetig differenzierbar ist, ist dies gleichbedeutend damit, daß die Krümmung $\varkappa$ der Kurve $\leqq \frac{1}{R}$ ist.

Seien nun P und Q zwei Punkte in der Ebene und sei in jedem dieser Punkte ein Einheitsvektor, nämlich $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gegeben. Gefragt ist nach einer kürzesten Kurve C der Durchschnittskrümmung $\leqq \frac{1}{R}$, die von P in Richtung $\mathfrak{u}$ ausgeht und in Q in Richtung $\mathfrak{v}$ einläuft. Die Antwort lautet: Es gibt immer eine Kurve C mit diesen Eigenschaften, und zwar ist sie von einem der folgenden Typen: a) Ein Kreisbogen vom Radius R, gefolgt von einem Geradenstück, gefolgt von einem Kreisbogen vom Radius R; b) eine Folge von drei Kreisbogen vom Radius R; c) ein Teilbogen von einer Kurve vom Typ a) oder b).

Besonders interessant ist — weil diese Kurven C im allgemeinen nicht zweimal differenzierbar sind — daß das vorgelegte Minimalproblem im allgemeinen keine Lösung besitzt, wenn man sich auf zweimal stetig differenzierbare Kurven beschränkt. Siehe hierzu L. Dubins: „On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents" Amer. J. **79**, 497—516 (1957).

3. (Zu § 31.) Der Satz III des § 31 von Fenchel gilt entsprechend auch für eine geschlossene Kurve des n-dimensionalen euklidischen Raums. Dieser Satz konnte von M. Fary („Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud", Bull. Soc. Math. France **77**, 128—138 (1949)) und J. Milnor („On the total Curvature of knots", Ann. of Math. **52**, 248—257 (1950)) dahingehend verschärft werden, daß eine „verknotete", d.h. nicht zu einer Kreislinie „isotope" einfach geschlossene Kurve eine Gesamtkrümmung besitzt, welche größer als 4π ist. Der letztgenannte Autor zeigte insbesondere, daß die untere Grenze der Gesamtkrümmung aller einfach geschlossenen Kurven aus einer „Isotopieklasse" gleich einem Vielfachen von 2π oder unendlich ist.

4. (Zu § 31.) Nach dem Beweis des Satzes von Fenchel muß das Tangentenbild T einer geschlossenen (zweimal stetig differenzierbaren) Raumkurve, welche nicht

eben ist, jeden Großkreis der Einheitskugel „durchsetzen". W. Fenchel zeigt, daß umgekehrt jede (stetig differenzierbare) Kurve auf der Einheitskugel mit dieser Eigenschaft Tangentenbild einer geschlossenen (zweimal stetig differenzierbaren) Raumkurve ist („geschlossene Raumkurven mit vorgeschriebenem Tangentenbild". Jahresb. DMV **39**, 183—185 (1930)). Ist dabei speziell der Schwerpunkt der gegebenen sphärischen Kurve der Koordinatenursprung, so ist dieselbe Tangentenbild einer nicht ebenen geschlossenen Kurve konstanter Krümmung. Letztere existieren daher; man kann explizite Beispiele von ihnen auf gewissen Zylinderflächen angeben (nach einer Mitteilung von K. Voss).

3. Kapitel

Streifen

§ 33. Das begleitende Dreibein eines Streifens

Die aus einem Punkte $\mathfrak{x}$ und einer hindurchgehenden Ebene ε bestehende geometrische Figur wollen wir als ein *Flächenelement* bezeichnen. Für die Anschauung ist es zweckmäßig, sich bei einem Flächenelement von der Ebene ε immer nur ein kleines Stück in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{x}$ vorzustellen. Zu der Ebene ε gehören zwei entgegengesetzt gerichtete, zu ihr senkrechte Einheitsvektoren, die Einheitsvektoren der *Normalen des Flächenelements*. Zeichnen wir einen der beiden Vektoren aus, so wird dadurch eine positive Seite des Flächenelements festgelegt, nämlich die Seite, nach welcher der Vektor hinzeigt. Das Flächenelement wird, wie wir sagen wollen, *gerichtet*. Durch Angabe des Punktes $\mathfrak{x}$ und des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ in ihm ist dann das gerichtete Flächenelement eindeutig festgelegt. Zu jedem regulären Punkt einer Fläche gehört ein Flächenelement, das durch den Flächenpunkt und die durch ihn hindurchgehende *Tangentialebene* (§ 41) der Fläche gebildet wird. Als Tangentialebene eines Flächenpunktes bezeichnen wir dabei die Ebene, die durch alle Tangenten an die von ihm auslaufenden Flächenkurven aufgespannt wird. Geben wir allgemein $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{n}$ als zweimal bzw. einmal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t, so erhalten wir eine Schar von gerichteten Flächenelementen. Diese werden sich aber im allgemeinen nicht in der Weise „glatt" aneinanderschließen, wie die Flächenelemente eines *Flächenstreifens*, die durch die Punkte einer auf einer Fläche gezogenen Kurve und die zugehörigen Tangentialebenen gebildet werden. Im allgemeinen, z. B. bei der Schar der auf einer festen Geraden senkrecht aufsitzenden Flächenelemente, reihen sie sich nicht glatt aneinander. Sollen sich die Flächenelemente $\{\mathfrak{x}(t), \mathfrak{n}(t)\}$ wie bei einem Flächenstreifen glatt zusammenschließen, so muß die Ebene des Flächenelements immer durch die Tangente der Kurve $\mathfrak{x}$ hindurchgehen, d. h. es muß der Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{x}}$ der Kurve auf dem Vektor $\mathfrak{n}$ senkrecht stehen:

$$\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{n} = 0. \tag{1}$$

Wir werden uns in diesem Kapitel mit der Theorie dieser glatten Flächenelementscharen, oder wie wir kürzer sagen wollen, „Streifen" beschäftigen, die uns vorbereiten soll auf die Fragen der allgemeinen Lehre von den Flächen, die wir im 4. Kapitel zu entwickeln beginnen werden. Wir werden unsere Betrachtungen wieder aufs Reelle beschränken.

Wählen wir jetzt noch als Parameter t des Streifens $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ die Bogenlänge s seiner Kurve $\mathfrak{x}$, so gilt nach § 5 (13) außer der eben angeführten Beziehung (1) noch

$$\mathfrak{x}'^2 = 1 \tag{2}$$

identisch in s[(1)]. Dazu müssen wir den Fall $\dot{\mathfrak{x}} = 0$ noch ausschließen. Wir führen jetzt zu $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{n}$ noch den dritten Einheitsvektor

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{x}' \tag{3}$$

ein, der in $\mathfrak{x}$ zur Kurventangente $\mathfrak{x}'$ senkrecht ist und in dem Flächenele. ment des Streifens enthalten ist. Nach (3) gilt dann für $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{f}$ die folgende Tabelle skalarer Produkte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}'^2 = \mathfrak{n}^2 = \mathfrak{f}^2 &= 1, \\ \mathfrak{x}'\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{x}' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (3) gilt dann noch

$$\mathfrak{f} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{x}' \times \mathfrak{f} = \mathfrak{n} \tag{5}$$

und ferner

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{f}, \mathfrak{n}) = 1. \tag{6}$$

Wir wollen jetzt für die Vektoren des unseren Streifen begleitenden Dreibeins die *Ableitungsgleichungen* aufstellen, indem wir die Ableitungen $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{f}'$ unserer Vektoren aus diesen selbst linear kombinieren. Wir gelangen dann zu Formeln, die den Frenetschen Formeln der Kurventheorie (§ 9) ganz entsprechen.

Wir erhalten Ableitungsgleichungen der folgenden Gestalt:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}'' &= \quad * \quad c\mathfrak{f} + b\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{f}' &= -c\mathfrak{x}' \quad * \quad + a\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{n}' &= -b\mathfrak{x}' - a\mathfrak{f} \quad * \quad , \end{aligned}} \qquad \begin{matrix} (7)_1 \\ (7)_2 \\ (7)_3 \end{matrix}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\mathfrak{f}\mathfrak{n}' = -a, \quad \mathfrak{x}'\mathfrak{n}' = -\mathfrak{n}\mathfrak{x}'' = -b, \quad \mathfrak{f}\mathfrak{x}'' = c. \tag{8}$$

---

(1) Diese Beschränkung in der Freiheit der Parameterwahl ist völlig unwesentlich.

In der Tat: Wenn wir etwa $\mathfrak{f}'$ linear kombiniert denken:

$$\mathfrak{f}' = \alpha\mathfrak{x}' + \beta\mathfrak{n} + \gamma\mathfrak{f} \tag{9}$$

und bedenken, daß aus (8) und (4) folgt:

$$\mathfrak{f}\mathfrak{f}' = 0, \quad \mathfrak{x}'\mathfrak{f}' = -\mathfrak{f}\mathfrak{x}'' = -c, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{f}' = -\mathfrak{n}'\mathfrak{f} = a, \tag{10}$$

so erhalten wir durch skalare Multiplikation von (9) mit $\mathfrak{f}$, daß $\gamma = 0$ sein muß, ebenso führt die Multiplikation mit $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{n}$ nach (10) auf $\alpha = -c$ und $\beta = a$, womit die zweite der Gleichungen (7) bewiesen ist. Entsprechend leitet man die anderen beiden Gleichungen ab. Ähnlich wie die in den Frenetschen Formeln § 9 (75) auftretenden Koeffizienten $1 : \varrho$, $1 : \tau$ *erweisen sich hier die Größen a, b und c als Invarianten des Streifens.*

Dabei handelt es sich immer um den mit einer positiven Flächenseite versehenen „gerichteten" Streifen. c ist genau genommen nur bis auf ein Vorzeichen eine Invariante, da der Parameter s nur bis auf ein Vorzeichen und eine Konstante festgelegt ist und c nach (8) im Gegensatz zu b und a bei der Substitution $s = -s^*$ sein Vorzeichen wechselt. Auch c läßt sich aber als absolute Invariante auffassen, wenn ein Durchlaufssinn für die positiv zu zählende Bogenlänge auf der Kurve des Streifens festgelegt wird. a und b hängen in den Funktionen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ des auf einen beliebigen Parameter bezogenen Streifens von Ableitungen erster Ordnung ab, c aber von solchen zweiter Ordnung.

Entsprechend dem Beweis des § 16 kann man auch hier zeigen, daß durch Angabe der beliebigen (stetigen) Funktionen a, b und c ein Streifen bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt ist.

§ 34. Geometrische Deutung der Invarianten eines Flächenstreifens

Nach § 7 (33) und Formel $(7)_1$ dieses Abschnitts gilt für die *Krümmung unserer Streifenkurve*

$$\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{x}''^2 = b^2 + c^2. \tag{11}$$

Die *Hauptnormale der Streifenkurve* ist im Falle $\frac{1}{\varrho} \neq 0$ ferner nach § 7 (35) durch den Vektor

$$\mathfrak{h} = \frac{c\mathfrak{f} + b\mathfrak{n}}{\pm\sqrt{b^2 + c^2}} \tag{12}$$

gegeben. Berechnen wir uns noch den Binormalenvektor $\mathfrak{b} = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{h}$ der Streifenkurve, so haben wir insgesamt für das im § 7 eingeführte beglei-

tende Dreibein der Kurve $\mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}', \quad \mathfrak{y} = \frac{c\mathfrak{f} + b\mathfrak{n}}{+\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{-b\mathfrak{f} + c\mathfrak{n}}{+\sqrt{b^2 + c^2}}. \tag{13}$$

Aus (12) erhalten wir für die Winkel φ_1 und φ_2 des Hauptnormalenvektors mit $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$:

$$\cos\varphi_1 = \frac{b}{+\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{c}{+\sqrt{b^2 + c^2}}. \tag{14}$$

Nach (11) gilt dann

$$\frac{1}{\varrho}\cos\varphi_1 = b, \quad \frac{1}{\varrho}\cos\varphi_2 = c. \tag{15}$$

Daraus entnimmt man wegen Kap. 1 (136) und (87) $\left(\text{auch im Falle } \frac{1}{\varrho} = 0\right)$: *$c$ bzw. b sind die Krümmungen der Kurven, die durch senkrechte Projektion der Streifenkurve auf die Tangentialebene bzw. auf die Normalebene des Streifens entstehen*, wobei wir als die Normalebene die durch $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{n}$ im Kurvenpunkt aufgespannte Ebene bezeichnen. Man nennt daher auch c die *Tangentenkrümmung* und b *die Normalkrümmung* des Streifens. Für c werden wir im § 37 auch noch die zweite Bezeichnung *geodätische Krümmung* verwenden.

Wir geben noch eine weitere geometrische Deutung von b und c. Nach § 13 gelten im Falle $\mathfrak{x}'' \neq 0$ für Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ und Radius a einer Kugel, die durch den Krümmungskreis der Kurve $\mathfrak{x}$ hindurch geht, die Gleichungen § 13 (90). Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir hier für den Radius R_1 statt a. Wählen wir nun unter diesen Kugeln diejenige aus, die das Flächenelement $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ unseres Streifens berührt, so muß $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \pm R_1\mathfrak{n}$ gelten. Die Gleichungen § 13 (90a) und (90b) sind dann identisch erfüllt. (90c) liefert nach (13) die Bedingung $|b| = 1 : R_1$. Nehmen wir aber unter den Kugeln § 13 (90) durch den Krümmungskreis unserer Kurve diejenige, die im Punkt $\mathfrak{x}$ zum Streifen senkrecht steht, so müssen wir $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} = \pm R_2\mathfrak{f}$ setzen, wo jetzt R_2 der Radius der neuen Kugel ist. Aus (90c) ergibt sich dann $|c| = 1 : R_2$. Wir haben also: *$|b|$ und $|c|$ sind die reziproken Werte der Radien der beiden Kugeln, die durch den Krümmungskreis der Streifenkurve hindurchgehen und von denen die erste das Flächenelement des Streifens berührt, die zweite aber zu diesem senkrecht ist.* Die erste Kugel nennen wir auch die *Tangentenkugel* und die zweite die *Normalkugel* des Streifens.

Wir wollen jetzt weiter auf der Normalen unseres Streifens den sogenannten Kehlpunkt bestimmen, der die Grenzlage derjenigen Punkte der Normalen darstellt, in denen sie von einer benachbarten (im allgemeinen zu ihr windschiefen) Streifennormalen den kürzesten Abstand

besitzt. Weil dieser kürzeste Abstand offensichtlich die Länge des Gemeinlotes auf die Normale und die Nachbarnormale darstellt, wie man durch geeignete Anwendung des Satzes von Pythagoras einsieht, erweist sich also der Kehlpunkt als Grenzlage der Fußpunkte dieser Gemeinlote auf der (durch den Punkt $\mathfrak{x}(s)$ gehenden) Ausgangsnormalen. Dieselbe besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{n}, \tag{16}$$

und eine (durch $\mathfrak{x}(s+h)$ gehende) Nachbarnormale werde durch

$$\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{x}} + \mu \bar{\mathfrak{n}} \tag{17}$$

dargestellt. Für die Fußpunkte $\mathfrak{x} + \lambda(h)\,\mathfrak{n}$ und $\bar{\mathfrak{x}} + \mu(h)\,\bar{\mathfrak{n}}$ des Gemeinlotes der Geraden (16) und (17) gilt dann:

$$(\bar{\mathfrak{x}} + \mu(h)\,\bar{\mathfrak{n}}) - (\mathfrak{x} + \lambda(h)\,\mathfrak{n}) = \nu(h)\,(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}}) \tag{18}$$

woraus sich nach innerer Multiplikation mit $\mathfrak{n}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ sowie Auflösung des entstehenden linearen Gleichungssystems nach $\lambda(h)$ wegen Kap.1 (28):

$$\lambda(h) = \frac{(\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\,(\mathfrak{n} - (\mathfrak{n}\bar{\mathfrak{n}})\,\bar{\mathfrak{n}})}{(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})\,(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})} \tag{19}$$

ergibt. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Faktoren in Zähler und Nenner dieses Bruchs und Grenzübergang $h \to 0$ folgt dann wegen $(7)_3$ für den gesuchten Kehlpunkt $\mathfrak{k}$ auf der Normalen (16) im Falle $\mathfrak{n}' \neq 0$:

$$\mathfrak{k} = \lim_{h \to 0} (\mathfrak{x} + \lambda(h)\,\mathfrak{n}) = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{x}'\mathfrak{n}'}{(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}')^2}\,\mathfrak{n} = \mathfrak{x} + \frac{b}{a^2 + b^2}\,\mathfrak{n}. \tag{20}$$

Entsprechend findet man für den kürzesten Abstand $d(h) = |\nu(h)| \cdot |\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}}|$ von Ausgangsnormale und Nachbarnormale nach innerer Multiplikation von (18) mit $\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}}$ (im Falle $\mathfrak{n}' \neq 0$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(h)}{|h|} = \left| \lim_{h \to 0} \frac{(\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\,(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})}{(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})\,(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})} \cdot \frac{(\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}})}{h} \right| = \frac{|(\mathfrak{x}', \mathfrak{n}, \mathfrak{n}')|}{|\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'|} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{21}$$

Schließlich konvergiert (wieder im Falle $\mathfrak{n}' \neq 0$) das Gemeinlot von Normale und Nachbarnormale selbst für $h \to 0$ gegen die Gerade durch den Kehlpunkt mit dem Richtungsvektor

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{n} \times \bar{\mathfrak{n}}}{h} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}' = a\mathfrak{x}' - b\mathfrak{j}$$

oder dem zum Einheitsvektor normierten Richtungsvektor

$$\mathfrak{u} = \frac{a\mathfrak{x}' - b\mathfrak{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{22}$$

Die Tangente unseres Streifens, die in Richtung dieses Vektors von $\mathfrak{x}$ aus ausläuft, nennen wir die zur Kurventangente $\mathfrak{x}'$ *konjugierte Tangente* unseres Streifens. Offenbar entsteht sie auch als Grenzlage des Schnitts benachbarter Tangentialebenen unseres Streifens. Für die Winkel ψ_1 und ψ_2, die der Vektor $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{f}$ bildet, erhalten wir

$$\cos\psi_1 = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\psi_2 = \frac{-b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{23}$$

Da sich $\cos\psi_1 : \cos\psi_2 = a : -b$ ergibt, und da b bereits geometrisch gedeutet wurde, so ist jetzt auch die Bedeutung von a bekannt. Man bezeichnet a auch als *geodätische Windung des Streifens.*

Berechnen wir uns zum Schluß noch (im Falle einer dreimal stetig differenzierbaren Streifenkurve $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}'' \neq 0$) mittels der Formel § 20 (78) die Windung $1:\tau$ unserer Kurve $\mathfrak{x}$, indem wir $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}'''$ nach (7) durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$ linear ausdrücken, so finden wir

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\mathfrak{x}', b\mathfrak{n} + c\mathfrak{f}, (b' + ac)\mathfrak{n} + (c' - ab)\mathfrak{f})}{b^2 + c^2}$$

oder nach den Rechenregeln für Determinanten

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} b & b' + ac \\ c & c' - ab \end{vmatrix}}{b^2 + c^2} \cdot (\mathfrak{x}', \mathfrak{n}, \mathfrak{f}).$$

Nach (6) ergibt das aber

$$\frac{1}{\tau} = a + \frac{b'c - bc'}{b^2 + c^2}. \tag{24}$$

Die Streifen längs ebener Kurven $(1:\tau = 0)$ sind hier von den ebenen Streifen $(a = b = 0)$ zu unterscheiden, bei denen der Vektor $\mathfrak{n}$ konstant ist.

§ 35. Krümmungsstreifen, Schmiegstreifen und geodätische Streifen

Wir wollen jetzt einige bemerkenswerte besondere Arten von Flächenstreifen untersuchen.

1. Sei $a = 0$. Nach (6), (7) ist $a = (\mathfrak{x}', \mathfrak{n}, \mathfrak{n}')$, und $a = 0$ besagt dann nach § 2 (26), daß die drei Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ oder, was auf dasselbe herauskommt, die drei Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{n}$ und $(\mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{n})'$ in einer Ebene liegen ($\lambda = \text{const}$). Dies bedeutet, daß die Ebene $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\lambda, \mu) = \mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{n} + \mu\mathfrak{x}'$ die Fläche aller Streifennormalen längs ihrer „Erzeugenden" $\mathfrak{x} + \lambda\mathfrak{n}$ „berührt". Wir nennen allgemein eine Fläche, die als Ort einer einparametrigen Geradenschar angesehen werden kann, eine *geradlinige Fläche* oder auch eine *Regelfläche* in unglücklicher Übersetzung des französischen „surfaces réglées". Insbesondere sollen die besonderen geradlinigen

Flächen, die längs jeder Erzeugenden von einer festen Ebene berührt werden, als *Torsen* bezeichnet werden (vgl. S. 129). Offenbar sind die Torsen identisch mit denjenigen geradlinigen Flächen, bei denen „unendlich benachbarte" Geraden entweder parallel sind oder sich schneiden. Darunter ist zu verstehen: Der Grenzwert des Quotienten entweder der Differenz der Richtungseinheitsvektoren oder des (kürzesten) Abstands benachbarter Geraden durch den entsprechenden Zuwachs eines regulären Parameters für die Erzeugenden der geradlinigen Fläche verschwindet (vgl. (21)!). Wir können jetzt sagen: *Die Streifen mit $a = 0$ sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Normalen eine Torse bilden.* Diese Streifen wollen wir in später noch zu erläuternder Ausdrucksweise als *Krümmungsstreifen* bezeichnen.

2. Wir betrachten jetzt die Streifen mit $b = 0$. Nach (11) und (15) ist in diesem und nur in diesem Falle entweder $\frac{1}{\varrho} = 0$ oder der Vektor $\mathfrak{n}$ der Normalen unseres Streifens zu dem Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$ der Kurve $\mathfrak{x}$ senkrecht, das heißt aber, $\mathfrak{n}$ steht senkrecht auf der durch $\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{h}$ aufgespannten Schmiegebene der Kurve $\mathfrak{x}$, oder noch anders ausgedrückt: *Die Streifen mit $b = 0$ sind dadurch gekennzeichnet, daß die Schmiegebene der Streifenkurve entweder nicht existiert oder mit der Tangentenebene des Streifens zusammenfällt.* Diese Streifen wollen wir als *Schmiegstreifen* oder *asymptotische Streifen* bezeichnen. Aus (22) ersehen wir, daß bei einem Schmiegstreifen mit $\mathfrak{n}' \neq 0$ die Kurventangente mit der konjugierten Tangente zusammenfällt, daß dagegen bei einem Krümmungsstreifen mit $\mathfrak{n}' \neq 0$ Tangente und konjugierte Tangente zueinander senkrecht sind.

3. Bei den Streifen mit $c = 0$ ist entweder $\frac{1}{\varrho} = 0$ oder die Hauptnormale $\mathfrak{h}$ der Streifenkurve fällt mit der Streifennormale $\mathfrak{n}$ zusammen und wir haben: *Bei den Streifen mit $c = 0$ geht die Schmiegebene der Streifenkurve, falls sie existiert, durch die Streifennormale hindurch.* Wir wollen diese Streifen als *geodätische Streifen* bezeichnen, eine Benennung, die erst später (im § 37) ihre Rechtfertigung finden wird.

Ist die Kurve $\mathfrak{x}$ unseres Streifens eine Gerade, so muß nach § 6 $\mathfrak{x}'' = 0$ gelten. Das ergibt nach (7) $b = c = 0$. Darin steckt das Ergebnis: *Liegt auf einer Fläche eine Gerade, so ist der Flächenstreifen längs dieser Geraden zugleich ein Schmiegstreifen und ein geodätischer Streifen.*

Da nach (7) gilt $a = (\mathfrak{x}', \mathfrak{n}, \mathfrak{n}')$, $-b = \mathfrak{x}'\mathfrak{n}'$ und $c = (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'')$, so können wir die drei Bedingungen zusammenstellen:

$$
\begin{aligned}
a = (\mathfrak{x}', \mathfrak{n}, \mathfrak{n}') &= 0 \quad \text{für } \textit{Krümmungsstreifen}, \\
-b = \mathfrak{x}'\mathfrak{n}' \quad\;\; &= 0 \quad \text{für } \textit{Schmiegstreifen}, \\
c = (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') &= 0 \quad \text{für } \textit{geodätische Streifen}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Wenn wir nach den Formeln § 10 (79) von dem Parameter s der Bogenlänge unserer Streifenkurve zu einem beliebigen Parameter t übergehen, und wenn wir

$$\mathfrak{n}' = \frac{\dot{\mathfrak{n}}}{\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}} \tag{26}$$

berücksichtigen, so erhalten wir aus (25):

$$\begin{aligned} (\dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n}, \dot{\mathfrak{n}}) &= 0 \quad \text{für } \textit{Krümmungsstreifen}, \\ \dot{\mathfrak{x}}\dot{\mathfrak{n}} &= 0 \quad \text{für } \textit{Schmiegstreifen}, \\ (\mathfrak{n}, \dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}) &= 0 \quad \text{für } \textit{geodätische Streifen}. \end{aligned} \tag{27}$$

Nach (11) und (24) fallen bei einem Schmiegstreifen mit $\mathfrak{x}'' \neq 0$ Betrag der geodätischen Krümmung und geodätische Windung mit der gewöhnlichen Krümmung und der gewöhnlichen Windung zusammen.

§ 36. Drehung eines Streifens um seine Kurve

Eine Abänderung eines Streifens, die die Kurve $\mathfrak{x}$ fest läßt und nur die Normalen $\mathfrak{n}$ verändert, bezeichnen wir als eine Drehung eines Streifens um seine Kurve. Für den neuen Streifen $\{\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{n}}\}$ muß dann offenbar gelten:

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{x}', \\ \bar{\mathfrak{n}} = \alpha\mathfrak{n} + \beta\mathfrak{f}, \end{cases} \tag{28}$$

denn es muß ja der Vektor $\bar{\mathfrak{n}}$ zu $\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{x}'$ senkrecht sein. Aus $\bar{\mathfrak{n}}^2 = 1$ folgt $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Wir können dann $\alpha = \cos\varphi$; $\beta = \sin\varphi$ setzen und φ ist einfach der Winkel der Vektoren $\mathfrak{n}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$, also der Winkel, um den wir die Tangentenebene beim Übergang zum neuen Streifen gedreht haben. Aus $\bar{\mathfrak{f}} = \bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{x}}'$ folgt $\bar{\mathfrak{f}} = -\sin\varphi\mathfrak{n} + \cos\varphi\mathfrak{f}$. Wir haben also insgesamt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}' &= \mathfrak{x}', \\ \bar{\mathfrak{n}} &= \cos\varphi\,\mathfrak{n} + \sin\varphi\,\mathfrak{f}, \\ \bar{\mathfrak{f}} &= -\sin\varphi\,\mathfrak{n} + \cos\varphi\,\mathfrak{f}. \end{aligned} \tag{29}$$

Nehmen wir den Drehwinkel φ längs der Streifenkurve als (stetig differenzierbare) Funktion ihrer Bogenlänge s an, so haben wir die allgemeinste Drehung unseres Streifens. Durch Ableitung nach s folgt aus (29)

$$\bar{\mathfrak{x}}'' = \mathfrak{x}'', \tag{30}$$

$$\bar{\mathfrak{n}}' = (-b\cos\varphi - c\sin\varphi)\,\mathfrak{x}' + (a - \varphi')\sin\varphi\,\mathfrak{n} - (a - \varphi')\cos\varphi\,\mathfrak{f}. \tag{31}$$

Setzen wir gemäß (8) die Invarianten des neuen Streifens in der Form an:

$$-\bar{a} = \bar{\mathfrak{f}}\bar{\mathfrak{n}}', \quad -\bar{b} = \bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{n}}', \quad \bar{c} = \bar{\mathfrak{f}}\bar{\mathfrak{x}}'',$$

so erhalten wir aus (29), (30), (31) durch Einsetzen unter Benutzung von (8) für den Zusammenhang der alten mit den neuen Invarianten:

$$\bar{a} = a - \varphi', \tag{32}$$

$$\bar{b} = b \cos\varphi + c \sin\varphi, \tag{33}$$

$$\bar{c} = -b \sin\varphi + c \cos\varphi. \tag{34}$$

Aus den Formeln (33), (34) ersehn wir, daß es durch eine Kurve (bis auf die Angabe des „Gerichtetseins" (vgl. § 33)!) genau einen Schmiegstreifen und genau einen geodätischen Streifen gibt. Denn um $\bar{b} = 0$ zu erreichen, hat man nur $\tan\varphi = -b : c$, und um $\bar{c} = 0$ zu erreichen, hat man nur $\tan\varphi = c : b$ zu setzen. Durch den Wert von $\tan\varphi$ ist aber ein Wert von φ zwischen 0 und π eindeutig bestimmt[1]. Aus den Formeln (33), (34) folgt noch der Satz: *Aus einem Schmiegstreifen entsteht durch Drehung um $\pi : 2$ ein geodätischer Streifen und umgekehrt.*

Anders wie mit den geodätischen und den Schmiegstreifen durch eine gegebene Kurve verhält es sich mit den Krümmungsstreifen. Deren gibt es durch eine gegebene Kurve immer eine einparametrige Schar. Denn um $\bar{a} = 0$ zu machen, haben wir $\varphi' = a$ oder

$$\varphi(s) = \int a\, ds \tag{35}$$

zu setzen. Die Funktion $\varphi(s)$ ist dann aber nur bis auf eine additive Integrationskonstante bestimmt. Wir können somit das Flächenelement an einer Stelle s_0 noch willkürlich durch unsere Kurve hindurchlegen, dann gibt es immer genau einen Krümmungsstreifen durch unsere Kurve, der dieses Flächenelement an der Stelle s_0 enthält. Zugleich ist auch eine Deutung der Integralinvariante (35) unseres allgemeinen Ausgangsstreifens (wo das Integral über das Streifenstück zwischen den Punkten $\mathfrak{x}(s_1)$ und $\mathfrak{x}(s_2)$ erstreckt wird) gefunden: *Wir legen durch die Kurve unseres Ausgangsstreifens einen der möglichen Krümmungsstreifen. Bilden dann die Flächenelemente unseres Ausgangsstreifens mit den Flächenelementen des Krümmungsstreifens an den Stellen s_1 und s_2 die Winkel φ_1 bzw. φ_2, so ist unser Integral gleich der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$.*

Betrachten wir zwei Krümmungsstreifen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ und $\{\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{n}}\}$ durch dieselbe Kurve $\mathfrak{x}$, so folgt aus $a = \bar{a} = 0$ nach (32) $\varphi = \text{const}$. Darinsteckt der Satz von Joachimsthal[2]: *Zwei Krümmungsstreifen durch dieselbe Kurve schließen einen festen Winkel ein.* Es gilt von diesem Satz auch die Umkehrung: *Dreht man alle Flächenelemente eines Krümmungsstreifens um einen und denselben festen Winkel, so entsteht wieder ein Krümmungsstreifen.*

---

[1] Hiermit ist zugleich eine neue geometrische Deutung der Invariante $b:c$ gefunden.

[2] Joachimsthal, F.: Crelles Journal **30**, 347 (1846).

Allgemeiner können wir auf Grund von (32) auch den Satz aussprechen: Bilden zwei Streifen durch dieselbe Kurve dauernd denselben Winkel miteinander, so haben sie überall gleiche geodätische Windungen a.

§ 37. Verbiegung eines Streifens

Wir können uns einen jeden Flächenstreifen wenigstens näherungsweise mechanisch verwirklicht denken durch einen dünnen Streifen irgendeines biegsamen und nicht dehnbaren Materials (etwa aus Papier). Gewisse Streifen stehen nun in einer ganz besonders ausgezeichneten Beziehung zueinander, sie gehen nämlich durch *Verbiegung* auseinander hervor. Zum Beispiel können wir auf ein ebenes Blatt Papier eine Kurve zeichnen und längs der Kurve dann einen dünnen Papierstreifen herausschneiden. Wir erhalten dann offenbar einen ebenen Flächenstreifen. Diesen Streifen können wir nun in die mannigfachsten Gestalten verbiegen, ohne das Papier zu knicken und zu zerreißen. Dabei nimmt auch die auf den Streifen gezeichnete Kurve die Gestalt der verschiedensten Raumkurven an. Was dieser Verbiegung ohne Knickung und Dehnung als idealisierter mechanischer Vorgang entspricht, ist offenbar eine solche stetige Abänderung des Streifens, bei der nicht nur die Bogenlängen der einzelnen auf der Streifenkurve $\mathfrak{x}$ gemessenen Entfernungen erhalten bleiben, sondern auch die Bogenlängen aller Kurvenstücke, die auf dem Streifen in genügender Nachbarschaft zu der Kurve $\mathfrak{x}$ gezogen sind, sich „in erster Näherung" nicht ändern. Kurz gesagt, wir haben es mit einer solchen Abänderung zu tun, bei der die „inneren Maßverhältnisse" auf dem Streifen nicht geändert werden.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann zwei gegebene Streifen ineinander verbiegbar sind. Dabei betrachten wir vorläufig offene Stücke von Streifen. Wir schließen also zunächst geschlossene Streifen aus.

Wir brauchen zur Entscheidung unserer Frage eine Formel, die uns für einen gegebenen Streifen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ die Bogenlängen der zu $\mathfrak{x}$ „benachbarten" Kurven liefert. Benachbart verstehen wir dabei in dem Sinne, daß wir durch $\mathfrak{x}$ eine beliebige den Streifen berührende Fläche hindurchlegen und auf dieser die Kurven betrachten, die in der Umgebung der Kurve $\mathfrak{x}$ liegen. Wie wir eine Kurve mit Hilfe eines Parameters darstellen, so können wir eine Fläche festlegen, indem wir den Flächenpunkt als zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $\bar{\mathfrak{x}}$ zweier Parameter s und v vorgeben. s hat hier zunächst noch nichts mit einer Bogenlänge zu tun. Geben wir in der Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(s, v)$ dem Parameter s einen festen Wert und lassen nur v variieren, so bekommen wir jedesmal eine bestimmte, der Fläche angehörige Kurve, und ebenso bekommen wir für die festen Werte von v bei veränderlichem s eine Kurvenschar auf der Fläche. Das „Netz" der zwei Scharen der Kurven $s = \text{const}$ und $v =$

const bezeichnen wir auch als das *Netz der Parameterkurven* auf der Fläche. Geben wir v als stetig differenzierbare Funktion $v = f(s)$ von s vor, so entspricht ihr in der Darstellung $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(s, f(s))$ eine Kurve auf unserer Fläche. In einem zu einem festen Wertsystem s, v gehörigen Flächenpunkt der Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ sind die partiellen Ableitungen $\bar{\mathfrak{x}}_s$ und $\bar{\mathfrak{x}}_v$ zwei Vektoren, die in die beiden Richtungen der von dem Punkt auslaufenden Parameterkurven weisen. Wir setzen $\bar{\mathfrak{x}}_s$ und $\bar{\mathfrak{x}}_v$ als linear unabhängig voraus.

Geben wir uns nun insbesondere eine Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ vor, für die

$$\bar{\mathfrak{x}}(s, 0) = \mathfrak{x}(s) \tag{36}$$

ist, wo rechts die Vektorfunktion unserer Streifenkurve steht, so geht diese durch unsere Streifenkurve hindurch. Ist ferner $\bar{\mathfrak{x}}_v$ längs dieser Kurve (36) eine Linearkombination der zu unserem Streifen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ gehörigen Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{f}$:

$$\bar{\mathfrak{x}}_v(s, 0) = P(s) \cdot \mathfrak{x}'(s) + Q(s) \cdot \mathfrak{f}(s), \tag{37}$$

so liegt der Tangentenvektor $\bar{\mathfrak{x}}_v(s, 0)$ der Fläche in der Ebene des Streifens; es berührt die Fläche also unseren Streifen längs der Kurve $\mathfrak{x}$.

Jetzt gilt für die durch die Funktion $v = f(s)$ festgelegte Flächenkurve $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(s, f(s)) = \tilde{\mathfrak{x}}(s)$:

$$\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}}{ds} = \bar{\mathfrak{x}}_s + \bar{\mathfrak{x}}_v \cdot f'$$

und für die Länge S des auf ihr liegenden Bogens mit den Endpunkten $s = s_1$ und $s = s_2$ nach § 5 (2):

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\bar{\mathfrak{x}}_s^2 + 2\bar{\mathfrak{x}}_s \bar{\mathfrak{x}}_v f' + \bar{\mathfrak{x}}_v^2 f'^2}\, ds. \tag{38}$$

Da die Kurve $\tilde{\mathfrak{x}}$ in der Nachbarschaft von $\mathfrak{x}$ liegen soll, setzen wir

$$v = f(s) = \varepsilon\varphi(s) \tag{39}$$

mit stetig differenzierbarer Funktion φ an. Dies in (38) eingesetzt, ergibt bei der Entwicklung von S nach Potenzen von ε:

$$S(\varepsilon) = S(0) + \frac{dS}{d\varepsilon}(0) \cdot \varepsilon + \cdots$$

oder

$$S(\varepsilon) = S(0) + \delta s + \cdots$$

wenn $\varepsilon \cdot \frac{dS}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \delta s$ gesetzt wird ($\delta s =$ „erste Variation" von S, vgl. § 25!). Unter Benutzung von (38), (39) und $\bar{\mathfrak{x}}_{sv} = \bar{\mathfrak{x}}_{vs}$ finden wir für δs die Formel:

$$\delta s = \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} (\mathfrak{x}' \bar{\mathfrak{x}}_{sv}\big|_{\varepsilon=0} \varphi + \mathfrak{x}' \bar{\mathfrak{x}}_v\big|_{\varepsilon=0} \varphi')\, ds = \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{x}' (\bar{\mathfrak{x}}_v\big|_{\varepsilon=0} \cdot \varphi)'\, ds,$$

oder nach (37), $(7)_1$ und partieller Integration:

$$\delta s = \varepsilon\left([P\varphi]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} cQ\varphi \, ds \right). \tag{40}$$

Hier bedeutet das Glied in der eckigen Klammer die Differenz der Werte der Funktion φP an den beiden Enden s_2 und s_1 des Integrationsintervalls. Setzen wir

$$\delta\mathfrak{x}(s) = \varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\mathfrak{x}}(s, \varepsilon\varphi(s))\right]_{\varepsilon=0},$$

so haben wir nach (37)

$$\delta\mathfrak{x} = \varepsilon(\varphi P)\,\mathfrak{x}' + \varepsilon(\varphi Q)\,\mathfrak{f}.$$

Wir setzen

$$\delta n = \mathfrak{f}\delta\mathfrak{x} = \varepsilon\varphi Q, \quad \delta t = \mathfrak{x}'\delta\mathfrak{x} = \varepsilon\varphi P$$

und nennen δn die *normale Verrückung* oder die *normale Variation*, δt aber die *tangentiale Verrückung* oder die *tangentiale Variation* unserer Kurve $\mathfrak{x}$. Die Formel (40) schreibt sich jetzt in der Form

$$\delta s = [\delta t]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} c \cdot \delta n \cdot ds. \tag{41}$$

Man nennt δs die *erste Variation der Bogenlänge* unserer Streifenkurve.

Aus der Formel sieht man, daß für die Maßverhältnisse der Umgebung der Kurve $\mathfrak{x}$ auf unserer Fläche die Funktion c ausschlaggebend ist, nicht aber die Funktionen a und b des Streifens. Wir werden daher zwei Streifen zueinander *isometrisch* nennen, wenn bei geeigneter Wahl der Bogenlängenparameter ihrer Kurven (man kann ja noch $s^* = \pm s +$ const setzen) die Funktionen c übereinstimmen. Können zwei isometrische Streifen durch eine von einem reellen Parameter stetig abhängende Schar von isometrischen Streifen verbunden werden, so heißen diese beiden Streifen aufeinander *verbiegbar*.

Nach (7) folgt für einen ebenen Streifen, das heißt für einen Streifen, dessen Normalenvektor $\mathfrak{n}$ längs der Kurve $\mathfrak{x}$ konstant ist, daß $a = b = 0$ sein muß. Nach (1) ist dann notwendig auch die Kurve $\mathfrak{x}$ eben. Bei gegebener (stetiger) Funktion c von s gibt es nach § 33 Schluß nun bis auf Bewegungen genau einen Streifen mit $a = b = 0$, $c = c(s)$. Es ist daher jeder gegebene Streifen in einen bis auf Bewegungen eindeutig bestimmten ebenen Streifen verbiegbar oder, wie wir sagen wollen, abwickelbar, weil sich die Funktionen $a = a(s)$ und $b = b(s)$ in einer von einem reellen Parameter stetig abhängenden Weise in die Funktionen $a = 0$ und $b = 0$ überführen lassen. Für den ebenen Streifen $a = b = 0$ ist aber nach Kap. 1 (87) und (8) c einfach die Krümmung der bei der Abwicklung entstandenen ebenen Kurve des Streifens. Damit ist dann eine neue Deutung der

Biegungsinvariante c gefunden. Wir wollen c auch als *Abwickelkrümmung* oder *geodätische Krümmung* des Streifens bezeichnen.

Das Bisherige gilt nur für offene Stücke von Streifen, sozusagen im kleinen. Nehmen wir einen geschlossenen Streifen, so läßt sich dieser unter Erhaltung der Geschlossenheit nicht immer auf die Ebene abwickeln. Das ist schon an dem Beispiel des Flächenstreifens ersichtlich, der zu einem Kreis auf einem geraden Kreiszylinder gehört. Hier treten eben Schwierigkeiten hinzu, die mit den Verhältnissen der Differentialgeometrie im Großen zusammenhängen.

Für die geodätischen Streifen finden wir als neue kennzeichnende Eigenschaft, daß die Abwickelkrümmung Null ist, daß ihre Kurven also bei der Abwicklung in Geraden der Ebene übergehen.

Aus der Formel (34) erhält man eine neue Deutung der Invariante b, wenn man $\varphi = \pi : 2$ setzt. Für diesen Fall wird dann $\bar{c} = -b$ und man hat: Die Invariante $-b$ eines Streifens ist einfach gleich der geodätischen Krümmung des Streifens durch dieselbe Kurve, der durch Drehung um $\pi : 2$ aus dem ursprünglichen entsteht.

§ 38. Der Parallelismus von Levi-Civita

Ein Vektor $\mathfrak{k}$, der von dem zum Parameterwert s gehörigen Punkt $\mathfrak{x}$ unseres Streifens ausläuft und in der Ebene des Streifens gelegen ist, läßt sich immer als Linearkombination

$$\mathfrak{k} = \alpha \mathfrak{x}' + \beta \mathfrak{j} \tag{42}$$

der Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{j}$ darstellen. Wir denken uns nun in jedem Punkt der Streifenkurve einen solchen Vektor $\mathfrak{k}$ aufgetragen. Dann haben wir eine Schar von Vektoren $\mathfrak{k}(s)$, die durch (42) mit Funktionen α und β von s dargestellt sind. Wir wollen nun unseren Streifen verbiegen und die Vektoren $\mathfrak{k}$ dabei so mitnehmen, daß jeweils ihre Länge $\sqrt[+]{\alpha^2 + \beta^2}$ und der Winkel, den sie mit der Kurve bilden, also auch $\alpha : \sqrt[+]{\alpha^2 + \beta^2}$ unverändert bleibt. Das ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Komponenten α und β in der Darstellung (42), die der Vektor in jedem Augenblick seiner Zerlegung nach den jedesmaligen Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{j}$ besitzt, dieselben Werte haben sollen. Wir wollen sagen: Wir führen die Vektoren mit dem Streifen „biegungsinvariant verbunden" mit.

Wenn wir einen an einer bestimmten Stelle in der Streifenebene gegebenen Vektor $\mathfrak{k}$ parallel mit sich längs der Streifenkurve verschieben, so wird er im allgemeinen nicht mehr in dem Streifen bleiben, sondern aus dem Streifen in den Raum heraustreten. Ein Vektor läßt sich also im allgemeinen in einem Streifen nicht im gewöhnlichen Sinne parallel mit sich verschieben. Wir wollen nun statt dieses Parallelismus ein anderes

Verschiebungsgesetz für Vektoren in unserem Streifen kennenlernen, das von Wichtigkeit für die Fragen der Flächentheorie sein wird, nämlich den *Parallelismus von Levi-Civita*. Wir erklären nämlich zwei Vektoren an zwei Stellen unseres Streifens als parallel, wenn sie, bei der Abwicklung des Streifens auf die Ebene biegungsinvariant mitgeführt, in der Ebene als parallele Vektoren erscheinen.

Um nun das Verschiebungsgesetz von Levi-Civita allgemein analytisch darzustellen, nehmen wir zuerst einen ebenen Streifen $a = b = 0$ an. Sollen für den ebenen Streifen die in der festen Streifenebene gelegenen Vektoren $\mathfrak{k}$ im gewöhnlichen Sinne parallel sein, so muß $\mathfrak{k} = \text{const}$ gelten, oder $\mathfrak{k}' \equiv 0$. Das ergibt nach (7) und (42) unter Beachtung von $a = b = 0$ für die notwendig stetig differenzierbaren Funktionen α und β:

$$\alpha' = c\beta, \quad \beta' = -c\alpha. \tag{43}$$

Dies Gesetz ist aber jetzt schon das Verschiebungsgesetz für den allgemeinen Fall, denn wir wissen ja, daß die Funktionen α, β, c bei biegungsinvarianter Mitführung dieselben bleiben, und außerdem ist das Verschiebungsgesetz von Levi-Civita in biegungsinvarianter Weise erklärt.

Die Parallelverschiebung von Levi-Civita hat die folgenden Eigenschaften: 1. *Jeder Vektor* $\mathfrak{k}$ *behält bei der Verschiebung längs des Streifens seine Länge.* 2. *Der Winkel zweier Vektoren* $\mathfrak{k}_1 = \alpha_1\mathfrak{x}' + \beta_1\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{k}_2 = \alpha_2\mathfrak{x}' + \beta_2\mathfrak{y}$ *bleibt bei der Verschiebung erhalten.* Das folgt aus der Definition, läßt sich aber auch mittels der Identitäten, die für die nach dem Gesetz (43) verschobenen Vektoren eines allgemeinen Streifens gelten:

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{k}\mathfrak{k}) = \frac{d}{ds}(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2) = \frac{d}{ds}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = 0$$

nachweisen.

Nehmen wir $\mathfrak{k}$ als Einheitsvektor, so können wir ihn in der Form

$$\mathfrak{k} = \cos\tau\,\mathfrak{x}' + \sin\tau\,\mathfrak{y}$$

ansetzen, und τ ist der Winkel, den $\mathfrak{k}$ mit der Kurvenrichtung bildet. Die Gleichungen (43) nehmen jetzt die Form an:

$$-\sin\tau\cdot\tau' = c\sin\tau, \quad \cos\tau\cdot\tau' = -c\cos\tau.$$

Das führt auf die eine Bedingung

$$\tau' = -c. \tag{44}$$

Aus dieser Gleichung sehen wir also, wie sich der Winkel τ bei Parallelverschiebung des Vektors $\mathfrak{k}$ längs des Streifens ändert. Er ist nur für geo-

dätische Streifen konstant. Bezeichnen wir die Winkelwerte τ der durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehenden, zu den Stellen $s = s_1$ und $s = s_2$ gehörigen Vektoren $\mathfrak{k}$ mit τ_1 und mit τ_2, so gilt nach (44)

$$\tau_2 - \tau_1 = -\int_{s_1}^{s_2} c\, ds. \tag{45}$$

Das Integral rechts bezeichnen wir auch als die Gesamtkrümmung unseres Streifenstücks. Nach der Bemerkung des vorigen Abschnitts kann das Integral

$$\int_{s_1}^{s_2} b\, ds \tag{46}$$

als Gesamtkrümmung des um $\pi : 2$ gedrehten Streifens gedeutet werden.

§ 39. Beweis von Radon für einen Satz von E. Schmidt

J. Radon hat bemerkt, daß man den Satz Ib (und damit auch die Sätze Ia und II) aus § 31 unter Zuhilfenahme des Begriffs der geodätischen Krümmung eines Streifens sehr einfach beweisen kann. Dies geschieht folgendermaßen:

Man lege durch den räumlichen (zweimal stetig differenzierbaren und mit von Null verschiedener Krümmung vorausgesetzten) Kurvenbogen C einen Kegel mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{p}$ von C als Spitze und „wickle" C durch Abrollung dieses Kegels auf die Ebene in einen (zweimal stetig differenzierbaren) ebenen Kurvenbogen C^* ab. Durch die Tangentialebenen des Kegels wird längs C ein Flächenstreifen bestimmt (an den Stellen von C, wo die Tangente von C durch $\mathfrak{p}$ geht, ist die Schmiegebene von C gleichzeitig Tangentialebene des Kegels; sonst ist die durch die Tangente von C und durch $\mathfrak{p}$ gehende und dadurch eindeutig bestimmte Ebene die Tangentialebene des Kegels!). Dieser Flächenstreifen geht bei der Abwicklung von C in einen ebenen Streifen mit der Streifenkurve C^* über, und da bei der Abrollung des Kegels sich die Längen aller auf demselben liegenden Kurven nicht ändern, bleibt nach § 37 die geodätische Krümmung c des Flächenstreifens bei der Abwicklung ungeändert. c ist also gleich der Krümmung k^* von C^*; und außerdem haben wir für die Länge l bzw. l^* und für den Abstand der Endpunkte d bzw. d^* von C bzw. C^*:

$$l^* = l \text{ und } d^* = d. \tag{47}$$

Nach (15) war aber

$$c = \frac{1}{\varrho} \cos \varphi_2,$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung von C und φ_2 den Winkel zwischen Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$ von C und dem Vektor $\mathfrak{f}$ des Flächenstreifens bedeutet, was für $k^* = c$ die Ungleichung

$$|k^*| \leqq \frac{1}{\varrho} \tag{48}$$

zur Folge hat.

Ist jetzt $\bar{C}$ der in Satz Ib vorkommende ebene Kurvenbogen (welcher mit der Verbindungssehne seiner Endpunkte einen konvexen Bereich begrenzt) mit den Eigenschaften

$$\bar{l} = l \quad \text{und} \quad \frac{1}{\bar{\varrho}}(s) \geqq \frac{1}{\varrho}(s) > 0$$

für alle s, so genügt es zum Nachweis der Ungleichung $\bar{d} \leqq d$ wegen (47) und (48), aus

$$\bar{l} = l^* \quad \text{und} \quad \frac{1}{\bar{\varrho}}(s) \geqq |k^*(s)| \tag{49}$$

die Ungleichung

$$\bar{d} \leqq d^* \tag{50}$$

zu folgern. Damit ist aber der Beweis von Satz Ib auf ein Problem der ebenen Geometrie zurückgeführt, das sich in der folgenden Weise lösen läßt:

Wie in Kap. 2, § 31 sei $\bar{\mathfrak{x}}_1$ ein Punkt von $\bar{C}$, in welchem die Tangente an $\bar{C}$ zu der Verbindungssehne der Endpunkte $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{C}$ gleichsinnig parallel ist. Dem Punkt $\bar{\mathfrak{x}}_1$ entspreche auf C^* (bei längentreuer Zuordnung) der Punkt $\mathfrak{x}_1^*$, und es seien o.B.d.A. die Tangenten von $\bar{C}$ und C^* in den Punkten $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\mathfrak{x}_1^*$ gleichsinnig parallel sowie die Anfangspunkte $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{p}^*$ von $\bar{C}$ und C^* identisch (Drehung und Translation von C^*!). Wir wählen etwa $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^*$ als Ursprung und die gemeinsame Tangentenrichtung von $\bar{C}$ und C^* in $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\mathfrak{x}_1^*$ als Richtung der x_1-Achse eines cartesischen Koordinatensystems $\{x_1, x_2\}$ der Ebene (vgl. Fig. 8). Damit ergibt sich

$$\bar{d} = \int_0^{\bar{l}} \cos\bar{\tau}\, ds, \quad d^* \geqq \left| \int_0^{l^*} \cos\tau^*\, ds \right|, \tag{51}$$

wobei $\bar{\tau}$ bzw. τ^* den Winkel zwischen (gerichteter) Tangente an $\bar{C}$ bzw. C^* und der x_1-Achse bedeutet.

Nun ist aber nach Voraussetzung (49) und Kap. 1 (87)

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \left(\operatorname{sign}\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right)\cdot\frac{d\bar{\tau}}{ds} \geqq |k^*| = \left|\frac{d\tau^*}{ds}\right| = \max\left\{\frac{d\tau^*}{ds}, -\frac{d\tau^*}{ds}\right\}.$$

Integration über s ergibt die Ungleichung

$$|\bar{\tau}| \geqq |\tau^*|,$$

welche wegen $0 \leqq |\bar{\tau}| \leqq \pi$ und damit $0 \leqq |\tau^*| \leqq \pi$

$$\cos \bar{\tau} = \cos |\bar{\tau}| \leqq \cos |\tau^*| = \cos \tau^* \tag{52}$$

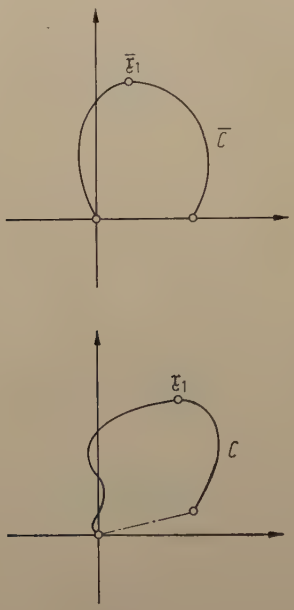


Fig. 8.

zur Folge hat. Die Kombination von (51) und (52) ergibt jetzt in der Tat die Behauptung (50), und man sieht leicht durch Zurückrechnung, daß in der Ungleichung $\bar{d} \leqq d^*$ die Gleichheit nur dann eintreten kann, wenn $\frac{1}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{\varrho} = |k^*|$ gilt und daher der durch C gehende Streifen ein Schmiegstreifen ist. Das letztere bedeutet, daß alle Schmiegebenen von C durch $\mathfrak{p}$ gehen und somit wegen $(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = 0$ (vgl. Kap. 1 (26)), d.h. der linearen Abhängigkeit $\mathfrak{x} - \mathfrak{p} = \alpha(\mathfrak{x} - \mathfrak{p})' + \beta(\mathfrak{x} - \mathfrak{p})''$ die drei Komponenten von $\mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ als Lösungen einer linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung selbst linear abhängig sein müssen: $\sum_{i=1}^{3} c_i(x_i(s) - p_i) = 0$ (nicht alle $c_i = 0$). Aus diesem Grunde ist der Kurvenbogen C jetzt genau wie $\bar{C}$ und C^* eben, und die Gleichheit der Absolutbeträge der Krümmungen dieser drei Kurvenbögen als Funktion der Bogenlänge bedingt deren Kongruenz.

Der weitere Satz III aus § 31 ist dem hier vorgetragenen Verfahren Radons nicht zugänglich, da bei der Abwicklung einer geschlossenen Raumkurve C in dem am Anfang dieses Paragraphen angegebenen Sinne an dem Punkt $\mathfrak{p}$ im allgemeinen eine „Ecke" entsteht.

§ 40. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 33.) Man beweise, daß im allgemeinen Fall die Ebenen eines zweimal stetig differenzierbaren Streifens $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ die Tangentenfläche der Raumkurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \dfrac{b}{(ab' - a'b) - c(a^2 + b^2)}(a\mathfrak{x}' - b\mathfrak{f})$ umhüllen.

2. (Zu § 33.) Man beweise: Die Krümmungsstreifen mit konstanter (von Null verschiedener) geodätischer Krümmung sind dadurch gekennzeichnet, daß die Streifenkurve auf einer festen Kugel liegt und die Streifenebenen auf dieser Kugel senkrecht aufsitzen.

3. (Zu § 33.) Es ist nachzuweisen: Denkt man sich bei einem Streifen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ das Dreibein der Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ längs der Streifenkurve $\mathfrak{x}$ so bewegt, daß die Bogenlänge s von $\mathfrak{x}$ mit der Zeit zusammenfällt, so vollführen die mit dem Dreibein starr verbundenen Punkte $\mathfrak{x} + x_1\mathfrak{x}' + x_2\mathfrak{f} + x_3\mathfrak{n}$ ($x_1, x_2, x_3 = \text{const}$) in jedem Augenblick $s = s_0$ eine Bewegung mit einer räumlichen Geschwindigkeitsverteilung, die mit derjenigen einer Schraubbewegung um die Achse

$$\frac{1 - b(s_0)\,x_3 - c(s_0)\,x_2}{a(s_0)} = \frac{c(s_0)\,x_1 - a(s_0)\,x_3}{-b(s_0)} = \frac{a(s_0)\,x_2 + b(s_0)\,x_1}{c(s_0)}$$

mit der „Schiebgeschwindigkeit" $\dfrac{|a(s_0)|}{+\sqrt{a^2(s_0) + b^2(s_0) + c^2(s_0)}}$ und der „Drehgeschwindigkeit" $+\sqrt{a^2(s_0) + b^2(s_0) + c^2(s_0)}$ übereinstimmt.

4. (Zu § 34.) Ein Streifen, dessen Kurve C dreimal stetig differenzierbar mit von Null verschiedener Krümmung und Windung ist, heißt „Darboux-Streifen", wenn in jedem Punkt von C die Schmiegkugel von C die Streifenebene berührt. Man beweise: Ein Darboux-Streifen ist durch die Beziehung $b' + ac = 0$ zwischen seinen Invarianten a, b, c charakterisiert.

5. (Zu § 34.) Man beweise, daß die „Gesamtwindung" $\oint \sigma\, ds$ einer geschlossenen, dreimal stetig differenzierbaren, sphärischen Kurve mit von Null verschiedener Krümmung den Wert Null hat.

6. (Zu § 37.) Man beweise, daß ein Darboux-Streifen (vgl. Übungsaufg. 4.!) dadurch charakterisiert ist, daß auf einem solchen Streifen die erste Variation der Gesamtwindung $\int_{s_0}^{s_1} \sigma\, ds$ der Streifenkurve C (im Sinne von § 37!) immer dann verschwindet, wenn für die erste Variation $\delta\mathfrak{x}$ von C $\delta\mathfrak{x}\,\mathfrak{t} = 0$ und

$$(\delta\mathfrak{x})(s_0) = (\delta\mathfrak{x})'(s_0) = (\delta\mathfrak{x})''(s_0) = (\delta\mathfrak{x})(s_1) = (\delta\mathfrak{x})'(s_1) = (\delta\mathfrak{x})''(s_1) = 0$$

gilt. [Anl.: Benutze Übungsaufg. 3. von Kap. 2!].

7. (Zu § 39.) Man beweise durch explizite Nachrechnung, daß bei der Abwicklung eines (zweimal stetig differenzierbaren, mit von Null verschiedener Krümmung vorausgesetzten) räumlichen Kurvenbogens C längs des durch C gehenden Kegels mit der (nicht notwendig auf C liegenden) Spitze $\mathfrak{p}$ der Bogen C in einen (zweimal stetig differenzierbaren) ebenen Kurvenbogen C^* übergeht, dessen Krümmung k^* gleich der geodätischen Krümmung c des Streifens der Tangentialebenen des Kegels längs C ist.

[Hinweis: Man betrachte den Spezialfall, wo eine Tangente von C durch $\mathfrak{p}$ geht, besonders!].

b) Bemerkungen

1. (Zu § 35.) G. Vallette untersucht geschlossene Krümmungsstreifen und findet dafür insbesondere — unter einer geeigneten Konvexitätsvoraussetzung für die Streifenkurve — einen „Vierscheitelsatz", wobei als „Scheitel" Stellen mit stationärer Normalkrümmung definiert werden. („Quelques propriétés globales des rubans de courbure". Bull. Soc. Math. Belg. **15**, 413—427 (1963)).

4. Kapitel

Anfangsgründe der Flächentheorie

Im ersten Kapitel waren die bekanntesten Lehren aus der Krümmungstheorie der Kurven zusammengestellt worden. Im dritten Kapitel hatten wir uns zur Vorbereitung auf die Fragen der Flächentheorie mit den Flächenstreifen beschäftigt. Jetzt wollen wir mit der Lehre von der Krümmung der Flächen beginnen, wie sie nach den ersten Untersuchungen von L. Euler (1707—1783), dann insbesondere von G. Monge (1746—1818) in seinem klassischen Werk „L'application de l'analyse à la géometrie" begründet worden ist, das 1795 zu erscheinen begonnen hat. Die tiefergehenden Gedanken von Gauß „Disquisitiones circa superficies curvas" (1827) werden in dem vorliegenden Kapitel nur zum geringen Teil verwertet und bilden die Grundlage des 6. Kapitels. Die Flächentheorie ist ungleich vielgestaltiger und anziehender als die Theorie der Kurven, bei der alles Wesentliche schon in den Formeln von Frenet steckt.

§ 41. Die erste Grundform

Für die meisten Untersuchungen ist die zweckmäßigste analytische Darstellung krummer Flächen die Parameterform. Wir setzen

$$x_k = x_k(u^1, u^2); \quad k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

oder vektoriell abgekürzt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2). \tag{2}$$

Man spricht von der Gaußschen Parameterdarstellung. Die Funktionen x_k setzen wir als in einem Gebiet U der (u^1, u^2)-Ebene dreimal stetig differenzierbar voraus.

Betrachtet man auf der Fläche die „Parameterlinien" $u^2 = \text{const}$, $u^1 = \text{const}$, die man entsprechend auch u^1-Linien und u^2-Linien nennen kann, so wollen wir die Tangentenvektoren an diese beiden Kurven, nämlich den Vektor

$$\mathfrak{x}_1 \text{ mit den Koordinaten } \frac{\partial x_k}{\partial u^1}$$

und

$$\mathfrak{x}_2 \text{ mit den Koordinaten } \frac{\partial x_k}{\partial u^2}$$

an den betrachteten Stellen der Fläche als linear unabhängig voraussetzen:

$$\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \neq 0. \tag{3}$$

Setzen wir $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$, (u^1, u^2 = stetig differenzierbar mit nicht gemeinsam verschwindenden Ableitungen!), so wird auf unserer Fläche eine Kurve festgelegt, die sich aus

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1(t), u^2(t)) = \mathfrak{x}(t) \tag{4}$$

bestimmt und die den Tangentenvektor:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{x}_1 \frac{du^1}{dt} + \mathfrak{x}_2 \frac{du^2}{dt} = \mathfrak{x}_i \frac{du^i}{dt} \quad ((1)) \tag{5}$$

hat, der nach den Rechenregeln der Einleitung (§ 2 (27)) auf dem Vektorprodukt $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2$ senkrecht steht. Aus $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \neq 0$ folgt also, daß die Tangenten an alle Flächenkurven durch die betreffende Stelle alle zu demselben Vektor (3) senkrecht sind und daher in einer Ebene liegen, der *Tangentialebene* der Fläche an dieser Stelle. Diese Tangentialebene steht senkrecht zum Einheitsvektor der Flächennormalen

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{+\sqrt{(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)^2}}. \tag{6}$$

Für die Bogenlänge s unserer durch (4) gegebenen Kurve erhalten wir nach § 5 (12) die Formel

$$s = \int \overset{+}{\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2}}\, dt = \int \overset{+}{\sqrt{\mathfrak{x}_1^2 \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2) \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \mathfrak{x}_2^2 \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}}\, dt.$$

Führen wir die von Gauß herrührenden Abkürzungen ein:

$$\boxed{E = \mathfrak{x}_1^2 = g_{11},\ F = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = g_{12} = g_{21},\ G = \mathfrak{x}_2^2 = g_{22},} \tag{7}$$

so erhalten wir

$$s = \int \overset{+}{\sqrt{E \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + G \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}}\, dt = \int \overset{+}{\sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}}\, dt.$$

Für das quadrierte Differential ds können wir dann schreiben:

$$ds^2 = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} dt^2. \tag{7a}$$

((1)) Hierbei ist (nach der Summenkonvention von Einstein) über gleiche, unten und oben stehende Indices $i, j, k, \ldots$ von 1 bis 2 zu summieren!

ds ist dabei etwa als „die unendlich kleine Entfernung" oder das „*Bogenelement*" zweier benachbarter, durch die Parameterwerte t und $t + dt$ gegebener Punkte unserer Kurve anzusprechen. Man pflegt (7a) auch in der Form

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \tag{8}$$

zu schreiben. Hieraus wird deutlich, daß der Ausdruck für ds^2 nicht von der Wahl des Parameters t abhängt, mittels dessen die Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ in den Funktionen $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ dargestellt wurde. Er behält seine Form, wenn man für t einen neuen Parameter t^* durch $t = f(t^*)$ auf dieser Kurve einführt (f = stetig differenzierbar mit $\frac{df}{dt^*} \neq 0$). Er behält ebenfalls seine Form nach Einführung einer Parametertransformation $u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*})$ $(i = 1, 2)$ (f_i = stetig differenzierbar und $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial u^{j*}} \right\| \neq 0$) auf U, denn $g_{ij}\, du^i\, du^j = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{l*}} du^{k*}\, du^{l*} = g^*_{kl}\, du^{k*}\, du^{l*}$, falls

$$g^*_{kl} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{l*}} \quad (k, l = 1, 2) \tag{8a}$$

gesetzt wird.

Man nennt nun eine reellwertige Funktion Φ zweier Vektoren der Tangentialebene der Fläche an der Stelle (u^1, u^2), die in beiden Argumenten linear ist ($\Phi(A_1\mathfrak{v}_1 + A_2\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}) = A_1\Phi(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}) + A_2\Phi(\mathfrak{v}_2, \mathfrak{w})$, $\Phi(\mathfrak{v}, B_1\mathfrak{w}_1 + B_2\mathfrak{w}_2) = B_1\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}_1) + B_2\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}_2)$), einen „zweifach kovarianten" Tensor der Fläche im Punkt (u^1, u^2). Gilt überdies $\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \Phi(\mathfrak{w}, \mathfrak{v})$, so heißt Φ „symmetrisch" und $\Psi(\mathfrak{v}) = \Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{v})$ die zugehörige „quadratische Form"; letztere wird (wie Φ) „positiv definit" genannt, falls $\Psi(\mathfrak{v}) > 0$ für alle $\mathfrak{v} \neq 0$ ist. Drücken sich hierbei die Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ mittels der Basis $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\}$ der Vektoren der Tangentialebene aus durch $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{w} = w^i\mathfrak{x}_i$, so gilt für einen derartigen symmetrischen Tensor Φ: $\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \Phi(v^i\mathfrak{x}_i, w^j\mathfrak{x}_j) = \Phi(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j)\, v^i w^j = a_{ij} v^i w^j$ mit $a_{ij} = \Phi(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j) = \Phi(\mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_i) = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2)$, und umgekehrt wird durch einen solchen Ausdruck ein zweifach kovarianter symmetrischer Tensor definiert. Außerdem transformieren sich die „Komponenten" a_{ij} von Φ bei einer Parametertransformation $u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*})$, d.h. bei einer Änderung der Basis $\mathfrak{x}^*_i = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^{i*}} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}} \mathfrak{x}_j$ $(i = 1, 2)$ der Tangentialebenenvektoren nach dem zu (8a) analogen Gesetz

$$a^*_{kl} = \Phi(\mathfrak{x}^*_k, \mathfrak{x}^*_l) = \Phi\left(\frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}} \mathfrak{x}_i, \frac{\partial u^j}{\partial u^{l*}} \mathfrak{x}_j\right) = \Phi(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j) \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{l*}} = a_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{l*}}.$$

Speziell heißt der durch $\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\mathfrak{w}$ definierte zweifach kovariante, symmetrische und positiv definite Tensor „Fundamentaltensor" der

Fläche, zu ihm gehört nach (7) die quadratische Form $\Psi(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} = (v^i \mathfrak{x}_i)\,(v^j \mathfrak{x}_j) = g_{ij} v^i v^j$ und (wegen $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i\, du^i$) die „invariante quadratische Differentialform" $\Psi(d\mathfrak{x}) = g_{ij}\, du^i\, du^j = ds^2$, welche wir im folgenden auch als „erste Grundform" der Fläche bezeichnen wollen. Außer (8) werden wir im nächsten Paragraphen noch eine zweite invariante quadratische Differentialform einführen.

Geht man mit der Abkürzung (7) in den Ausdruck (6) für die Flächennormale hinein, so findet man nach der Identität von Lagrange (§ 2 (28))

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{+\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{+\sqrt{\|g_{ij}\|}}. \tag{9}$$

Als Beispiel nehmen wir eine Gaußsche Parameterdarstellung der Einheitskugel (Fig. 9), bei der wir statt u^1, u^2 lieber ϑ, φ schreiben wollen,

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin\vartheta \cos\varphi, \\ x_2 &= \sin\vartheta \sin\varphi, \\ x_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{10}$$

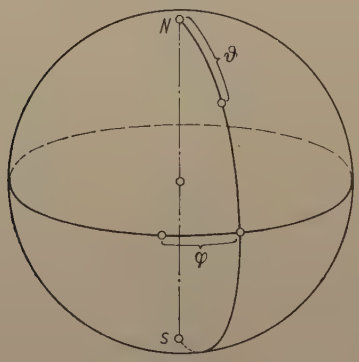


Fig. 9.

ϑ bedeutet die „Poldistanz" vom „Nordpol" $N = (0, 0, 1)$ und φ die „geographische Länge". $\vartheta = \text{const}$ sind die „Breitenkreise", $\varphi = \text{const}$ die „Meridiane". Die Pole sind singuläre Stellen unserer Parameterdarstellung, da $\partial\mathfrak{x} : \partial\varphi$ für $\vartheta = 0,\ \pi$ verschwindet, also die Bedingung (3) nicht mehr erfüllt ist. Diese Bedingung scheidet also nicht nur singuläre Stellen der Fläche aus, wie etwa die Spitze eines Drehkegels, sondern auch Singularitäten der Parameterdarstellung. Für das Bogenelement unserer Kugel erhält man

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta (d\varphi)^2, \tag{11}$$

für den Normaleneinheitsvektor

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{x}. \tag{12}$$

§ 42. Die zweite Grundform

Betrachten wir längs unserer Kurve (4) (mit jetzt als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzten Funktionen u^1, u^2) auch die Flächennormalen

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\big(u^1(t), u^2(t)\big) = \mathfrak{n}(t),$$

so ist durch die Funktionen $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{n}\}$ ein *Flächenstreifen* bestimmt, auf den wir die Formeln unseres Kapitels 3 anwenden können. Denken wir uns als Parameter t insbesondere die Bogenlänge s der Kurve (4) gewählt, so ist nach § 33 (8) die *Normalkrümmung* b unseres Streifens durch

$$-b = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = \frac{1}{ds^2}(d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{n}) \tag{13}$$

gegeben. Setzen wir

$$L = -(\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_1) = L_{11},\quad 2M = -(\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_1) = 2L_{12} = 2L_{21}, \tag{14}$$
$$N = -(\mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_2) = L_{22},$$

so erhalten wir mittels (5) und

$$d\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1\, du^1 + \mathfrak{n}_2\, du^2 = \mathfrak{n}_i\, du^i\text{:} \tag{14a}$$

$$-(d\mathfrak{x}\ d\mathfrak{n}) = L(du^1)^2 + 2M\, du^1\, du^2 + N(du^2)^2 = L_{ij}\, du^i\, du_j. \tag{15}$$

Wegen der Invarianz von b und dem in (8) schon ermittelten ds^2 ist nach (13) der Ausdruck (15) eine neue invariante quadratische Differentialform unserer Fläche, die sogenannte „*zweite Grundform*" der Fläche. Sie gehört zu dem durch $\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = -L(\mathfrak{v})\,\mathfrak{w}$ definierten zweifach kovarianten Tensor, wobei L die durch $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i \to L(\mathfrak{v}) = v^i\mathfrak{n}_i$ gegebene „lineare Abbildung" der Tangentialvektoren ist ($L(\mathfrak{v})$ liegt wegen $2\mathfrak{n}\mathfrak{n}_i = \frac{\partial}{\partial u^i}(\mathfrak{n}^2) = 0$ $(i = 1, 2)$ in der Tangentialebene!). Dieser Tensor ist symmetrisch, denn die Formeln (14) kann man auch anders schreiben. Leitet man nämlich die Identitäten

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{n} = 0,\quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{n} = 0$$

nach u^2 und u^1 ab, so folgt

$$\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_2 = 0,\ \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_1 = 0 \tag{16}$$

und somit

$$-\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_2 = -\mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{n} = M = L_{12} = L_{21} = \Phi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \Phi(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1). \tag{17}$$

Leitet man die gleichen Identitäten nach u^1 und u^2 ab, so wird

$$\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_1 = 0,\quad \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{n} + \mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_2 = 0.$$

Man findet nach (14)

$$L = \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{n} = L_{11},\ N = \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{n} = L_{22}.$$

Führt man aus (9) den Ausdruck für $\mathfrak{n}$ ein, so erhält man schließlich

$$(18)\qquad \boxed{\begin{aligned} L_{11} &= -\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_1 = \frac{(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)}{\sqrt{\|g_{ij}\|}}, \\ L_{12} = L_{21} &= -\mathfrak{x}_1\mathfrak{n}_2 = -\mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_1 = \frac{(\mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)}{\sqrt{\|g_{ij}\|}}, \\ L_{22} &= -\mathfrak{x}_2\mathfrak{n}_2 = \frac{(\mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)}{\sqrt{\|g_{ij}\|}}. \end{aligned}}$$

Wir haben jetzt die beiden Grundformen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} I &= g_{ij}\, du^i\, du^j \\ II &= L_{ij}\, du^i\, du^j. \end{aligned}$$

§ 43. Sätze von Meusnier und Euler

Nach Formel (11) und (12) des § 34 ist die Normalkrümmung b unseres im vorigen Abschnitt betrachteten Streifens auf unserer Fläche auch durch

$$(19a)\qquad b = \frac{\mathfrak{h}\mathfrak{n}}{\varrho}$$

gegeben. Hierbei ist $\mathfrak{h}$ die Hauptnormale und $1:\varrho$ die (als positiv vorausgesetzte) Krümmung der Kurve unseres Streifens. Nach (13) und (15) haben wir auch $b = II : I$, somit nach (19):

$$\frac{\mathfrak{h}\mathfrak{n}}{\varrho} = \frac{II}{I} = \frac{L_{ij}\, du^i\, du^j}{g_{ij}\, du^i\, du^j}.$$

Diese Formel enthält eine Reihe geometrischer Sätze. Zunächst: *Alle Flächenkurven, die durch denselben Flächenpunkt gehen und hier dieselbe Tangente und (nicht in der Tangentialebene der Fläche liegende) Hauptnormale haben, besitzen dort auch gleiche Krümmung*[1]. Um die Verteilung der Krümmungen der Flächenkurven in einem Flächenpunkt kennenzulernen, genügt es also, die ebenen Schnitte der Fläche zu untersuchen.

Betrachten wir jetzt alle ebenen Schnitte durch unseren Flächenpunkt, die hier noch eine Flächentangente gemein haben. Ist θ der Winkel der Schnittkurvenhauptnormale mit der Flächennormalen, also $\mathfrak{h}\mathfrak{n} = \cos\theta$, so wird

$$(20)\qquad \frac{\cos\theta}{\varrho} = \text{const}.$$

[1] Diese Behauptung ist ohne den Klammerzusatz falsch, wie das Gegenbeispiel von ebenen Kurven zeigt!

Setzen wir hierin $\theta = 0$ bzw. π, bekommen wir als Wert der Konstanten die (mit einem Vorzeichen versehene) Krümmung $1 : R$ des Normalschnitts ($-\infty \leqq R \leqq +\infty$, $R \neq 0$). Also

$$\boxed{\frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{1}{R},\quad \varrho = R\cos\theta} \tag{21}$$

Darin steckt der „Satz von Meusnier" (1776):

Die Krümmungskreise aller ebenen Schnitte durch dasselbe Linienelement der Fläche liegen auf einer Kugel. Oder: Alle zugehörigen Krümmungsachsen (vgl. § 13!) bilden ein Büschel (liegen in einer Ebene und gehen durch einen Punkt). Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die Differentiale du^1 und du^2 des Linienelementes der Gleichung $II = 0$ genügen. Auf diesen Fall kommen wir am Ende des § 52 zurück.

Legen wir alle Schnitte senkrecht zur Zeichenebene durch ein Linienelement, das in $\mathfrak{x}$ auf der Zeichenebene senkrecht steht, so gibt Fig. 10 ein Bild des Satzes von Meusnier.

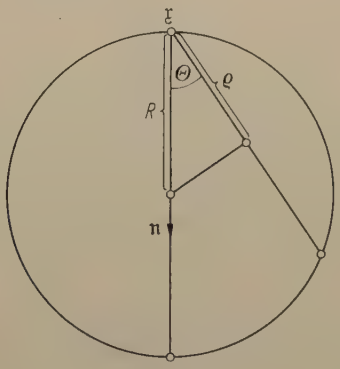


Fig. 10.

Nach (21) und (19) bekommen wir für die Krümmungen der Normalschnitte

$$\frac{1}{R} = b = \frac{II}{I}. \tag{22}$$

Dabei ist $R > 0$, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der Seite des Flächenpunktes liegt, nach der die Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ hinweist. Im entgegengesetzten Fall ist $R < 0$.

Da $I = ds^2 > 0$ ist, hängt das Vorzeichen von R nur von dem von II ab. Wir haben zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem dieses Zeichen mit der Änderung von $du^1 : du^2$ festbleibt oder wechselt. Ist $\|L_{ij}\| > 0$, so hat II festes Zeichen: die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ liegen auf derselben Seite von

$\mathfrak{x}$. Man sagt, die Fläche ist im Punkt $\mathfrak{x}$ *elliptisch gekrümmt.* (Beispiel: alle Punkte eines Ellipsoids). Ist $\|L_{ij}\| = 0$, so haben wir zwar noch keinen Zeichenwechsel von $1 : R$, aber eine einzige bzw. lauter reelle Nullrichtungen ($II = 0$), je nachdem L_{11}, L_{12}, L_{22} nicht alle bzw. alle Null sind. Man spricht von einem *parabolischen* Flächenpunkt. Endlich ist $\|L_{ij}\| < 0$ kennzeichnend für *hyperbolische* Krümmung.

Deutlicher werden diese Verhältnisse, wenn wir eine besondere Parameterdarstellung benutzen: $x_1 = u^1$, $x_2 = u^2$, $x_3 = f(u^1, u^2)$. Legen wir unseren Flächenpunkt in den Ursprung, seine Tangentialebene in die x_1, x_2-Ebene, so sieht die Taylorsche Formel von f so aus:

$$x_3 = \frac{1}{2}(rx_1^2 + 2sx_1x_2 + tx_2^2) + A(x_1, x_2) \tag{23}$$

mit

$$\lim_{x_1^2+x_2^2\to 0} \frac{|A(x_1, x_2)|}{x_1^2 + x_2^2} = 0^{((1))}.$$

Ferner wird im Ursprung $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$; $L_{11} = r$, $L_{12} = s$, $L_{22} = t$; also ist nach (22)

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi, \tag{24}$$

wenn φ den Winkel der Tangentenrichtung im Ursprung mit der x_1-Achse bedeutet. Setzt man

$$\sqrt{|R|}\cos\varphi = y_1, \qquad \sqrt{|R|}\sin\varphi = y_2,$$

so wird

$$ry_1^2 + 2sy_1y_2 + ty_2^2 = \pm 1 \tag{25}$$

die Gleichung eines Kegelschnitts (oder eines Geradenpaares), den man als *Indikatrix* von Dupin bezeichnet (Fig. 11). Dieser Kegelschnitt mit dem Ursprung als Mittelpunkt wird nach (23) durch ähnliche Abbilder

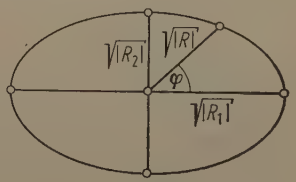


Fig. 11.

(1)) r bzw. s bzw. t sind Abkürzungen für die Werte von $\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{\partial u^1\,\partial u^2}$ bzw. $\frac{\partial^2 f}{(\partial u^2)^2}$ im Ursprung.

der Schnittkurven unserer Fläche mit Ebenen $x_3 = \text{const}$ für kleines $|x_3|$ angenähert.

Aus unserer Taylor-Formel folgt, daß bei elliptischer Krümmung ($rt - s^2 > 0$) die Fläche in der Umgebung des Ursprungs eine Seite der Tangentialebene $x_3 = 0$ ganz freiläßt, während bei hyperbolischer Krümmung ($rt - s^2 < 0$) die Tangentialebene die Fläche in beliebiger Nähe des Ursprungs durchschneidet. Man kann sich über solche hyperbolischen Flächenqunkte am besten an dem Beispiel $x_3 = x_1 x_2$ ein Bild machen. Weist die x_3-Achse nach oben, so liegen in den beiden Winkelräumen $x_1 x_2 > 0$ die Berge und in $x_1 x_2 < 0$ die Täler, die im Ursprung einen Sattel bilden.

Schließen wir den parabolischen Fall aus (nehmen also die Voraussetzung $rt - s^2 \neq 0$ als erfüllt an), so können wir die Achsen der Indikatrix als x_1, x_2-Achsen wählen. Dann wird $s = 0$, und (24) bekommt die Form

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}}. \tag{26}$$

Das ist die Formel von Euler, die die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes aus den „*Hauptkrümmungen*" $1 : R_1$ und $1 : R_2$ herzuleiten gestattet. Dabei sind die Hauptkrümmungen die Krümmungen der Normalschnitte durch die Achsen der Indikatrix von Dupin. Als „Schmiegtangenten" oder „Asymptoten" der Fläche bezeichnet man (im Falle $rt - s^2 < 0$) die Asymptoten der Indikatrix.

Im parabolischen Fall $rt - s^2 = 0$ ist entweder $r = s = t = 0$ und damit nach (24) die Normalschnittkrümmung $\frac{1}{R}$ identisch 0 (man spricht infolgedessen von einem „*Flachpunkt*" der Fläche!) oder aber mindestens eine der drei Größen r, s, t ist im betrachteten Flächenpunkt von 0 verschieden. Jetzt haben wir $|s| = \overset{+}{\sqrt{|r|}}\,\overset{+}{\sqrt{|t|}}$, und damit nimmt (25) die Gestalt

$$\left(\overset{+}{\sqrt{|r|}}\, y_1 + \operatorname{sign} r \cdot \operatorname{sign} s\, \overset{+}{\sqrt{|t|}}\, y_2\right)^2 = 1$$

oder

$$\overset{+}{\sqrt{|r|}}\, y_1 + \operatorname{sign} r \cdot \operatorname{sign} s\, \overset{+}{\sqrt{|t|}}\, y_2 = \pm 1$$

an. Die Indikatrix stellt also ein Paar paralleler Geraden dar. Wählt man die Richtung dieser Geraden als x_1-Richtung, so folgt $r = s = 0$, $t \neq 0$, d.h. nach (24)

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}$$

mit $t = \frac{1}{R_2}$. Die Formel (26) gilt also in jedem Falle, wenn — abweichend zum vorhin Gesagten — $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ als die beiden Extremwerte von $\frac{1}{R}$ definiert werden.

§ 44. Hauptkrümmungen

Wir bezeichnen im folgenden

$$\frac{1}{R_2} = \max \frac{1}{R} = \max \frac{L_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j} = \max_{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}=1} L_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \tag{27a}$$

$$\frac{1}{R_1} = \min \frac{1}{R} = \min \frac{L_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j} = \min_{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}=1} L_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} \tag{27b}$$

$$(-\infty \leqq R_1 \leqq +\infty, -\infty \leqq R_2 \leqq +\infty, R_1 \neq 0, R_2 \neq 0)$$

(vgl. (22) und (19)!) als die Hauptkrümmungen der Fläche (in Übereinstimmung mit der im nichtparabolischen Fall mittels der Indikatrix gegebenen Erklärung im vorigen Paragraphen!). Ihre Werte lassen sich als Extrema unter Nebenbedingungen nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel leicht berechnen. Wir brauchen dazu wegen (27) nur die partiellen Ableitungen der Funktion $L_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} - \lambda g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}$ nach $\frac{du^1}{dt}$ und $\frac{du^2}{dt}$ gleich 0 zu setzen und den konstanten Parameter λ aus dem entstehenden Gleichungssystem

$$2(L_{ij} - \lambda g_{ij})\frac{du^j}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{28}$$

und der Nebenbedingung

$$g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 1 \tag{29}$$

zu eliminieren. Nun folgt aus (28), weil $\frac{du^1}{dt}$ und $\frac{du^2}{dt}$ wegen dieser Nebenbedingung nicht zusammen verschwinden können:

$$\|L_{ij} - \lambda g_{ij}\| = 0.$$

Führt man noch die durch

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \qquad (i, k = 1, 2) \tag{30}$$

definierte, zur „Matrix" (g_{ij}) mit den Elementen $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ (vgl. (7)!) „inverse Matrix" (g^{ij}) mit den Elementen

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\|g_{ij}\|} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{\|g_{ij}\|} = \frac{-F}{EG - F^2}, \tag{31}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{\|g_{ij}\|} = \frac{E}{EG - F^2}$$

ein[1] ($EG - F^2 = \|g_{ij}\| = (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)^2 > 0$ auf Grund von (7), § 2 (28) und (3)!), so erweist sich die letzte Bedingung nach dem Determinantenmultiplikationssatz (vgl. § 22 (0)!) und nach (30) als äquivalent mit

$$(32) \quad \|L_{ij} - \lambda g_{ij}\| \cdot \|g^{jk}\| = \|(L_{ij} - \lambda g_{ij})\, g^{jk}\| = \|L_{ij} g^{jk} - \lambda \delta_i^k\| = 0.$$

Hierbei haben wir mit dem „Kroneckerschen Symbol" δ_i^k die Elemente der „Einheitsmatrix" bezeichnet, d.h. es ist

$$(33) \qquad \delta_1^1 = \delta_2^2 = 1, \quad \delta_1^2 = \delta_2^1 = 0.$$

Nach (32) muß das zu einem Extremwert von $\frac{1}{R}$ gehörende λ Wurzel der quadratischen Gleichung $z^2 - L_{ij} g^{ji} z + \|L_{ij} g^{jk}\| = 0$ sein. Andererseits ergibt die Multiplikation von (28) mit den zu einer Extremumstelle gehörenden $\frac{du^i}{dt}$ und anschließende Summation über i wegen (29) die Beziehung $L_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = \lambda g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = \lambda$, d.h. λ muß gleich einem der beiden Extremwerte $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ von $\frac{1}{R}$ sein. Wir erhalten also schließlich als Resultat: *Die Hauptkrümmungen* $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ *der Fläche sind Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$(34) \qquad z^2 - L_{ij} g^{ij} z + \|L_{ij} g^{jk}\| = 0,$$

und umgekehrt stellt jede Wurzel von (34) *eine Hauptkrümmung der Fläche dar* (Rückrechnung!).

Somit ergeben sich für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen die Werte

$$(35) \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{R^1} + \frac{1}{R^2} &= L_{ij} g^{ij} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \\ \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} &= \|L_{ij} g^{jk}\| = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}}$$

Man setzt auch

$$(36) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2H, \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = K$$

und nennt H die *mittlere Krümmung* und K das *Gaußsche Krümmungsmaß* der Fläche. Diese beiden „Krümmungen" treten bei Flächen an die

[1] Wie wir später sehen werden, sind die g^{ij} die Komponenten eines „zweifach kontravarianten Tensors", welche sich nach dem zu (8a) „inversen" Gesetz $g^{kl*} = g^{ij} \frac{\partial u^{k*}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{l*}}{\partial u^j}$ transformieren.

Stelle der einzigen Krümmung bei Kurven. Es ist schon deshalb bequemer, an Stelle von $1:R_1$, $1:R_2$ die symmetrischen Verbindungen H, K einzuführen, weil diese aus den beiden Grundformen rational zu berechnen sind.

H wechselt nach (18) das Zeichen, wenn sich nach einer „ungleichsinnigen" Parametertransformation $u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*})$ mit $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial u^{j*}} \right\| < 0$, d.h. Änderung der „Orientierung" der Fläche, der Flächennormaleneinheitsvektor $\mathfrak{n}$ wegen (6) umkehrt (d.h. $\mathfrak{n}^* = -\mathfrak{n}$ wird), während K von der Orientierung der Fläche nicht abhängt. Nach § 43 ist $K > 0$ für einen Flächenpunkt mit elliptischer, $K = 0$ für einen Flächenpunkt parabolischer Krümmung und $K < 0$ für hyperbolische Krümmung.

§ 45. Das Gaußsche Theorema egregium

Daß K von der zweiten Grundform der Fläche nicht abhängt, sieht man am deutlichsten, wenn man in

$$K = \frac{\|L_{ij}\|}{W^2} \qquad (W = \sqrt{\|g_{ij}\|})$$

für L_{11}, L_{22}, L_{12} die Werte aus (18) einsetzt:

$$K = \frac{1}{W^4}\{(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)(\mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - (\mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)^2\}. \tag{37}$$

Man kann nun, wenn man auf den Klammerausdruck zweimal den Multiplikationssatz für Determinanten anwendet, leicht das berühmte Ergebnis von Gauß herleiten, daß K allein aus g_{11}, g_{12}, g_{22} und den Ableitungen dieser Funktionen nach u^1, u^2 bis zur zweiten Ordnung bestimmbar ist. Man findet

$$K = \frac{1}{W^4}\left\{\begin{vmatrix} (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22}) & (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_1) & (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_2) \\ (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_{22}) & g_{11} & g_{12} \\ (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_{22}) & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{12}^2 & (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_1) & (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_2) \\ (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_1) & g_{11} & g_{12} \\ (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_2) & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

oder

$$K = \frac{1}{W^4}\left\{\begin{vmatrix} \{(\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22}) - \mathfrak{x}_{12}^2\} & (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_1) & (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_2) \\ (\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_{22}) & g_{11} & g_{12} \\ (\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_{22}) & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_1) & (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_2) \\ (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_1) & g_{11} & g_{12} \\ (\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_2) & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}\right\}. \tag{38}$$

Aus der Definition

$$\mathfrak{x}_1^2 = g_{11},\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = g_{12},\ \mathfrak{x}_2^2 = g_{22}$$

folgt aber durch Ableitung

$$\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_1 = \frac{1}{2} g_{11,1}, \tag{39a}$$

$$\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_1 = \frac{1}{2} g_{11,2}; \tag{39b}$$

$$\mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_2 = \frac{1}{2} g_{22,2}, \tag{39c}$$

$$\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_2 = \frac{1}{2} g_{22,1}; \tag{39d}$$

$$\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_2 = g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2}, \tag{40a}$$

$$\mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_1 = g_{12,2} - \frac{1}{2} g_{22,1}. \tag{40b}$$

Leitet man (39d) nach u^1 und (40a) nach u^2 ab, so erhält man durch nachträgliches Abziehen

$$\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} - \mathfrak{x}_{12}^2 = -\frac{1}{2} g_{22,11} + g_{12,12} - \frac{1}{2} g_{11,22}. \tag{41}$$

Damit ist in (38) alles durch g_{11}, g_{12}, g_{22} ausgedrückt:

$$W^4 \cdot K = \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2} g_{22,11} + g_{12,12} - \frac{1}{2} g_{11,22}\right) & \frac{1}{2} g_{11,1} & \left(g_{12,1} - \frac{1}{2} g_{11,2}\right) \\ \left(g_{12,2} - \frac{1}{2} g_{22,1}\right) & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2} g_{22,2} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} g_{11,2} & \frac{1}{2} g_{22,1} \\ \frac{1}{2} g_{11,2} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2} g_{22,1} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

In dieser einfachen und naheliegenden Art ist das berühmte Gaußsche Ergebnis von R. Baltzer hergeleitet worden[1]. Gauß selbst ist 1826 durch sehr langwierige Rechnungen zu einer gleichwertigen Formel gekommen[2]. Ihre geometrische Deutung soll erst später (§ 76) erörtert werden.

---

[1] Baltzer, R.: Ableitungen der Gaußschen Formeln für die Flächenkrümmung. Leipziger Ber., math.-phys. Klasse **18**, 1–6 (1866).

[2] Vgl. Stäckel, P.: Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, V: Gauß als Geometer (1918), bes. S. 120–125. Ferner im folgenden § 82.

§ 46. Krümmungslinien

Die Gleichungen (28) oder

$$\begin{aligned}\left(L_{11}\frac{du^1}{dt}+L_{12}\frac{du^2}{dt}\right)-\lambda\left(g_{11}\frac{du^1}{dt}+g_{12}\frac{du^2}{dt}\right)=0,\\ \left(L_{12}\frac{du^1}{dt}+L_{22}\frac{du^2}{dt}\right)-\lambda\left(g_{12}\frac{du^1}{dt}+g_{22}\frac{du^2}{dt}\right)=0\end{aligned}\tag{43}$$

ergeben, wenn man λ eliminiert, für die „*Hauptrichtungen*" auf der Fläche, die den Achsen der Indikatrix entsprechen, in $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} L_{11}\frac{du^1}{dt}+L_{12}\frac{du^2}{dt} & g_{11}\frac{du^1}{dt}+g_{12}\frac{du^2}{dt}\\ L_{12}\frac{du^1}{dt}+L_{22}\frac{du^2}{dt} & g_{12}\frac{du^1}{dt}+g_{22}\frac{du^2}{dt}\end{vmatrix}=0\tag{44}$$

oder

$$\begin{aligned}(L_{11}g_{12}-L_{12}g_{11})(du^1)^2+(L_{11}g_{22}-L_{22}g_{11})\,du^1\,du^2\\ +(L_{12}g_{22}-L_{22}g_{12})\,(du^2)^2=0\end{aligned}\tag{45}$$

oder endlich

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1\,du^2 & (du^1)^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ L_{11} & L_{12} & L_{22}\end{vmatrix}=0.\tag{46}$$

Eine Kurve auf einer Fläche, deren Richtung in jedem Flächenpunkt mit einer zugehörigen Hauptrichtung zusammenfällt, nennt man „*Krümmungslinie*". Da die Indikatrix im allgemeinen genau zwei reelle Achsen hat, gehen durch einen Flächenpunkt im allgemeinen zwei reelle aufeinander senkrechte Krümmungslinien. (44), (45), (46) sind verschiedene Formen der Differentialgleichung dieses rechtwinkligen Kurvennetzes auf der Fläche.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Flächenstreifen längs der Krümmungslinien die einzigen auf der Fläche vorhandenen Krümmungsstreifen im Sinne des § 35 sind. Dort war für einen Krümmungsstreifen die Bedingung

$$\left(\mathfrak{n},\frac{d\mathfrak{x}}{dt},\frac{d\mathfrak{n}}{dt}\right)=0\tag{47}$$

als kennzeichnend nachgewiesen. Wir müssen zeigen, daß die Bedingung (47) mit jeder der eben abgeleiteten Bedingungen (44) bis (46) äquivalent ist. In der Tat! Nach § 2 (26) folgt aus (47) die lineare Abhängigkeit

$$\alpha\mathfrak{n}+\beta\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\gamma\frac{d\mathfrak{n}}{dt}=0\tag{48}$$

der in der Determinante stehenden Vektoren. Hier dürfen α, β und γ nicht gleichzeitig verschwinden. Da aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ $\mathfrak{n}\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = 0$ folgt und da überdies nach § 41 (5) $\mathfrak{n}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = 0$ gilt, so erhält man aus (48) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$, daß α verschwinden muß. Multipliziert man die übrigbleibende Gleichung

$$\beta\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \gamma\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = 0 \tag{49}$$

skalar einmal mit $\mathfrak{x}_1$ und zweitens mit $\mathfrak{x}_2$, so erhält man nach (5) und (14a) die beiden Gleichungen

$$\beta\left(g_{11}\frac{du^1}{dt} + g_{12}\frac{du^2}{dt}\right) - \gamma\left(L_{11}\frac{du^1}{dt} + L_{12}\frac{du^2}{dt}\right) = 0,$$

$$\beta\left(g_{12}\frac{du^1}{dt} + g_{22}\frac{du^2}{dt}\right) - \gamma\left(L_{12}\frac{du^1}{dt} + L_{22}\frac{du^2}{dt}\right) = 0.$$

Da dieses Gleichungssystem in nicht gleichzeitig verschwindenden β und γ lösbar sein soll, muß die Determinante verschwinden. Das führt aber gerade auf (44), w.z.b.w.

Auf Grund der in § 35 angegebenen Eigenschaft der Krümmungsstreifen haben wir den Satz: *Eine Flächenkurve ist genau dann Krümmungslinie der Fläche, wenn die Flächennormalen längs der Kurve eine Torse bilden.*

Führen wir das orthogonale Netz der Krümmungslinien — falls es existiert — als Parameterkurven u^1, $u^2 = \text{const}$ ein, so muß zunächst $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = g_{12} = 0$ sein und nach (45) $L_{12}g_{11} = 0$, $L_{12}g_{22} = 0$; also, da nach (7) und (3) $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ gilt, muß $L_{12} = 0$ sein.

$$g_{12} = L_{12} = 0 \tag{50}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß das orthogonale Netz der Krümmungslinien Parameternetz ist.

Aus (49) sehen wir, daß für die auf Krümmungslinienparameter bezogene Fläche Gleichungen der Form

$$\beta_1\mathfrak{x}_1 + \gamma_1\mathfrak{n}_1 = 0, \beta_2\mathfrak{x}_2 + \gamma_2\mathfrak{n}_2 = 0 \tag{51}$$

gelten müssen. Da nach (3) $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ nicht verschwinden dürfen, sind dabei γ_1 und $\gamma_2 \neq 0$. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\mathfrak{x}_1$ und die zweite mit $\mathfrak{x}_2$, so ergibt sich

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{L_{11}}{g_{11}}, \quad \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \frac{L_{22}}{g_{22}}.$$

Nach (35) sind diese Quotienten für den Fall $g_{12} = F = 0$ aber nichts anderes als die Hauptkrümmungen $1 : R_1$ und $1 : R_2$ der Fläche. Wir

können also nach (51) etwa

$$\mathfrak{n}_1 = -\frac{1}{R_1}\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{n}_2 = -\frac{1}{R_2}\mathfrak{x}_2 \tag{52}$$

setzen. Die Gleichungen (52) pflegt man nach Olinde Rodrigues (1816) zu benennen. Aus ihrer Herleitung folgt, daß sie auch isoliert in einem „Nabelpunkt" (§ 47) der Fläche gelten, falls sich dort die Parameterkurven senkrecht schneiden.

Auf einer Drehfläche kann man sofort die Krümmungslinien ermitteln. Es sind das nämlich die Parallelkreise und Meridiane der Fläche; denn die aus den Normalen längs dieser Kurven gebildeten geradlinigen Flächen sind Torsen im Sinne von § 35. Von den beiden zu einem Punkt einer Drehfläche gehörigen „Hauptkrümmungsmittelpunkten" ist der eine Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Meridians, der zweite liegt auf der Drehachse (Fig. 12). Letzteres kann man einsehen, wenn man bedenkt, daß die Normalenfläche längs des Parallelkreises ein Drehkegel ist, oder auch mit Hilfe des Satzes von Meusnier (vgl. Fig. 10).

Nehmen wir jetzt die Fläche wieder als in allgemeinen Parametern gegeben an, so können wir die Differentialgleichung der Krümmungslinien nach (47) wegen (5) und (14a) in der Form schreiben:

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_1)\,(du^1)^2 + [(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_2) + (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_1)]\,du^1\,du^2 + (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_2)\,(du^2)^2 = 0. \tag{53}$$

Da diese Gleichung zur Bestimmung von $\frac{du^1}{dt} : \frac{du^2}{dt}$ mit (45) äquivalent sein muß, muß ihre linke Seite bis auf einen Faktor λ mit der von (45) übereinstimmen. Die Faktoren von $(du^1)^2$, $du^1\,du^2$ und $(du^2)^2$ in (53) sind also bis auf einen gemeinsamen Faktor λ gleich den entsprechenden in

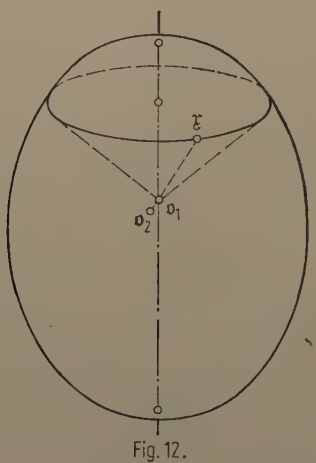


Fig. 12.

(45). So haben wir z.B. für die Faktoren von $(du^1)^2$ und $(du^2)^2$

$$(54) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_1) &= \lambda(L_{11}g_{12} - L_{12}g_{11}), \\ (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_2) &= \lambda(L_{12}g_{22} - L_{22}g_{12}). \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln können wir leicht den folgenden geometrischen Satz ableiten: *Betrachten wir in einem Flächenpunkt irgend zwei in senkrechten Richtungen auslaufende Kurven, so sind in ihm die geodätischen Windungen* (vgl. § 34) a_1 *und* a_2 *der zu den Kurven gehörigen Flächenstreifen entgegengesetzt gleich.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn wir die beiden Kurven als u^1- und u^2-Kurven eines senkrechten Parameternetzes annehmen. Dann können wir $g_{12} = 0$ ansetzen und erhalten aus (54):

$$(55) \qquad \frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_1)}{g_{11}} = -\frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_2)}{g_{22}}.$$

Die Ausdrücke der beiden Brüche sind nach § 35 $(25)_1$ aber gerade die geodätischen Windungen a_1 und a_2 unserer beiden Kurven, denn

$$\sqrt[+]{g_{11}}\, du^1 \quad \text{und} \quad \sqrt[+]{g_{22}}\, du^2$$

sind nach (8) die Bogenelemente ds_1 und ds_2 unserer beiden Kurven $du^2 = 0$ und $du^1 = 0$. Bezeichnen wir dann mit

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds_1}, \frac{d\mathfrak{n}}{ds_1} \quad \left(\text{und entsprechend } \frac{d\mathfrak{x}}{ds_2}, \frac{d\mathfrak{n}}{ds_2}\right)$$

die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ längs unserer u^1-Kurve (bzw. u^2-Kurve) nach der Bogenlänge, so können wir wegen $d\mathfrak{x} : ds_1 = \mathfrak{x}_1 : \sqrt[+]{g_{11}}$ usw. die Gleichung (55) in der Form schreiben:

$$\left(\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{x}}{ds_1}, \frac{d\mathfrak{n}}{ds_1}\right) = -\left(\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{x}}{ds_2}, \frac{d\mathfrak{n}}{ds_2}\right),$$

woraus nach § 35 $(25)_1$ unsere Behauptung erwiesen ist.

§ 47. Nabelpunkte

Nach (19) und (46) ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien immer dann identisch erfüllt, wenn die beiden Grundformen *I*, *II* sich nur um einen Faktor unterscheiden, wenn also nach (22) die Krümmungen aller Normalschnitte durch den Flächenpunkt übereinstimmen. Einen solchen Flächenpunkt nennt man *Nabel*. Eine Ebene und eine Kugel bestehen offenbar nur aus Nabelpunkten. Hier lassen sich alle Kurven als Krümmungslinien ansehen, was auch daraus hervorgeht, daß die Normalenflächen längs beliebiger Kurven auf diesen Flächen Zylinder oder Kegel, also Torsen sind.

Es fragt sich, ob die Kugeln (mit Einschluß der Ebenen) durch die Eigenschaft, nur Nabelpunkte zu enthalten, gekennzeichnet sind. Wenn alle Punkte einer Fläche Nabelpunkte sind, ist nach dem eben Gesagten jede Kurve auf der Fläche Krümmungslinie. Damit folgt aus (52) für ein beliebiges orthogonales Parameternetz (u^1, u^2) der Fläche

$$\mathfrak{n}_1 = -\frac{1}{R}\mathfrak{x}_1; \quad \mathfrak{n}_2 = -\frac{1}{R}\mathfrak{x}_2. \tag{56}$$

Leitet man die erste Formel nach u^2, die zweite nach u^1 ab, so findet man durch Abziehen

$$\left(\frac{1}{R}\right)_2 \mathfrak{x}_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_1 \mathfrak{x}_2 = 0. \tag{57}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ gibt (57)

$$\left(\frac{1}{R}\right)_1 = \left(\frac{1}{R}\right)_2 = 0 \text{ oder } \frac{1}{R} = \text{const},$$

und durch Integration von (56) erhält man das Ergebnis $\mathfrak{n} = -\frac{1}{R}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}$. Das heißt aber, die Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ ist entweder ein Stück einer Kugel mit dem Mittelpunkt $R\mathfrak{v}$ und dem Radius $|R|$ (falls $\frac{1}{R} \neq 0$) oder einer Ebene (falls $\frac{1}{R} = 0$).

Damit ist gezeigt:

Die Kugelstücke mit Einschluß der Ebenenstücke sind die einzigen nur aus Nabeln bestehenden Flächen.

§ 48. Satz von Dupin über rechtwinklige Flächennetze

Die Ermittlung der Krümmungslinien auf manchen Flächen (z. B. auf den Flächen zweiter Ordnung), also die Integration der Differentialgleichung (46) gelingt in besonderen Fällen mittels eines schönen Satzes von Ch. Dupin. Wir denken uns die Koordinaten x_k eines Punktes im Raum als dreimal stetig differenzierbare Funktionen von drei Parametern dargestellt:

$$x_k = x_k(u^1, u^2, u^3) \quad (k = 1, 2, 3), \tag{58}$$

wofür wir zur Abkürzung wieder vektoriell

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2, u^3)$$

schreiben werden. Dann nennt man u^1, u^2, u^3 *„krummlinige Koordinaten"* im Raum, wenn die Gleichungen (58) nach den u^1, u^2, u^3 dreimal stetig differenzierbar auflösbar sind und damit die Funktionaldeterminante der x_1, x_2, x_3 nach u^1, u^2, u^3 nirgends verschwindet. Wir wollen nun insbesondere annehmen, je zwei der Flächen $u^1, u^2, u^3 = \text{const}$ sollen sich längs ihrer Schnittlinie senkrecht durchschneiden. Dann bilden die drei Flä-

chenscharen ein *rechtwinkliges Flächennetz* oder, wie man auch sagt, ein *dreifaches Orthogonalsystem.*

Nehmen wir z.B. Polarkoordinaten

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$$x_3 = r \cos\vartheta,$$

so sind die Flächen $r = \text{const} > 0$ konzentrische Kugeln, $\vartheta = \text{const} \neq 0, \pi$ Drehkegel und $\varphi = \text{const}$ Ebenen. Diese drei Flächenscharen bilden ein rechtwinkliges Flächennetz.

Als Bedingungen dafür in den Parametern u^1, u^2, u^3 bekommen wir

$$\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \tag{59}$$

wo z.B. $\mathfrak{x}_1$ den Vektor mit den Koordinaten $\partial x_k : \partial u^1$ bedeutet. Das quadrierte Bogenelement $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\mathfrak{x}^2$ des Raumes nimmt bei einem dreifachen Orthogonalsystem wegen (59) die Gestalt an

$$ds^2 = \mathfrak{x}_1^2(du^1)^2 + \mathfrak{x}_2^2(du^2)^2 + \mathfrak{x}_3^2(du^3)^2.$$

Es gilt nun folgender Satz aus Ch. Dupins Hauptwerk: „Développements de géometrie" (Paris 1813):

Die Flächen eines rechtwinkligen Netzes durchschneiden sich paarweise in Krümmungslinien.

Zum Beweise leiten wir die Gleichungen (59) der Reihe nach nach u^1, u^2, u^3 ab. Das gibt

$$\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_{31}\mathfrak{x}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{x}_{23}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_3 = 0,$$

$$\mathfrak{x}_{31}\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_{23}\mathfrak{x}_1 = 0,$$

oder

$$\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_3 = 0, \quad \mathfrak{x}_{23}\mathfrak{x}_1 = 0, \quad \mathfrak{x}_{31}\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Da alle drei Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_{12}$ auf $\mathfrak{x}_3$ senkrecht stehen, liegen sie in einer Ebene:

$$(\mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 0. \tag{60}$$

Betrachten wir jetzt eine Fläche $u^3 = \text{const}$, auf der die u^1, u^2 Gaußsche Parameter bilden. Es ist $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = g_{12} = 0$, und nach der Erklärung (18) von L_{12} folgt aus (60) auch $L_{12} = 0$. $g_{12} = 0$, $L_{12} = 0$ war aber kennzeichnend für das orthogonale Netz der Krümmungslinien als Parameterlinien, w.z.b.w.

Wir können diesem Nachweis unseres Satzes auch ein geometrisches Mäntelchen umhängen. Von einem Punkt unseres dreifachen Orthogonal-

systems laufen drei Kurven aus, in deren jeder sich zwei Flächen des Systems schneiden. Durch jede Kurve gehen dann zwei Streifen, die zu den beiden Flächen gehören, welche sich in der Kurve schneiden. Insgesamt laufen also von einem Punkt sechs zu unserem dreifachen Orthogonalsystem gehörige Streifen aus. Die beiden Streifen durch eine und dieselbe Kurve schneiden sich senkrecht, haben also nach dem am Schluß des § 36 bewiesenen Satze dieselbe geodätische Windung. Nennen wir die drei verschiedenen geodätischen Windungen, die an den Streifen der drei verschiedenen Kurven auftreten, a_1, a_2 und a_3, so liegen noch je zwei zu verschiedenen Kurven gehörige Streifen auf einer und derselben Fläche. Da sie zu senkrechten Kurven gehören, so sind nach dem Ende des § 46 ihre geodätischen Windungen in dem Kurvenschnittpunkt entgegengesetzt gleich. Dreimal angewendet, liefert der Satz:

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 + a_3 = 0, \quad a_3 + a_1 = 0,$$

das heißt, alle a_k $(k = 1, 2, 3)$ verschwinden. Somit sind nach § 35 alle vorkommenden Streifen Krümmungsstreifen, was zu beweisen war.

Ein nicht triviales Beispiel eines rechtwinkligen Flächennetzes bilden die „konfokalen" Flächen zweiter Ordnung. Beschränken wir uns auf den Fall der Mittelpunktsflächen, so kann man die Flächen des Netzes mittels eines Parameters t in einer Gleichung zusammenfassend darstellen:

$$f(t) \equiv \frac{x_1^2}{t - c_1} + \frac{x_2^2}{t - c_2} + \frac{x_3^2}{t - c_3} = 1. \tag{61}$$

Es sei $c_1 > c_2 > c_3 > 0$ und $x_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Gibt man die x_k vor, so erhält man für t eine kubische Gleichung, von der man einsehen kann, daß sie nur reelle Wurzeln hat. Denn linker Hand steht in (61) bei festen x_k eine Funktion f von t, die an den Stellen c_k von $-\infty$ nach $+\infty$ springt und im übrigen stetig ist. Nach dem Satze von Bolzano über stetige Funktionen muß es also tatsächlich drei reelle Nullstellen t_k von $f - 1$ geben, und zwar auf den folgenden Teilstrecken:

$$t_1 > c_1 > t_2 > c_2 > t_3 > c_3.$$

Somit gehen durch jeden Raumpunkt mit $x_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3)$ drei reelle Flächen unseres Systems (61): ein Ellipsoid $t = t_1$, ein einschaliges Hyperboloid $t = t_2$ und ein zweischaliges $t = t_3$. Die t_k sind an Stelle der u^1, u^2, u^3 als krummlinige Koordinaten verwendbar. Die Orthogonalität sieht man so ein: Die Flächennormale an die Fläche $t = t_i$ hat die Richtung des Vektors mit den Komponenten

$$\frac{x_1}{t_i - c_1}, \quad \frac{x_2}{t_i - c_2}, \quad \frac{x_3}{t_i - c_3}.$$

Bilden wir das innere Produkt mit dem Normalenvektor der Fläche $t = t_k$ $(k \neq i)$, so erhalten wir

$$(62) \qquad \frac{x_1^2}{(t_i - c_1)(t_k - c_1)} + \frac{x_2^2}{(t_i - c_2)(t_k - c_2)} + \frac{x_3^2}{(t_i - c_3)(t_k - c_3)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber Null; denn aus $f(t_i) = 1$, $f(t_k) = 1$ folgt $f(t_i) - f(t_k) = 0$, was das Verschwinden von (62) zur Folge hat. Darin ist die behauptete Orthogonalität enthalten.

Die Krümmungslinien der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung sind also im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung, in denen sich je zwei konfokale Flächen durchdringen.

§ 49. Die winkeltreuen Abbildungen des euklidischen Raums

Setzt man

$$(63) \qquad y_k = y_k(x_1, x_2, x_3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

oder vektoriell

$$(64) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x_1, x_2, x_3),$$

wo die y_k dreimal stetig differenzierbare Funktionen von x_1, x_2, x_3 mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante sind, so wird dadurch jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des dreidimensionalen euklidischen Raums mit den cartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 ein Punkt $\mathfrak{y}$ desselben Raums mit den cartesischen Koordinaten y_1, y_2, y_3 zugeordnet. Eine derartige Zuordnung nennt man „Abbildung" des Raums in sich. Ist diese (notwendigerweise) „stetige" Abbildung außerdem noch „topologisch", d.h. besitzt sie eine eindeutige, auf dem ganzen Raum definierte und stetige Umkehrung, und bleibt bei ihr der Winkel zweier durch einen Punkt gehender Kurven erhalten, so nennt man die Abbildung „winkeltreu" oder (nach Gauß) „konform". Triviale Beispiele winkeltreuer Abbildungen des Raumes auf sich sind die Ähnlichkeiten, welche sich aus Bewegungen und Streckungen zusammensetzen. Erstaunlicherweise gilt aber auch die folgende Umkehrung:

Jede winkeltreue Abbildung des euklidischen Raums ist eine Ähnlichkeit.

Zum Beweis betrachten wir die drei Scharen paralleler Ebenen $x_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, 3)$, welche im Sinne von § 48 ein rechtwinkliges Flächennetz bilden. Ihre Bilder bei der eben definierten Abbildung (63) bilden dann wegen der Winkeltreue dieser Abbildung ebenfalls ein rechtwinkliges Flächennetz. Dabei durchschneiden sich nach dem Hauptergebnis des vorigen Paragraphen die Flächen des letzteren paarweise in Krümmungslinien, welche die Bilder der Schnittgeraden $x_i = \text{const}$, $x_k = \text{const}$ $(i \neq k)$ des rechtwinkligen Ebenennetzes sind.

Nun geht aber das Ebenennetz durch eine Drehung des Raums um eine Gerade $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$ mit einem beliebigen Drehwinkel φ wieder in ein rechtwinkliges Ebenennetz mit der (als Ganzes) gleichbleibenden Ebenenschar $x_3 = \text{const}$ über. Speziell bleibt hierbei eine Ebene $x_3 = x_3^{(0)}$ als Ganzes ungeändert, während das in dieser Ebene liegende orthogonale Geradennetz $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$ in das Geradennetz

$$\begin{aligned}(x_1 - x_1^{(0)})\cos\varphi + (x_2 - x_2^{(0)})\sin\varphi + x_1^{(0)} &= \text{const},\\ -(x_1 - x_1^{(0)})\sin\varphi + (x_2 - x_2^{(0)})\cos\varphi + x_2^{(0)} &= \text{const}\end{aligned} \tag{65}$$

gedreht wird. Beachten wir nun, daß die Geradennetze (65) bei der Abbildung (63) in orthogonale Krümmungsliniennetze des Bildes von $x_3 = x_3^{(0)}$ übergehen, so finden wir, daß diese Bildfläche

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x_1, x_2, x_3^{(0)}) \tag{66}$$

unendlich viele verschiedene orthogonale Krümmungsliniennetze besitzt. Insbesondere stellen die durch

$$\mathfrak{y} = (x_1^{(0)} - \sin\varphi t,\ x_2^{(0)} + \cos\varphi t,\ x_3^{(0)}) \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{67a}$$

und

$$\mathfrak{y} = (x_1^{(0)} + \cos\varphi t,\ x_2^{(0)} + \sin\varphi t,\ x_3^{(0)}) \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{67b}$$

dargestellten Kurven durch den Punkt $\mathfrak{y}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ gehende Krümmungslinien der Fläche (66) dar. Da hierbei φ beliebige Werte annehmen kann, ist nach (46) der Punkt $x_k = x_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, 3)$ Nabelpunkt von (66). Weil $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ beliebig gewählt waren, sehen wir, daß sogar alle Punkte von (66) Nabelpunkte sind. Nach § 47 ist somit (66) Stück einer Kugel oder einer Ebene.

Die erstgenannte Möglichkeit besteht jedoch nicht, da in diesem Falle die Menge der Punkte der Fläche (66) abgeschlossen und beschränkt, d. h. „kompakt" wäre, woraus nach einem bekannten Satz der Topologie dasselbe für die Ebene $x_3 = x_3^{(0)}$ als „Urbild" von (66) bei der topologischen Abbildung (63) folgen würde, offensichtlich eine Unmöglichkeit. Damit haben wir aber gezeigt, daß das Bild von $x_3 = x_3^{(0)}$ bei (63) Stück einer Ebene ist, und das gleiche gilt für die Bilder aller Ebenen $x_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, 3)$. Das rechtwinklige Ebenennetz $x_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, 3)$ wird also durch (63) in einen Teil eines ebenfalls rechtwinkligen Ebenennetzes abgebildet, welches nach einer geeigneten Bewegung des Raums in der Form $y_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, 3)$ dargestellt werden kann.

Dies bedeutet aber, daß die Abbildungsfunktionen y_k in (63) nur von den jeweiligen x_k abhängen, so daß wir statt (63) schreiben können

$$y_k = y_k(x_k) \quad (k = 1, 2, 3). \tag{68}$$

Hierbei ist wegen

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_2}\frac{dy_3}{dx_3} \neq 0$$

o.B.d.A.

$$\frac{dy_k}{dx_k} > 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{69}$$

(nach eventueller Multiplikation von einem y_k mit -1, was einer Spiegelung des Raums entspricht!). Da jetzt wegen der Winkeltreue von (63) der Winkel arc $\cos \frac{1}{+\sqrt{3}}$ der Geraden $x_1 = x_1^{(0)} + t$, $x_2 = x_2^{(0)} + t$, $x_3 = x_3^{(0)} + t$ mit den drei Geraden $x_k = x_k^{(0)} + t$, $x_{k'} = x_{k'}^{(0)}$ $(k' \neq k$, $k = 1, 2, 3)$ bei unserer Abbildung erhalten bleibt, finden wir für die Bilder dieser Kurven im gemeinsamen Schnittpunkt $t = 0$:

$$\frac{\frac{dy_k}{dx_k}(x_k^{(0)})}{+\sqrt{\left(\frac{dy_1}{dx_1}(x_1^{(0)})\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dx_2}(x_2^{(0)})\right)^2 + \left(\frac{dy_3}{dx_3}(x_3^{(0)})\right)^2}} = \frac{1}{+\sqrt{3}} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{70}$$

oder

$$\frac{dy_1}{dx_1}(x_1^{(0)}) = \frac{dy_2}{dx_2}(x_2^{(0)}) = \frac{dy_3}{dx_3}(x_3^{(0)}). \tag{71}$$

Weil die $x_k^{(0)}$ hierbei beliebig gewählt waren, haben wir sogar

$$\frac{dy_1}{dx_1}(x_1) = \frac{dy_2}{dx_2}(x_2) = \frac{dy_3}{dx_3}(x_3), \tag{72}$$

was

$$\frac{dy_k}{dx_k}(x_k) = \text{const} = c > 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{73}$$

zur Folge hat. Integration von (73) liefert aber

$$y_k = cx_k + c_k \quad (c_k = \text{bel. Konstante}, \; k = 1, 2, 3), \tag{74}$$

d.h. unsere Abbildung (63) setzt sich aus einer Bewegung und der Streckung (74) zusammen, ist also in der Tat eine Ähnlichkeit, was zu beweisen war.

§ 50. Gauß' sphärisches Abbild einer Fläche

Denken wir uns, während ein Punkt $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine krumme Fläche beschreibt, den Einheitsvektor $\mathfrak{n}(u^1, u^2)$ der zugehörigen Flächennormalen vom Ursprung aus abgetragen, so ist der Endpunkt dieses Vektors auf der Kugel $\mathfrak{n}^2 = 1$ beweglich. Die Fläche $\mathfrak{x}$ ist so „durch parallele Normalen" auf die Einheitskugel $\mathfrak{n}$ abgebildet. Man spricht vom *sphärischen Abbild* nach Gauß. Wir wollen nun ähnlich, wie wir beim Tangenten-

bild einer krummen Linie das Verhalten entsprechender Linienelemente festgestellt haben, jetzt beim „Normalenbild" ermitteln, wie sich entsprechende „Flächenelemente" von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ verhalten.

Die Oberfläche[1] einer Fläche erklärt man (mit einem Vorzeichen versehen) durch das Doppelintegral

$$\iint (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n})\, du^1\, du^2 = \iint W\, du^1\, du^2. \tag{75}$$

Hierbei ist nach § 2 (20):

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n})^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = W^2. \tag{75a}$$

Das „Flächenelement"

$$do = (\mathfrak{x}_1\, du^1, \mathfrak{x}_2\, du^2, \mathfrak{n}) \tag{76}$$

stellt man sich am einfachsten vor als „unendlich kleines Parallelogramm" zwischen den Vektoren $\mathfrak{x}_1\, du^1$, $\mathfrak{x}_2\, du^2$. Man kann leicht einsehen, daß die Erklärung (75) von der Parameterwahl unabhängig ist. Sind nämlich u^{1*}, u^{2*} neue Parameter, so wird

$$\begin{aligned} &\iint (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{n})\, du^{1*}\, du^{2*} \\ &= \iint \left(\mathfrak{x}_1 \frac{\partial u^1}{\partial u^{1*}} + \mathfrak{x}_2 \frac{\partial u^2}{\partial u^{1*}}, \mathfrak{x}_1 \frac{\partial u^1}{\partial u^{2*}} + \mathfrak{x}_2 \frac{\partial u^2}{\partial u^{2*}}, \mathfrak{n}\right) du^{1*}\, du^{2*} \\ &= \iint (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}) \left(\frac{\partial u^1}{\partial u^{1*}} \frac{\partial u^2}{\partial u^{2*}} - \frac{\partial u^1}{\partial u^{2*}} \frac{du^2}{du^{1*}}\right) du^{1*}\, du^{2*} \\ &= \iint (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n})\, du^1\, du^2 \end{aligned} \tag{77}$$

nach der bekannten Formel für die Einführung neuer Veränderlicher in ein Doppelintegral.

Das entsprechende Oberflächenelement der Einheitskugel ist

$$dw = (\mathfrak{n}_1\, du^1, \mathfrak{n}_2\, du^2, \mathfrak{n}). \tag{78}$$

Nach Olinde Rodrigues (§ 46 (52)) ist aber bei geeigneten Parametern in jedem Flächenpunkt (zumindest isoliert)

$$\mathfrak{n}_1 = -\frac{1}{R_1}\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{n}_2 = -\frac{1}{R_2}\mathfrak{x}_2 \tag{79}$$

[1] Eine geometrische Erklärung der „Oberfläche" entsprechend der der Bogenlänge in Kap. 1 findet man etwa bei H. Bohr und J. Mollerup, Mathematisk Analyse II, S. 366. Kopenhagen 1921.

und daher

$$dw = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} (\mathfrak{x}_1\, du^1, \mathfrak{x}_2\, du^2, \mathfrak{n}) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}\, do. \tag{80}$$

Wir haben damit gefunden:

$$\boxed{\frac{dw}{do} = \frac{1}{R_1 R_2} = K}. \tag{81}$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß ist also gleich dem Quotienten entsprechender Flächenelemente von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}$. Man kann hier wieder eine Bemerkung über das Vorzeichen machen. do und dw haben einzeln willkürliches Zeichen, da wir aber in der Erkläruug (76), (78) dieser Flächenelemente beidemal denselben Normalenvektor $\mathfrak{n}$ verwendet haben, so sind diese Zeichen so aneinander gebunden, daß $dw : do > 0$ oder < 0 ist, je nachdem die Vektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}$ ebenso aufeinander folgen wie die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}$ oder nicht, je nachdem also das sphärische Abbild „gleichsinnig" oder „gegensinnig" ist.

Man führt

$$\boxed{d\mathfrak{n}^2 = e_{ij}\, du^i\, du^j = III} \tag{82}$$

mit

$$\boxed{e_{11} = \mathfrak{n}_1^2;\ e_{12} = \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2,\ e_{22} = \mathfrak{n}_2^2} \tag{83}$$

gelegentlich als *dritte Grundform* ein. Die quadratischen Formen I, II, III sind aber linear abhängig. Nach (79) wird nämlich

$$\begin{aligned} I &= d\mathfrak{x}^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}\,(du^2)^2, \\ II &= -\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{n} = \frac{1}{R_1}\, g_{11}\,(du^1)^2 + \frac{1}{R_2}\, g_{22}\,(du^2)^2, \\ III &= d\mathfrak{n}^2 = \frac{1}{R_1^2}\, g_{11}\,(du^1)^2 + \frac{1}{R_2^2}\, g_{22}\,(du^2)^2. \end{aligned} \tag{84}$$

Dies bedeutet, daß zwischen I, II, III eine lineare Abhängigkeit

$$aI + bII + III = 0 \tag{85}$$

besteht, deren Koeffizienten a, b sich dadurch bestimmen, daß $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $a + bx + x^2 = 0$ sind. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz folgt

$$a = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = K,\ b = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -2H$$

oder

$$\boxed{KI - 2HII + III = 0}, \tag{86}$$

wenn mit H wieder die mittlere Krümmung (36) bezeichnet wird. In (86) ist die behauptete lineare Abhängigkeit enthalten. Ausführlich schreibt sich diese Beziehung der drei Grundformen:

$$\begin{aligned} Kg_{11} - 2HL_{11} + e_{11} &= 0, \\ Kg_{12} - 2HL_{12} + e_{12} &= 0, \\ Kg_{22} - 2HL_{22} + e_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{87}$$

§ 51. Normalensysteme

Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine Fläche. Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche legen wir eine Gerade, deren Richtung durch den (zweimal stetig differenzierbaren) Einheitsvektor $\mathfrak{m}(u^1, u^2)$ gegeben sei, also in Parameterdarstellung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + w\mathfrak{m}. \tag{88}$$

Wann gibt es zu diesem System von Geraden, das von zwei Parametern u^1, u^2 abhängt, eine orthogonale Fläche; wann bilden also diese Geraden das System der Normalen einer Fläche? Es sei in (88) $w = w(u^1, u^2)$ diese (stetig differenzierbare) orthogonale Fläche. Dann brauchen wir nur $w(u^1, u^2)$ so zu bestimmen, daß $\mathfrak{m}\, d\mathfrak{y} = 0$ wird. Es ist

$$d\mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_1 + w\mathfrak{m}_1)\, du^1 + (\mathfrak{x}_2 + w\mathfrak{m}_2)\, du^2 + \mathfrak{m}\, dw, \tag{89}$$

Also gibt $\mathfrak{m} \cdot d\mathfrak{y} = 0$ die Bedingung, daß

$$-dw = \mathfrak{x}_1\mathfrak{m}\, du^1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{m}\, du^2 \tag{90}$$

ein vollständiges Differential ist (man beachte, daß $\mathfrak{m}^2 = 1$ und daher $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}\mathfrak{m}_2 = 0$). Somit folgt

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{m})_2 = (\mathfrak{x}_2\mathfrak{m})_1 \tag{91}$$

oder

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{m}_1 = 0 \tag{92}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für ein Normalensystem.

Nehmen wir rechtwinklige Parameterlinien auf unserer Fläche, und zwar insbesondere so, daß

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{m} = 0 \tag{93}$$

((1)) Für $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ ist das eine schon früher hergeleitete Formel § 42 (17).

wird, was im (vorausgesetzten) Fall $\mathfrak{m} \neq \pm\mathfrak{n}$ immer möglich ist, so liegen die drei Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{x}_2$ in einer Ebene, der „Einfallsebene" von $\mathfrak{m}$. Unter der Annahme (93) nimmt unsere Bedingung für das Normalensystem (91) die Form an:

$$(\mathfrak{x}_2\mathfrak{m})_1 = 0. \tag{94}$$

Bezeichnet man den „Einfallswinkel", d.h. den Winkel des Vektors $\mathfrak{m}$ mit dem Normalenvektor $\mathfrak{n}$, durch φ, so wird

$$\sin\varphi = (\mathfrak{x}_2\mathfrak{m}) : \sqrt{\mathfrak{x}_2^2},$$

und es kann die Bedingung (94) für ein Normalensystem auch so geschrieben werden:

$$(\sqrt{\mathfrak{x}_2^2} \cdot \sin\varphi)_1 = 0. \tag{95}$$

Verändert man nun die Lage der Geraden oder des „Strahls" in seiner Einfallsebene derart, daß an Stelle von φ (nach dem Brechungsgesetz) der Winkel $\bar{\varphi}$ vermöge der Gleichung

$$\sin\bar{\varphi} = n\sin\varphi, \qquad n = \text{const}. \tag{96}$$

tritt, so gilt wiederum

$$(\sqrt{\mathfrak{x}_2^2}\sin\bar{\varphi})_1 = n(\sqrt{\mathfrak{x}_2^2}\sin\varphi)_1 = 0, \tag{97}$$

d.h. die gebrochenen Strahlen bilden wieder ein Normalensystem. Damit ist der Satz von Malus und Dupin bewiesen:

Werden die Strahlen eines Normalensystems an einer Fläche nach dem Gesetz (96) *von Snellius gebrochen, so bilden auch die gebrochenen Strahlen ein Normalensystem.*

Nebenbei: Seine eigentliche Quelle hat dieser Satz allerdings nicht in der hier durchgeführten Rechnung, sondern in dem Prinzip von Huygens. Die Spiegelung ($n = -1$) ist unter einer Brechung mit enthalten.

§ 52. Asymptotenlinien

Die Linien auf einer Fläche, längs derer die zweite quadratische Grundform verschwindet,

$$L_{ij}\,du^i\,du^j = 0 \tag{98}$$

nennt man „*Asymptotenlinien*" oder auch „*Schmiegtangentenkurven*" der Fläche. Die Tangenten an die Asymptotenlinien sind die „*Asymptoten*" oder „*Schmiegtangenten*" der Fläche. Der Normalschnitt durch eine solche Tangente hat dort nach (22) einen Wendepunkt. Man spricht deshalb auch von „Wendelinien" der Fläche. Die Differentialgleichung (98) läßt sich nach (18) ausführlich so schreiben:

$$(\mathfrak{x}_{11}(du^1)^2 + 2\mathfrak{x}_{12}\,du^1\,du^2 + \mathfrak{x}_{22}(du^2)^2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 0. \tag{99}$$

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt ($\|L_{ij}\| < 0$), so gehen durch jeden Flächenpunkt zwei reelle Asymptotenlinien hindurch. Die Tangenten an sie fallen mit den Asymptoten der Indikatrix von Dupin (vgl. § 43 (25)) zusammen, liegen also symmetrisch bezüglich der Hauptrichtungen der Fläche, die mit den Achsen der Indikatrix zusammenfallen. In parabolischen Flächenpunkten ($\|L_{ij}\| = 0$) gibt es, wenn II nicht identisch verschwindet, nur eine „Asymptotenrichtung". Im elliptischen Fall ($\|L_{ij}\| > 0$) werden die Asymptotenlinien imaginär.

Da nach § 43 (22) für die Normalkrümmung b eines Flächenstreifens $b = II : I$ gilt, folgt, daß die Streifen längs unserer Asymptotenlinien identisch sind mit den im § 35 erklärten Schmiegstreifen auf unserer Fläche. Demnach können wir die folgende, mehr geometrisch-anschauliche Erklärung der Asymptotenlinien geben:

Die Asymptotenlinien einer Fläche sind die Kurven auf der Fläche, deren Schmiegebenen entweder nicht existieren oder gleichzeitig Tangentenebenen der Fläche sind.

In innigem Zusammenhang mit der Erklärung der Asymptotenrichtungen steht die der „konjugierten" Richtungen. Zwei Richtungen $\frac{du^1}{dt} : \frac{du^2}{dt}$ und $\frac{du^1}{d\tau} : \frac{du^2}{d\tau}$ auf der Fläche in einem Flächenpunkt u^1, u^2 nennt man konjugiert, wenn sie durch die Schmiegtangenten in demselben Punkt harmonisch getrennt werden. Es muß dann die „Polarenbildung" der zweiten Grundform verschwinden:

$$L_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{d\tau} = 0 . \tag{100}$$

Diese Beziehung also behält auch für $\|L_{ij}\| > 0$ ihre reelle Bedeutung.

Nach (100) sind die Parameterlinien genau dann konjugiert, wenn $L_{12} = 0$ ist. Das orthogonale Netz der Krümmungslinien bildet also ein Kurvennetz, das konjugiert ist.

Aus der geometrischen Deutung der Asymptotenlinien kann man leicht den Schluß ziehen, daß diese Kurven mit der Fläche nicht nur gegenüber Bewegungen, sondern gegenüber Kollineationen und Korrelationen invariant verbunden sind, eine Tatsache, auf die wir später noch zurückkommen werden. Entsprechendes gilt für konjugierte Richtungen.

Auf die geometrische Deutung der konjugierten Richtungen und ihren Zusammenhang mit den im § 34 erklärten konjugierten Tangenten eines Flächenstreifens kommen wir bald zu sprechen (§ 54).

Der Satz von Meusnier § 43 ist für die ebenen Schnitte einer Fläche durch eine Schmiegtangente so abzuändern: Diese ebenen Schnitte haben im Berührungspunkt der Schmiegtangente notwendig Wendepunkte mit Ausnahme des Schnitts der Fläche mit ihrer Tangentialebene an der betrachteten Stelle.

§ 53. Asymptotenlinien auf Regelflächen

Die Ermittlung der Asymptotenlinien vereinfacht sich ein wenig für die Flächen, die von einer Schar geradliniger „Erzeugenden" bedeckt werden, also für die Regelflächen. Man kann eine solche Fläche stets so darstellen:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^2) + \mathfrak{z}(u^2) \cdot u^1, \tag{101}$$

wobei etwa $\mathfrak{z}^2 = 1$ gewählt werden kann. Es folgt:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z}, \ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_2 u^1; \tag{102}$$

$$\mathfrak{x}_{11} = 0, \ \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{z}_2; \ \mathfrak{x}_{22} = \mathfrak{y}_{22} + \mathfrak{z}_{22} u^1 \tag{103}$$

und somit für die Asymptotenlinien nach (99)

$$(2\mathfrak{z}_2 \, du^1 du^2 + (\mathfrak{y}_{22} + \mathfrak{z}_{22} u^1) \, (du^2)^2, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_2 u^1) = 0 \tag{104}$$

oder

$$du^2 \cdot \{2(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_2) \, du^1 + (\mathfrak{y}_{22} + \mathfrak{z}_{22} u^1, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_2 u^1) \, du^2\} = 0. \tag{105}$$

Das Verschwinden des ersten Faktors ($du^2 = 0$) ergibt die Schar der geradlinigen Erzeugenden $u^2 = \text{const}$.

Der Klammerausdruck gleich Null gesetzt, ergibt im allgemeinen eine zweite, die Fläche einfach bedeckende Schar von Asymptotenlinien. Ist hierbei

$$(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_2) \neq 0, \tag{106}$$

so hat die entstehende Differentialgleichung die Form

$$\frac{du^1}{du^2} = P(u^1)^2 + 2Qu^1 + R, \tag{107}$$

wo P, Q und R nur von u^2 abhängen. Man pflegt eine solche Differentialgleichung nach dem italienischen Geometer J. Riccati zu benennen. Aus der Form dieser Gleichung kann man leicht ablesen, daß vier Lösungen $u^1_{(k)}(u^2)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ festes, d.h. von u^2 unabhängiges Doppelverhältnis besitzen:

$$D = \frac{u^1_{(1)} - u^1_{(3)}}{u^1_{(2)} - u^1_{(3)}} : \frac{u^1_{(1)} - u^1_{(4)}}{u^1_{(2)} - u^1_{(4)}} = \text{const}. \tag{108}$$

Dazu braucht man nur zu zeigen, daß

$$\frac{d}{du^2} \lg D = \frac{u^{1'}_{(1)} - u^{1'}_{(3)}}{u^1_{(1)} - u^1_{(3)}} - \frac{u^{1'}_{(2)} - u^{1'}_{(3)}}{u^1_{(2)} - u^1_{(3)}} - \frac{u^{1'}_{(1)} - u^{1'}_{(4)}}{u^1_{(1)} - u^1_{(4)}} + \frac{u^{1'}_{(2)} - u^{1'}_{(4)}}{u^1_{(2)} - u^1_{(4)}} = 0 \tag{109}$$

gilt. In der Tat erhält man unter Benutzung der Gleichung (107) z.B.

$$\frac{u^{1'}_{(1)} - u^{1'}_{(3)}}{u^{1}_{(1)} - u^{1}_{(3)}} = P(u^{1}_{(1)} + u^{1}_{(3)}) + 2Q.$$

Daraus folgt die Richtigkeit von (109).

Geometrisch bedeutet unser Ergebnis, daß die zweite Schar von Asymptotenlinien die erste Schar, also die geradlinigen Erzeugenden, nach festen Doppelverhältnissen durchsetzt. Sind beide Scharen von Asymptotenlinien geradlinig, so erhält man Regelflächen zweiter Ordnung, deren Eigenschaften man hier bestätigt findet.

Es bleibt noch der ausgeschlossene Sonderfall zu berücksichtigen, daß

$$(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_2) = 0 \tag{110}$$

identisch gilt. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

1. $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}$ sind linear abhängig: $\mathfrak{z}_2 = \lambda\mathfrak{z}$. Wegen $\mathfrak{z}^2 = 1$, $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_2 = 0$ folgt dann durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{z}$, daß $\lambda = 0$, also $\mathfrak{z} = \text{const}$ ist. Nach (101) haben wir somit eine allgemeine *Zylinderfläche.*

2. Es sind $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}$ linear unabhängig. Dann folgt aus (110) eine Darstellung

$$\mathfrak{y}_2 = \alpha\mathfrak{z} + \beta\mathfrak{z}_2. \tag{111}$$

Setzen wir nun

$$\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y} - \beta\mathfrak{z}, \tag{112}$$

so ist $\bar{\mathfrak{y}}$, falls $\bar{\mathfrak{y}}_2$ nicht verschwindet, eine Kurve auf der Fläche (102). In diesem Fall haben wir nach (112), wenn wir (111) verwenden:

$$\bar{\mathfrak{y}}_2 = (\alpha - \beta_2)\,\mathfrak{z} \text{ mit } \alpha - \beta_2 \neq 0. \tag{113}$$

Statt (101) können wir dann nach (112) und (113) schreiben, wenn wir $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ durch $\bar{\mathfrak{y}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}_2$ ausdrücken:

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{y}} + \bar{u}^1\bar{\mathfrak{y}}_2 \text{ mit } \bar{u}^1 = \frac{\beta + u^1}{\alpha - \beta_2}.$$

Daraus geht hervor, daß unsere Regelfläche die *Tangentenfläche einer Kurve,* nämlich $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{y}}(u^2)$ ist. In dem Ausnahmefall $\bar{\mathfrak{y}}_2 \equiv 0$ haben wir nach (113) $\alpha \equiv \beta_2$. In diesem Fall gehen alle Erzeugenden $u^2 = \text{const}$ unserer Fläche durch den Punkt

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y} - \mathfrak{z} \cdot \beta,$$

der wegen

$$\tilde{\mathfrak{x}}_2 = \alpha\mathfrak{z} + \beta\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_2\beta - \mathfrak{z}\beta_2 \equiv 0$$

im Raume fest ist, hindurch. Wir haben also einen *Kegel.*

Die Bedingung (110) *kennzeichnet unter den Regelflächen die (in* § 35 *definierten) Torsen.* Die Gleichung (102) ergab nämlich

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z},\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_2 u^1.$$

Diese Vektoren liegen genau dann für alle u^1 in einer Ebene, wenn $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{z}_2$ in einer Ebene liegen. Die Bedingung (110) bedeutet also, daß beim Fortschreiten längs einer Erzeugenden unserer Fläche die Tangentialebene der Fläche sich nicht um die Erzeugende dreht, sondern fest bleibt, d.h. daß die Fläche in der Tat eine Torse ist.

Die durch (101) und (106) gekennzeichneten allgemeineren Regelflächen nennt man *„windschief"*.

§ 54. Konjugierte Netze

Die konjugierten Richtungen auf einer Fläche lassen folgende geometrische Deutung zu. Gehen wir von einer Flächenkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ mit $\frac{d\mathfrak{n}}{dt} \neq 0$ aus, und betrachten wir die Torse, die von den Tangentialebenen der Fläche in den Punkten der Kurve umhüllt wird! Die Erzeugenden dieser, der Fläche längs unserer Kurve umschriebenen Torse sind zu den Tangenten der Kurve im Sinne von § 52 konjugiert. Das können wir etwa so einsehen: Ist $\mathfrak{y}$ ein in der Tangentialebene beweglicher Punkt, $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt und $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor der Flächennormalen in $\mathfrak{x}$, so ist die Gleichung der Tangentialebene

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{n} = 0.$$

Schreiten wir längs unserer Flächenkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ fort, so ergibt sich nach einer Schlußweise ähnlich derjenigen am Ende von § 6 für die Einhüllende dieser Tangentialebenen die zweite Gleichung

$$-\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,\mathfrak{n} + (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = 0,$$

oder, da das erste Glied wegfällt, — wenn man noch $\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \mathfrak{v}$ setzt —

$$\mathfrak{v} \cdot \frac{d\mathfrak{n}}{dt} = 0. \tag{114}$$

Ausführlich geschrieben ergibt dies nach (18) mit dem wegen $(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\mathfrak{n} = 0$ möglichen Ansatz $\mathfrak{v} = \mathfrak{x}_j \frac{du^j}{d\tau}$

$$\left(\mathfrak{x}_j \frac{du^j}{d\tau}\right)\left(\mathfrak{n}_i \frac{du^i}{dt}\right) = -L_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{d\tau} = 0.$$

Das ist genau unsere Bedingung (100) für konjugierte Richtungen. Auf Grund der geometrischen Erklärung der konjugierten Richtungen sehen wir, daß die zu den Tangentenrichtungen einer Flächenkurve konjugier-

ten Richtungen mit den Richtungen der konjugierten Tangenten des zur Kurve gehörigen Streifens identisch sind, die wir im § 34 erklärt haben.

Diese Konstruktion konjugierter Richtungen gestattet, auf jeder Fläche ein Netz konjugierter Kurven herzustellen. Es läßt sich nämlich die Beziehung zwischen Parallelkreisen und Meridianen einer Kugel verallgemeinern: Die Berührungslinien aller Kegel, die einer Fläche umschrieben sind und deren Spitzen auf einer Geraden liegen, bilden zusammen mit den Schnittlinien der Fläche mit den Ebenen durch dieselbe Gerade ein konjugiertes Netz auf der Fläche.

Dafür, daß die Parameterlinien ein konjugiertes Netz bilden, hatten wir die Bedingung $L_{12} = 0$ oder

$$(\mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2) = 0 \tag{115}$$

in § 52 abgeleitet. Diese letzte Bedingung (115) ist sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{x}_{12} = 0$ ist, wenn also $\mathfrak{x}$ die Gestalt hat

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1) + \mathfrak{z}(u^2). \tag{116}$$

Solche Flächen, die besonders von S. Lie studiert worden sind, nennt man „Schiebflächen" oder „*Translationsflächen*", da sie durch Parallelverschiebung der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1)$ längs der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}(u^2)$ erzeugt werden können. Auch die Sehnenmittenfläche einer Raumkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\{\mathfrak{x}(u^1) + \mathfrak{x}(u^2)\} \tag{117}$$

gehört zu den Schiebflächen.

§ 55. Ableitungsformeln von Weingarten

Will man einen tieferen Einblick in die Flächentheorie gewinnen, so muß man, den Formeln Frenets in der Kurventheorie und den Formeln des § 33 für die Streifen entsprechend, invariante Grundvektoren einführen und die Ableitungen dieser Grundvektoren aus ihnen selbst linear kombinieren. In der Flächentheorie im Kleinen handelt es sich ja um die Bestimmung der Invarianten der zu einer und derselben Flächenstelle gehörigen Vektoren

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_{111}, \cdots \tag{118}$$

Man hat wieder nach den allgemeinen Vorschriften der §§ 3 und 4 zu verfahren. Dem Verfahren bei den Kurven entsprechend (vgl. § 8) wählen wir nun nicht die drei ersten linear unabhängigen der in (118) stehenden Vektoren als Grundvektoren, sondern wir fügen den Vektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen hinzu, der sich ja nach (9) aus den Vektoren (118) berechnen läßt, und nehmen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{n}$ als Grundvektoren. Diese Vektoren bilden zwar bei Voraussetzung ganz allgemeiner Flächenparameter kein rechtwinkliges Dreibein von Einheitsvektoren, aber $\mathfrak{n}$ ist wenigstens ein zu

$\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ rechtwinkliger Einheitsvektor, und schon das bringt gegenüber der Beschränkung auf die Vektoren (118) wesentliche rechnerische Vereinfachungen mit sich. Da $\mathfrak{n}$ aus den Vektoren (118) bestimmbar ist, ist das Problem der Bestimmung der Invarianten aus den in (118) stehenden Vektoren gleichwertig mit dem Problem der Bestimmung der Invarianten der Vektoren

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{x}_{111}, \ldots, \mathfrak{n}_{11}, \ldots \tag{119}$$

usw. bis zu beliebig hohen Ableitungsordnungen. Wir haben dann nach § 8 die Ableitungen der Grundvektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{n}$, also $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$ und $\mathfrak{x}_{22}$, $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ aus $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{n}$ selbst linear zu kombinieren. Mittels dieser *Ableitungsgleichungen* kann man jetzt ähnlich wie bei den Kurven leicht auch beliebig hohe Ableitungen der Grundvektoren aus diesen linear kombinieren. In den Skalarprodukten der Grundvektoren und den Koeffizienten der Linearkombinationen hat man dann nach den §§ 3 und 4 ein vollständiges Invariantensystem der Vektoren (119) gegenüber den (eigentlichen) Bewegungen oder kongruenten Abbildungen des Raumes gefunden.

Damit erhalten wir aber noch keine absoluten Invarianten unserer Fläche. Denn einen Punkt haben wir noch ganz übersehen: Die Transformationen

$$u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*}) \quad (i = 1, 2) \tag{119a}$$

der Parameter, mittels derer die Fläche dargestellt wird, wo f_1 und f_2 als willkürliche, dreimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente mit überall von Null verschiedener Funktionaldeterminante $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^{1*}, u^{2*})}$ vorausgesetzt werden. Wenn wir in der Darstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ die u^1 und u^2 nach (119a) durch die u^{1*} und u^{2*} ersetzen, so erhalten wir eine neue Darstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*(u^{1*}, u^{2*})$ derselben Fläche in neuen Parametern. Invarianten der Fläche werden nur solche Ausdrücke in den Funktionen $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ sein, deren zahlenmäßiger Wert sich bei einer Parametersubstitution nicht ändert, die sich also durch die $\mathfrak{x}^*(u^{1*}, u^{2*})$ formal genau so ausdrücken, wie durch die $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$. Wir haben also aus den mittels der Ableitungsgleichungen ermittelten Invarianten gegenüber den kongruenten Abbildungen des Raumes noch solche Kombinationen zu bilden, die auch noch parameterinvariant sind. Erst dann bekommen wir absolute Invarianten unserer Fläche. Wir wollen in diesem Kapitel nun nur den ersten Schritt, den der Bildung der Invarianten gegenüber den kongruenten Abbildungen erledigen, und die systematische Bildung von Parameterinvarianten u. a. erst im Kapitel 5 vollziehen.

Wir wollen mit der Aufstellung der Ableitungsgleichungen den Anfang machen, indem wir zunächst $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ aus $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{n}$ linear kombinieren.

Aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ folgt

$$\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_2 = 0,$$

also haben wir

$$\mathfrak{n}_1 = a_1^1\mathfrak{x}_1 + a_1^2\mathfrak{x}_2,$$
$$\mathfrak{n}_2 = a_2^1\mathfrak{x}_1 + a_2^2\mathfrak{x}_2.$$

Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ so folgt nach (18)

$$-L_{ik} = a_i^j g_{jk} \quad (i, k = 1, 2).$$

Berechnet man daraus mit Hilfe von (30) a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, so erhält man durch Einsetzen der gefundenen Werte in die vorhergehenden Formeln die gewünschten Gleichungen, die von J. Weingarten (1861) angegeben worden sind:

(120) $$\boxed{\mathfrak{n}_i = -L_{ik}g^{kl}\mathfrak{x}_l} \quad (i = 1, 2).$$

Hieraus kann man leicht einige Schlüsse ziehen; z. B. kann man neuerdings die Formel (86) von § 50 bestätigen. Ferner sieht man jetzt leicht ein: *Sind auf einer Fläche alle Kurven Asymptotenlinien, so ist die Fläche eben.*

Aus (98) folgt nämlich $L_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ und daher wegen (120) $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = 0$ oder $\mathfrak{n} = \text{const}$; $\mathfrak{x}_1\mathfrak{n} = \mathfrak{x}_2\mathfrak{n} = 0$ ergibt durch Integration $\mathfrak{x}\mathfrak{n} = \text{const}$, also wirklich die Gleichung einer Ebene. Übrigens nennt man einen Punkt einer Fläche mit unendlich vielen Asymptotenrichtungen oder mit $L_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ einen „*Flachpunkt*" der Fläche.

Ferner: *Die Torsen sind die einzigen flachpunktfreien, dreimal stetig differenzierbaren Flächen mit lauter Punkten parabolischer Krümmung* $(K = 0)$.

Ist nämlich $K = 0$ oder $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = 0$, so wird die Differentialgleichung der Asymptotenlinien (98)

$$\left(\sqrt{|L_{11}|}\,du^1 + \sqrt{|L_{22}|}\,du^2\right)^2 = 0,$$

wo

(121) $$\sqrt{|L_{11}|}\cdot\sqrt{|L_{22}|} = \varepsilon L_{12} \quad (\varepsilon = \text{sign}\, L_{11} = \text{sign}\, L_{22})$$

ist. Es gibt also nur eine Schar von Asymptotenlinien, die die Fläche schlicht überdeckt (weil wir den Fall des Verschwindens von II oder $L_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ ausgeschlossen haben). Wählen wir diese Kurven als Parameterlinien $u^{2*} = \text{const}$, so wird $L_{11}^* = L_{12}^* = 0$ und nach Weingarten $\mathfrak{n}_1^* = 0$. Somit ist

(122) $$(\mathfrak{x}^*\mathfrak{n}^*)_1 = \mathfrak{x}_1^*\mathfrak{n}^* = 0$$

oder

(123) $$\mathfrak{x}^*(u^{1*}, u^{2*})\,\mathfrak{n}^*(u^{2*}) = P(u^{2*}).$$

Die Ableitung nach u^{2*} ergibt

$$\mathfrak{x}^*(u^{1*}, u^{2*})\, \mathfrak{n}_2^*(u^{2*}) = P_2(u^{2*}) \quad (124)$$ ((1)).

Also ist unsere Fläche nach (123) und (124) eine Torse, und zwar die Einhüllende der Ebenenschar $\mathfrak{x}\mathfrak{n}^*(u^{2*}) = P(u^{2*})$. Umgekehrt kann man für eine Torse, etwa nach (110) und (105), immer $L_{11} = L_{12} = 0$ und damit $K = 0$ erreichen. Somit sind die Torsen unter den flachpunktfreien Flächen durch die Identität $K = 0$ gekennzeichnet.

§ 56. Satz von Beltrami und Enneper über die Windung der Asymptotenlinien

Da die Schmiegebenen einer Asymptotenlinie auf einer Fläche, falls sie existieren, mit den Tangentialebenen der Fläche übereinstimmen, fallen die Binormalen der Kurve mit den Flächennormalen zusammen ($\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$). Deshalb läßt sich die Windung einer Asymptotenlinie leicht berechnen: Es ist nach Kap. 1 (39)

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = \frac{d\mathfrak{b}^2}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{n}^2}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{III}{I}. \quad (125)$$

Nach § 50 (86) war

$$KI - 2HII + III = 0.$$

Da längs einer Asymptotenlinien $II = 0$ ist, so folgt

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = \frac{III}{I} = -K. \quad (126)$$

Diesen Zusammenhang zwischen Windung der Asymptotenlinien und dem Gaußschen Krümmungsmaß der Fläche haben E. Beltrami[2] (1866) und A. Enneper (1870) angegeben. Auf geradlinige Asymptotenlinien ist die Formel nicht ohne weiteres anwendbar.

Über das Vorzeichen der Windung läßt sich durch eine genauere Untersuchung feststellen, daß die Windungen der beiden im Fall $K < 0$ durch einen Flächenpunkt gehenden Asymptotenlinien entgegengesetztes Vorzeichen haben. Das kann man so einsehen: Nach § 34 (24) ist die Windung $1 : \tau$ der Kurve eines Schmiegstreifens ($b = 0$), d.h. einer Asymptotenlinie, gleich der geodätischen Windung a des Streifens. Ist die Fläche auf Asymptotenlinien bezogen, so ist die geodätische Windung a_1 des Streifens der u^1-Kurve aber durch

$$a_1 = -\frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_1)}{g_{11}}$$

((1)) Hierbei ist $\mathfrak{n}_2^* \neq 0$ wegen $L_{22}^* \neq 0$!

2 Beltrami, E.: Opere mathematiche I, 1902, S. 301.

gegeben. Das folgt aus § 35 $(25)_1$, wenn man bedenkt, daß die dortigen Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{n}'$ hier durch $\mathfrak{x}_1 : \sqrt{g_{11}}$ und $\mathfrak{n}_1 : \sqrt{g_{11}}$ zu ersetzen sind. Analog erhält man für die geodätische Windung des u^2-Streifens

$$a_2 = -\frac{(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_2)}{g_{22}}.$$

Ersetzt man nun unter Benutzung von $L_{11} = L_{22} = 0$ die Vektoren $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ nach (120) durch die Grundvektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, so ergibt sich

$$a_1 = -a_2 = \frac{L_{12}}{\|g_{ij}\|}(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2),$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 57. Die Ableitungsformeln von Gauß

In § 55 hatten wir begonnen, das flächentheoretische Gegenstück der Kurvenformeln von Frenet abzuleiten. Damit wollen wir jetzt fortfahren. Wir haben noch $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ aus $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{n}$ linear zu kombinieren:

$$\mathfrak{x}_{ij} = b_{ij}^k \mathfrak{x}_k + c_{ij}\mathfrak{n} \quad (i, j = 1, 2). \tag{127}$$

Es bleiben die Koeffizienten b_{ij}^k, c_{ij} zu berechnen. Aus $\mathfrak{x}_i\mathfrak{n} = 0$ folgt durch Ableitung nach u^j zunächst wegen (18)

$$c_{ij} = \mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n} = -\mathfrak{x}_i\mathfrak{n}_j = L_{ij}. \tag{128}$$

Multipliziert man (127) skalar mit $\mathfrak{x}_l$, so erhält man unter Verwendung von § 45 (39) und (40) für b_{ij}^k die Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) = b_{ij}^k g_{kl}. \tag{129}$$

Daraus ist wegen (30)

$$b_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}). \tag{130}$$

So erhält man schließlich das Gaußsche Formelsystem mit der von Christoffel herrührenden Bezeichnung:

$$\boxed{\mathfrak{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathfrak{x}_k + L_{ij}\mathfrak{n}} \quad (i, j = 1, 2). \tag{131}$$

In diesen Ableitungsformeln von Gauß haben die *„Dreiindizessymbole"* Christoffels folgende Werte:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) \quad (i, j, k = 1, 2). \tag{132}$$

Wir wollen die Formeln (131) auf die Einheitskugel selbst anwenden, indem wir $\mathfrak{n}$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ treten lassen und für $\mathfrak{n}$ wieder $\mathfrak{n}$ setzen

(§ 41 (12)). Dann tritt an die Stelle von

$$I = d\mathfrak{x}^2 \text{ und } II = -d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{n} \tag{133}$$

entsprechend

$$III = d\mathfrak{n}^2 \text{ und } -III = -d\mathfrak{n}^2, \tag{134}$$

und die Formeln (131) gehen über in

$$\mathfrak{n}_{ij} = (\Gamma^k_{ij})_{III}\, \mathfrak{n}_k - e_{ij}\mathfrak{n} \quad (i, j = 1, 2) \tag{135}$$

(vgl. (82)!). Hier sind die Dreiindizessymbole bezüglich der dritten Grundform (82) zu berechnen.

§ 58. Integrierbarkeitsbedingungen von Gauß und Codazzi

In den Gleichungen (120) und (131) zusammen haben wir das vollständige System der Ableitungsgleichungen für unsere Flächentheorie zusammengestellt. Durch Differenzieren können wir aus diesen Gleichungen auch beliebig hohe Ableitungen der $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{n}$ als Linearkombination der Grundvektoren darstellen. Die Koeffizienten drücken sich dann jedesmal durch die Koeffizienten der Gleichungen (120), (131) und ihre Ableitungen aus. Das vollständige System der Invarianten gegenüber den kongruenten Abbildungen des Raumes ist also durch die Skalarprodukte der Grundvektoren — diese sind aber, soweit sie nicht 0 oder 1 sind, gleich g_{11}, g_{12}, g_{22} — und die in (120), (131) auftretenden Koeffizienten sowie deren Ableitungen gegeben. Aus g_{11}, g_{12}, g_{22} und den Koeffizienten von (120), (131) lassen sich aber L_{11}, L_{12}, L_{22} berechnen, und umgekehrt aus g_{11}, g_{12}, g_{22}, L_{11}, L_{12}, L_{22} wieder die Koeffizienten in (120), (131). Somit ist das vollständige System der Invarianten gegenüber den kongruenten Abbildungen durch g_{11}, g_{12}, g_{22}, L_{11}, L_{12}, L_{22} und ihre Ableitungen gegeben. Aus diesen sechs Koeffizienten der Grundformen I und II und ihren Ableitungen werden sich dann weiter alle absoluten Invarianten der Fläche als die aus ihnen kombinierbaren Parameterinvarianten berechnen lassen.

In (120) und (131) haben wir bei gegebenen g_{11}, g_{12}, g_{22}, L_{11}, L_{12}, L_{22} ein System partieller linearer Differentialgleichungen für die insgesamt sechs Komponenten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ als Funktionen von u^1, u^2.

Damit dieses System — oder das damit äquivalente System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\mathfrak{x}_j = \mathfrak{y}_{(j)}, \tag{136a}$$

$$\mathfrak{y}_{(i),j} = \Gamma^l_{ij}\mathfrak{y}_{(l)} + L_{ij}\mathfrak{n} \tag{136b}$$

$$\mathfrak{n}_j = -L_{jm}g^{ml}\mathfrak{y}_{(l)} \quad (i, j = 1, 2), \tag{136c}$$

— für die Komponenten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_{(1)}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$, $\mathfrak{n}$ lösbar ist, müssen gewisse Integrierbarkeitsbedingungen gelten, die wir folgendermaßen erhalten:

Differenzieren wir jede Gleichung von (136) nach u^k und drücken die in den sich ergebenden Formeln auftretenden ersten Ableitungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_{(1)}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$, $\mathfrak{n}$ nach (136) wieder durch diese Vektoren selbst aus, so bekommen wir:

$$\mathfrak{x}_{jk} = \Gamma^l_{jk}\mathfrak{y}_{(l)} + L_{jk}\mathfrak{n}, \tag{137a}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{y}_{(i),jk} &= \Gamma^l_{ij,k}\mathfrak{y}_{(l)} + \Gamma^m_{ij}\mathfrak{y}_{(m),k} + L_{ij,k}\mathfrak{n} + L_{ij}\mathfrak{n}_k \\ &= (\Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - L_{ij}L_{km}g^{ml})\,\mathfrak{y}_{(l)} + (L_{ij,k} + \Gamma^m_{ij}L_{mk})\,\mathfrak{n}\end{aligned} \tag{137b}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_{jk} &= -(L_{jm,k}g^{ml} + L_{jm}g^{ml}_{\ ,k})\,\mathfrak{y}_{(l)} - L_{jm}g^{mn}\mathfrak{y}_{(n),k} \\ &= -(L_{jm,k}g^{ml} + L_{jm}g^{ml}_{\ ,k} + L_{jm}g^{mn}\Gamma^l_{nk})\,\mathfrak{y}_{(l)} - L_{jm}g^{mn}L_{nk}\,\mathfrak{n} \\ &\qquad (i, j, k = 1, 2).\end{aligned} \tag{137c}$$

Daraus folgen unmittelbar als notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit von (136):

$$\mathfrak{x}_{12} - \mathfrak{x}_{21} = (\Gamma^l_{12} - \Gamma^l_{21})\,\mathfrak{y}_{(l)} + (L_{12} - L_{21})\,\mathfrak{n} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{y}_{(i),12} - \mathfrak{y}_{(i),21} &= (\Gamma^l_{i1,2} - \Gamma^l_{i2,1} + \Gamma^m_{i1}\Gamma^l_{m2} - \Gamma^m_{i2}\Gamma^l_{m1} - L_{i1}L_{2m}g^{ml} \\ &\quad + L_{i2}L_{1m}g^{ml})\,\mathfrak{y}_{(l)} + (L_{i1,2} - L_{i2,1} + \Gamma^m_{i1}L_{m2} - \Gamma^m_{i2}L_{m1})\,\mathfrak{n} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_{12} - \mathfrak{n}_{21} &= -(L_{1m,2}g^{ml} - L_{2m,1}g^{ml} + L_{1m}g^{ml}_{\ ,2} - L_{2m}g^{ml}_{\ ,1} \\ &\quad + L_{1m}g^{mn}\Gamma^l_{n2} - L_{2m}g^{mn}\Gamma^l_{n1})\,\mathfrak{y}_{(l)} - (L_{1m}g^{mn}L_{n2} - L_{2m}g^{mn}L_{n1})\,\mathfrak{n} = 0\end{aligned}$$

oder — wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{y}_{(1)}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$, $\mathfrak{n}$ damit gleichbedeutend —

$$\Gamma^l_{12} = \Gamma^l_{21} \quad (l = 1, 2), \tag{138a}$$

$$L_{12} = L_{21}, \tag{138b}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma^l_{i1,2} - \Gamma^l_{i2,1} + \Gamma^m_{i1}\Gamma^l_{m2} - \Gamma^m_{i2}\Gamma^l_{m1} \\ &\qquad = (L_{i1}L_{2m} - L_{i2}L_{1m})g^{ml} \quad (i, l = 1, 2),\end{aligned} \tag{139a}$$

$$L_{i1,2} - \Gamma^m_{i2}L_{m1} = L_{i2,1} - \Gamma^m_{i1}L_{m2} \quad (i = 1, 2), \tag{139b}$$

$$\begin{aligned}&L_{1m,2}g^{ml} + L_{1m}g^{ml}_{\ ,2} + L_{1m}g^{mn}\Gamma^l_{n2} \\ &\qquad = L_{2m,1}g^{ml} + L_{2m}g^{ml}_{\ ,1} + L_{2m}g^{mn}\Gamma^l_{n1} \quad (l = 1, 2),\end{aligned} \tag{140a}$$

$$L_{1m}g^{mn}L_{n2} = L_{2m}g^{mn}L_{n1}. \tag{140b}$$

Hierbei sind die Bedingungen (138a), (138b) und (140b) wegen (7) und (18) von selbst erfüllt. Weiter sind die vier verschiedenen Bedingun-

gen (139a) alle untereinander äquivalent. (139a) ist nämlich gleichbedeutend mit

$$(141)\quad (\Gamma^l_{i1,2} - \Gamma^l_{i2,1} + \Gamma^m_{i1}\Gamma^l_{m2} - \Gamma^m_{i2}\Gamma^l_{m1})g_{ln} = L_{i1}L_{2n} - L_{i2}L_{1n} \quad (i, n = 1, 2)$$

(Multiplikation mit g_{ln} und Summation über l!), wobei sowohl die Ausdrücke der linken Seite als auch diejenigen der rechten Seite dieser Gleichungen in bezug auf die freien Indizes i und n schiefsymmetrisch sind (d.h. bei Vertauschung derselben das Vorzeichen wechseln). Dies folgt daraus, daß man allgemeiner auf Grund von (7), (18) und (132) für den durch

$$(142)\qquad R_{nijk} = R^l_{ijk}g_{ln} = (\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj})\, g_{ln}$$

definierten Ausdruck:

$$(143)\qquad \begin{aligned} R_{nijk} &= (\Gamma^l_{ij}g_{ln})_k - \Gamma^l_{ij}(g_{ln,k} - \Gamma^m_{lk}g_{mn}) - (\Gamma^l_{ik}g_{ln})_j + \Gamma^l_{ik}(g_{ln,j} - \Gamma^m_{lj}\, g_{mn}) \\ &= \frac{1}{2}\,(g_{jn,ik} - g_{ij,nk} - g_{kn,ij} + g_{ik,nj}) + (\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{nj} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{nk})g_{ml}, \end{aligned}$$

d.h. in der Tat

$$(144)\qquad R_{nijk} = -R_{injk}$$

errechnet. Daher reduziert sich das System (141) etwa auf die einzig wesentliche Gleichung mit $i = 1$, $n = 2$:

$$(145)\qquad R_{2112} = L_{11}L_{22} - (L_{12})^2.$$

Sie ist wegen $L_{11}L_{22} - (L_{12})^2 = K\,\|g_{ij}\|$ nur eine andere Form des theorema egregium (42) von Gauß, welches wir nach R. Baltzer in § 45 abgeleitet hatten.

Schließlich bemerken wir, daß die Bedingungen (139b) und (140a) äquivalent sind. (140a) ist nämlich nach (30) und (132) gleichbedeutend mit

$$L_{1i,2} - L_{1m}g^{ml}(g_{li,2} - \Gamma^n_{l2}g_{ni}) = L_{2i,1} - L_{2m}g^{ml}(g_{li,1} - \Gamma^n_{l1}g_{ni}) \quad (i = 1, 2)$$

(Multiplikation mit g_{lk} und Summation über l!) oder

$$L_{1i,2} - L_{1m}g^{ml}\Gamma^n_{i2}g_{nl} = L_{2i,1} - L_{2m}g^{ml}\Gamma^n_{i1}g_{nl} \quad (i = 1, 2),$$

und das letztere System ist genau das System (139b). Wir haben damit die neuen Bedingungen

$$(146a)\qquad L_{11,2} - \Gamma^m_{12}L_{m1} = L_{12,1} - \Gamma^m_{11}L_{m2}$$

$$(146b)\qquad L_{21,2} - \Gamma^m_{22}L_{m1} = L_{22,1} - \Gamma^m_{21}L_{m2}$$

gefunden. Sie stammen von G. Mainardi (1857) und D. Codazzi (1868) und bilden mit dem theorema egregium von Gauß (145) zusammen die Integrierbarkeitsbedingungen des partiellen Differentialgleichungssystems (136).

§ 59. Fundamentalsatz der Flächentheorie

Mit den Integrierbarkeitsbedingungen von § 58 sind bereits alle Abhängigkeiten zwischen den Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform unserer Fläche aufgezählt. Es gilt nämlich der folgende grundlegende Satz von O. Bonnet (1867):

Sei $g_{ij}\,du^i\,du^j$ *eine positiv definite quadratische Differentialform und sei* $L_{ij}\,du^i\,du^j$ *eine weitere quadratische Differentialform, deren Koeffizienten* g_{ij} *bzw.* L_{ij} *auf dem Gebiet* G: $|u^i - u^i_{(0)}| < b_i$ $(i = 1, 2)$ *der Parameterebene definiert, dort zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar sind und den Bedingungen* (145) *und* (146) *genügen. Dann gibt es immer eine bis auf (eigentliche) Bewegungen eindeutig bestimmte, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit* $g_{ij}\,du^i\,du^j$ *und* $L_{ij}\,du^i\,du^j$ *als erster und zweiter Grundform.*

Wir weisen zunächst die Eindeutigkeitsaussage dieser Behauptung nach. Angenommen, es existierten zwei Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$ mit der vorgegebenen ersten und zweiten Grundform $g_{ij}\,du^i\,du^j$ und $L_{ij}\,du^i\,du^j$. Dann gibt es wegen

$$\bar{\mathfrak{x}}_i(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})\,\bar{\mathfrak{x}}_j(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = g_{ij}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = \mathfrak{x}_i(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})\,\mathfrak{x}_j(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) \quad (i = 1, 2)$$

auf Grund von Überlegungen wie in § 3 sicher eine eigentliche Bewegung der Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ derart, daß letztere nach Ausführung derselben in eine Fläche $\mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$ mit den vorgegebenen Grundformen $g_{ij}\,du^i\,du^j$ und $L_{ij}\,du^i\,du^j$ und den „Anfangsbedingungen"

$$\tilde{\mathfrak{x}}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = \mathfrak{x}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) \tag{147a}$$

$$\tilde{\mathfrak{x}}_i(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = \mathfrak{x}_i(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) \quad (i = 1, 2) \tag{147b}$$

d.h. a fortiori

$$\tilde{\mathfrak{n}}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = \mathfrak{n}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) \tag{147c}$$

übergeht. Es genügt damit nur noch zu zeigen, daß die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$ identisch sind. Dies folgt aber unmittelbar aus einem im nächsten Paragraphen bewiesenen Hilfssatz, nach welchem die Komponenten der Vektorfunktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_{(1)}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$, $\mathfrak{n}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$, $\tilde{\mathfrak{y}}_{(1)}$, $\tilde{\mathfrak{y}}_{(2)}$, $\tilde{\mathfrak{n}}$ als Lösungen desselben Systems von Ableitungsgleichungen (136) mit denselben Anfangsbedingungen (147) entsprechend übereinstimmen.

Der im Vorgriff zitierte Hilfssatz garantiert aber auch die Existenz einer auf G definierten Fläche mit vorgegebener erster bzw. zweiter Grundform. Um dies nachzuweisen, wählen wir vier Vektoren $\mathfrak{x}^{(0)}$, $\mathfrak{y}^{(0)}_{(1)}$, $\mathfrak{y}^{(0)}_{(2)}$, $\mathfrak{n}^{(0)}$ derart, daß

$$\begin{aligned} &\mathfrak{y}^{(0)}_{(i)}\mathfrak{y}^{(0)}_{(j)} = g_{ij}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}), \\ &\mathfrak{y}^{(0)}_{(i)}\mathfrak{n}^{(0)} = 0, \quad (i, j = 1, 2), \\ &(\mathfrak{n}^{(0)})^2 = 1 \end{aligned} \tag{148}$$

und

$$(\mathfrak{y}_{(1)}^{(0)}, \mathfrak{y}_{(2)}^{(0)}, \mathfrak{n}^{(0)}) > 0 \tag{149}$$

ist (vgl. § 4!). Dann existieren nach dem Hilfssatz wegen des Erfülltseins von (145) und (146) vier auf G zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_{(1)}$, $\mathfrak{y}_{(2)}$, $\mathfrak{n}$ als Lösungen des linearen partiellen Differentialgleichungssystems erster Ordnung (136) unter den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}(u_{(0)}^1, u_{(0)}^2) = \mathfrak{x}^{(0)}, \quad \mathfrak{y}_{(1)}(u_{(0)}^1, u_{(0)}^2) = \mathfrak{y}_{(1)}^{(0)}, \\ &\mathfrak{y}_{(2)}(u_{(0)}^1, u_{(0)}^2) = \mathfrak{y}_{(2)}^{(0)}, \quad \mathfrak{n}(u_{(0)}^1, u_{(0)}^2) = \mathfrak{n}^{(0)}. \end{aligned} \tag{150}$$

Für die so konstruierten Vektorfunktionen gilt dann wegen (136) und (132):

$$\begin{aligned} (\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{y}_{(j)} - g_{ij})_k &= \Gamma_{ik}^l(\mathfrak{y}_{(l)}\mathfrak{y}_{(j)} - g_{lj}) + \Gamma_{jk}^l(\mathfrak{y}_{(l)}\mathfrak{y}_{(i)} - g_{li}) \\ &\quad + L_{ik}(\mathfrak{y}_{(j)}\mathfrak{n}) + L_{jk}(\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{n}) \\ (\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{n})_k &= \Gamma_{ik}^l(\mathfrak{y}_{(l)}\mathfrak{n}) + L_{ik}(\mathfrak{n}^2 - 1) - L_{km}g^{ml}(\mathfrak{y}_{(l)}\mathfrak{y}_{(i)} - g_{li}) \\ (\mathfrak{n}^2 - 1)_k &= -2\, L_{km}g^{ml}(\mathfrak{y}_{(l)}\mathfrak{n}) \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned} \tag{151}$$

Daraus folgt nach der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes, daß die Funktionen $\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{y}_{(j)} - g_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, $\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{n}$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{n}^2 - 1$ und die Funktionen $0, \ldots, 0$ als Lösung desselben Systems von Ableitungsgleichungen (151) mit wegen (148) gleichen Anfangsbedingungen entsprechend übereinstimmen, d. h.

$$\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{y}_{(j)} = g_{ij} \tag{152a}$$

$$\mathfrak{y}_{(i)}\mathfrak{n} = 0 \ (i, j = 1, 2) \tag{152b}$$

$$\mathfrak{n}^2 = 1. \tag{152c}$$

Jetzt ist es leicht einzusehen, daß durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine dreimal stetig differenzierbare Fläche mit den vorgegebenen Grundformen $g_{ij}\, du^i\, du^j$ und $L_{ij}\, du^i\, du^j$ definiert wird. In der Tat ist $\mathfrak{x}$ wegen (136a) dreimal stetig differenzierbar und stellt eine auf G definierte Fläche dar, weil $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ linear unabhängig sind, da aus $\alpha^i\mathfrak{x}_i = 0$ nach (152a) $(\alpha^i\mathfrak{x}_i)\,(\alpha^j\mathfrak{x}_j) = g_{ij}\alpha^i\alpha^j = 0$ und damit $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ folgt. Diese Fläche besitzt wegen (136a) und (152a) die erste Grundform $g_{ij}\, du^i\, du^j$ und wegen (152b), (152c) und (149) den Normaleneinheitsvektor $\mathfrak{n}$. Damit ist dann nach (136a) und (136b) $\mathfrak{x}_{ij}\mathfrak{n} = L_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, und somit stellt $L_{ij}\, du^i\, du^j$ die zweite Grundform unserer Fläche dar, womit der Fundamentalsatz der Flächentheorie bewiesen ist.

Wir merken noch an, daß dieser Satz in gewisser Weise ein Analogon des Satzes von § 16 über die Bestimmung einer Raumkurve durch ihre natürlichen Gleichungen für Flächen darstellt.

§ 60. Ein Hilfssatz über ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen

Im vorigen Paragraphen wurde mehrfach der folgende Hilfssatz benutzt:

a) *Das System*

$$\frac{\partial z_k}{\partial u^i} = \sum_{l=1}^{n} a_{ki}^l z_l \quad (i = 1, 2; k = 1, \ldots, n) \tag{153}$$

von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit auf einem rechteckigen Gebiet G: $|u^i - u_{(0)}^i| < b_i$ $(i = 1, 2)$ *der* (u^1, u^2)*-Ebene definierten und dort stetig differenzierbaren Koeffizienten* a_{ki}^l *besitzt höchstens eine (stetig differenzierbare) Lösung* $z_k = z_k(u^1, u^2)$ $(k = 1, \ldots, n)$*, welche den „Anfangsbedingungen"*

$$z_k(u_{(0)}^1, u_{(0)}^2) = c_k \quad (k = 1, \ldots, n;\ c_k = \text{bel. const}) \tag{154}$$

genügt.

b) *Das System* (153) *ist immer dann unter den Anfangsbedingungen* (154) *(zweimal stetig differenzierbar) lösbar, wenn seine Koeffizienten die „Integrierbarkeitsbedingungen"*

$$\frac{\partial a_{k1}^l}{\partial u^2} + \sum_{m=1}^{n} a_{k1}^m a_{m2}^l - \frac{\partial a_{k2}^l}{\partial u^1} - \sum_{m=1}^{n} a_{k2}^m a_{m1}^l = 0 \quad (k, l = 1, \ldots, n) \tag{155}$$

erfüllen[1].

Ehe wir an den Beweis des Hilfssatzes gehen, erinnern wir an zwei Tatsachen über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Lemma 1: Das *System von n linearen homogenen Differentialgleichungen*

$$\frac{dz_k}{du} = \sum_{l=1}^{n} a_k^l(u)\, z_l \quad (a_k^l = \text{stetig für } |u - u_{(0)}| < b!) \tag{156}$$

besitzt zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten

$$z_k(u_{(0)}) = c_k \tag{157}$$

immer genau ein System von (stetig differenzierbaren) Lösungen $z_k = z_k(u)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Der Existenzbeweis zu diesem Lemma ist für $k = 3$ bereits in § 17 erbracht worden und kann völlig analog für beliebiges k erweitert werden.

---

[1] Diese Integrierbarkeitsbedingungen werden dadurch erhalten, daß (153) mit $i = 1$ unter Einsetzung von sich selbst nach u^2 differenziert wird, daß von der entstehenden Gleichung die entsprechende Gleichung mit vertauschten Indizes 1 und 2 subtrahiert wird und daß dann schließlich die Koeffizienten der Unbekannten z_l gleich Null gesetzt werden.

Was die Eindeutigkeit der Lösung betrifft, so genügt es zu zeigen, daß zu den Anfangswerten $c_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ die einzige Lösung $z_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ gehört (die Differenz zweier Lösungen von (156) mit den Anfangsbedingungen (157) ist nämlich wieder eine Lösung von (156) mit den „Anfangswerten" 0!).

In diesem Spezialfalle von (157) folgt aber für jede Lösung von (156)

$$z_k(u) = \int_{u_{(0)}}^{u} \sum_{l=1}^{n} a_k^l z_l \, du. \tag{158}$$

Es sei $|a_k^l(u)| < \frac{1}{n} C$ und $|z_k(u)| < D$ $(k, l = 1, \ldots, n)$. Dann erschließt man hieraus durch wiederholte Anwendung von (158):

$$|z_k(u)| < DC\,|u - u_{(0)}|,$$

$$|z_k(u)| < DC^2 \frac{1}{2}\,|u - u_{(0)}|^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|z_k(u)| < DC^r \frac{1}{r!}\,|u - u_{(0)}|^r \qquad (|u - u_{(0)}| < b)$$

und wegen

$$\lim_{r\to\infty} \frac{(C\,|u - u_{(0)}|)^r}{r!} = 0$$

in der Tat $z_k(u) = 0$ für alle k und alle u mit $|u - u_{(0)}| < b$. Damit ist Lemma 1 schon bewiesen.

Lemma 2: *Es sei*

$$\frac{dz_k}{du^1} = \sum_{l=1}^{n} a_k^l(u^1, u^2)\, z_l \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{159}$$

ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, dessen Koeffizienten a_k^l von der unabhängigen Variablen u^1 und einem weiteren Parameter u^2 zusammen stetig abhängen $(|u^i - u^i_{(0)}| < b_i,\ i = 1, 2)$. Außerdem setzen wir voraus, daß die a_k^l stetige partielle Ableitungen nach u^2 besitzen. Dann hat die nach Lemma 1 eindeutig existierende Lösung $z_k = z_k(u^1, u^2)$ von (159) *unter den Anfangsbedingungen*

$$z_k(u^1_{(0)}, u^2) = d_k(u^2) \quad (|u^2 - u^2_{(0)}| < b_2) \tag{160}$$

mit beliebigen stetig differenzierbaren Funktionen d_k von u^2 die folgenden Eigenschaften: z_k ist stetig, besitzt nicht nur (trivialerweise) nach u^1 sondern auch nach u^2 stetige partielle Ableitungen, und schließlich existieren die gemischten doppelten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^1}\right)$ und sind gleich:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^1}\right) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{161}$$

Sei nämlich etwa

$$|a_k^l(u^1, u^2)| < \frac{C}{2n}, \quad \left|\frac{\partial a_k^l}{\partial u^2}(u^1, u^2)\right| < \frac{C}{2n} \tag{162}$$

und

$$|d_k(u^2)| < E, \quad \left|\frac{dd_k}{du^2}(u^2)\right| < E \qquad (k, l = 1, \ldots, n) \tag{163}$$

im betrachteten Integrationsbereich $|u^i - u^i_{(0)}| < b_i$ $(i = 1, 2)$. Wir bilden sukzessive die folgenden Näherungsfunktionen $z_k^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ für die Lösung z_k des Systems (159) mit den Anfangsbedingungen (160)

$$\begin{aligned}
&z_k^{(1)}(u^1, u^2) = d_k(u^2),\\
&z_k^{(2)}(u^1, u^2) = d_k(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} a_k^l z_l^{(1)}\, du^1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_k^{(r)}(u^1, u^2) = d_k(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} a_k^l z_l^{(r-1)}\, du^1 \qquad (k = 1, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{164}$$

Diese Funktionen $z_k^{(r)}$ sind wie die a_k^l und d_k stetig und stetig partiell nach u^2 differenzierbar, und für ihre Ableitungen folgt aus (164):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_k^{(1)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) = \frac{dd_k}{du^2}(u^2),\\
&\frac{\partial z_k^{(2)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) = \frac{dd_k}{du^2}(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^l}{\partial u^2} z_l^{(1)} + a_k^l \frac{\partial z_l^{(1)}}{\partial u^2}\right) du^1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial z_k^{(r)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) = \frac{dd_k}{du^2}(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^l}{\partial u^2} z_l^{(r-1)} + a_k^l \frac{\partial z_l^{(r-1)}}{\partial u^2}\right) du^1.
\end{aligned} \tag{165}$$

Wir betrachten die unendlichen Reihen:

$$z_k^{(1)} + \sum_{r=1}^{\infty} (z_k^{(r+1)} - z_k^{(r)}) \tag{166}$$

und

$$\frac{\partial z_k^{(1)}}{\partial u^2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\partial z_k^{(r+1)}}{\partial u^2} - \frac{\partial z_k^{(r)}}{\partial u^2}\right). \tag{167}$$

Diese Reihen (166) bzw. (167) konvergieren auf Grund der aus (164) und (165) wegen (162) und (163) folgenden Abschätzungen

$$|z_k^{(2)}(u^1, u^2) - z_k^{(1)}(u^1, u^2)| < E(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|),$$

$$|z_k^{(3)}(u^1, u^2) - z_k^{(2)}(u^1, u^2)| < E\frac{1}{2}(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|)^2,$$

.....

$$|z_k^{(r+1)}(u^1, u^2) - z_k^{(r)}(u^1, u^2)| < E\frac{1}{r!}(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|)^r$$

bzw.

$$\left|\frac{\partial z_k^{(2)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) - \frac{\partial z_k^{(1)}}{\partial u^2}(u^1, u^2)\right| < E(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|),$$

$$\left|\frac{\partial z_k^{(3)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) - \frac{\partial z_k^{(2)}}{\partial u^2}(u^1, u^2)\right| < E\frac{1}{2}(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|)^2,$$

.....

$$\left|\frac{\partial z_k^{(r+1)}}{\partial u^2}(u^1, u^2) - \frac{\partial z_k^{(r)}}{\partial u^2}(u^1, u^2)\right| < E\frac{1}{r!}(C\,|u^1 - u^1_{(0)}|)^r$$

im betrachteten Bereich $|u^i - u^i_{(0)}| < b_i$ $(i = 1, 2)$ gleichmäßig gegen die stetigen Grenzfunktionen $w_k = \lim\limits_{r\to\infty} z_k^{(r)}$ bzw. (nach einem bekannten Satz der Analysis) $\dfrac{\partial w_k}{\partial u^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\partial z_k^{(r)}}{\partial u^2}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Damit erhalten wir nach dem Grenzübergang $r \to \infty$ in (164) und (165):

$$w_k(u^1, u^2) = d_k(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} a_k^l\, w_l\, du^1 \tag{168}$$

und $(k = 1, \ldots, n)$

$$\frac{\partial w_k}{\partial u^2}(u^1, u^2) = \frac{dd_k}{du^2}(u^2) + \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^l}{\partial u^2} w_l + a_k^l \frac{\partial w_l}{\partial u^2}\right) du^1. \tag{169}$$

Wegen (168) ist nun w_k nichts anderes als die Lösung z_k von (159) unter den Anfangsbedingungen (160), und somit ist z_k in der Tat stetig und nach u^1 und u^2 stetig partiell differenzierbar. Außerdem existiert nach (169) $\dfrac{\partial}{\partial u^1}\left(\dfrac{\partial z_k}{\partial u^2}\right)$ und hat den Wert

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_k^l}{\partial u^2} z_l + a_k^l \frac{\partial z_l}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sum_{l=1}^{n} a_k^l z_l\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^1}\right),$$

womit auch (161) und damit Lemma 2 vollständig bewiesen ist.

Nun ist der Beweis des am Anfang dieses Paragraphen aufgeführten Hilfssatzes leicht erbracht. Lemma 1, angewandt auf das System (153) mit $i = 2$ und $u^1 = u^1_{(0)}$ unter der Anfangsbedingung (154), garantiert nämlich, daß alle Lösungen unseres Ausgangssystems mit seinen Anfangsbedingungen längs $u^1 = u^1_{(0)}$ übereinstimmen, woraus nochmals aus demselben Lemma, angewandt auf (153) mit $i = 1$ und beliebiges festes u^2, die völlige Übereinstimmung aller dieser Lösungen folgt. Hiermit ist Teil a) des Hilfssatzes gezeigt.

Um Teil b) desselben nachzuweisen, gehen wir umgekehrt vor: Es sei $z_k = d_k(u^2)$ die auf Grund von Lemma 1 existierende stetig differenzierbare Lösung von

$$\frac{dz_k}{du^2} = \sum_{l=1}^{n} a^l_{k2}(u^1_{(0)}, u^2)\, z_l \tag{170}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$d_k(u^2_{(0)}) = c_k \tag{171}$$

und es sei weiter $z_k = z_k(u^1, u^2)$ die ebenfalls auf Grund von Lemma 1 existierende Lösung von

$$\frac{dz_k}{du^1} = \sum_{l=1}^{n} a^l_{k1}(u^1, u^2)\, z_l \tag{172}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$z_k(u^1_{(0)}, u^2) = d_k(u^2) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{173}$$

Diese Lösung ist nach Lemma 2 stetig und stetig partiell nach u^1 und u^2 differenzierbar, genügt (161) und erfüllt wegen (172) und (173), (171) das System (153) mit $i = 1$ und dessen Anfangsbedingungen (154).

Es bleibt also nur noch übrig, die Gültigkeit von (153) mit $i = 2$ nachzuweisen. Zu diesem Zweck beachten wir, daß wegen (161), (172) und (155)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^2} - \sum_{l=1}^{n} a^l_{k2} z_l\right) &= \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial z_k}{\partial u^1}\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial a^l_{k2}}{\partial u^1} + \sum_{m=1}^{n} a^m_{k2} a^l_{m1}\right) z_l \\ = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\sum_{l=1}^{n} a^l_{k1} z_l\right) - \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial a^l_{k1}}{\partial u^2} + \sum_{m=1}^{n} a^m_{k1} a^l_{m2}\right) z_l &= \sum_{m=1}^{n} a^m_{k1}\left(\frac{\partial z_m}{\partial u^2} - \sum_{l=1}^{n} a^l_{m2} z_l\right) \end{aligned} \tag{174}$$

ist. (174) und (170) bedeuten zusammen, daß das System

$$\frac{dv_k}{du^1} = \sum_{m=1}^{n} a^m_{k1}(u^1, u^2)\, v_m \tag{175}$$

mit der Anfangsbedingung

$$v_k(u^1_{(0)}, u^2) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{176}$$

die Lösung $v_k = \dfrac{\partial z_k}{\partial u^2} - \sum_{l=1}^{n} a^l_{k2} z_l$ besitzt. Andererseits ist aber auch $v_k = 0$ Lösung von (175) und (176). Wir haben also nach Lemma 1 $\dfrac{\partial z_k}{\partial u^2} - \sum_{l=1}^{n} a^l_{k2} z_l = 0$, d.h. in der Tat gilt auch (153) mit $i = 2$, womit alles bewiesen ist.

§ 61. Kovariante Richtungsableitung eines Tangentialvektorfelds der Fläche

Die in §§ 55, 57 und 58 aufgestellten Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen der Flächentheorie machen zunächst — schon wegen der vielen auftretenden Indices — einen verwirrenden Eindruck, so daß die Frage auftaucht. ob dieselben sich nicht einfacher formulieren lassen. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man die im folgenden zu definierenden „kovarianten Ableitungen" von Vektoren und Tensoren zu Hilfe nimmt.

Wir beginnen zunächst, den Begriff „kovariante Ableitung" für ein „Vektorfeld" von Tangentialvektoren $\mathfrak{v}(u^1, u^2) = v^i(u^1, u^2)\, \mathfrak{x}_i(u^1, u^2)$ einer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ mit stetig differenzierbaren Komponenten v^i einzuführen. Zu diesem Zweck betrachten wir auf unserer Fläche eine beliebige stetig differenzierbare Kurve $u^i = u^i(t)$ $(i = 1, 2)$ und versuchen, eine „Richtungsableitung" unseres Vektorfeldes längs dieser Kurve zu definieren. Der naheliegende Grenzwert

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{v}(u^1(t_0 + h), u^2(t_0 + h)) - \mathfrak{v}(u^1(t_0), u^2(t_0))}{h} \tag{177}$$

hat für die Fläche keine sinnvolle geometrische Bedeutung, weil die Tangentialvektoren des Zählers in (177) in verschiedenen Tangentialebenen der Fläche liegen und somit ihre Differenz im allgemeinen nicht wieder Tangentialvektor ist.

Aus diesem Grund ersetzen wir in (177) $\mathfrak{v}(u^1(t_0), u^2(t_0))$ durch denjenigen Vektor $\mathfrak{w}(t_0, h)$, der bei der in § 38 beschriebenen „Parallelverschiebung" von Levi-Civita des Vektors $\mathfrak{v}(u^1(t_0), u^2(t_0))$ längs des durch die Kurve gegebenen Flächenstreifens bis zum Flächenpunkt $\mathfrak{x}(u^1(t_0 + h), u^2(t_0 + h))$ hin entsteht, und bezeichnen

$$\frac{D\mathfrak{v}}{dt}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{v}(u^1(t_0 + h), u^2(t_0 + h)) - \mathfrak{w}(t_0, h)}{h} \tag{178}$$

als „kovariante Ableitung" des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$ „längs unserer Kurve" im Punkte $t = t_0$. Auf Grund von (178), (177) sowie Kap. 3 (42), (43) und (7) ist nun bei Spezialisierung auf den Bogenlängenparameter s unserer

Kurve

$$\frac{D\mathfrak{v}}{ds}(s_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathfrak{v}(u^1(s_0+h),\, u^2(s_0+h)) - \mathfrak{v}(u^1(s_0),\, u^2(s_0))}{h}$$

$$(179) \qquad - \lim_{h\to 0} \frac{\mathfrak{w}(s_0, h) - \mathfrak{v}(u^1(s_0),\, u^2(s_0))}{h}$$

$$= \frac{d\mathfrak{v}}{ds}(s_0) - (\alpha\mathfrak{x}' + \beta\mathfrak{f})'(s_0) = \frac{d\mathfrak{v}}{ds}(s_0) - \big(\alpha(s_0)\, b(s_0) + \beta(s_0)\, a(s_0)\big)\,\mathfrak{n}(s_0),$$

worin

$$(180) \qquad \alpha(s_0) = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}(s_0)\,\mathfrak{v}(s_0), \quad \beta(s_0) = \left(\frac{d\mathfrak{x}}{ds}(s_0),\, \mathfrak{v}(s_0),\, \mathfrak{n}(s_0)\right)$$

gilt und a und b die in § 33 eingeführten Invarianten des Flächenstreifens unserer Kurve bedeuten.

Aus der Definition (178) folgt jetzt unmittelbar $\frac{D\mathfrak{v}}{ds}(s_0)\,\mathfrak{n}(s_0) = 0$, d.h. zusammen mit (179): $\alpha(s_0)\, b(s_0) + \beta(s_0)\, a(s_0) = \frac{d\mathfrak{v}}{ds}(s_0)\,\mathfrak{n}(s_0)$ oder $\frac{D\mathfrak{v}}{ds}(s_0) = \frac{d\mathfrak{v}}{ds}(s_0) - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{ds}(s_0)\,\mathfrak{n}(s_0)\right)\mathfrak{n}(s_0)$. Diese Formel gilt offensichtlich auch für einen beliebigen Kurvenparameter t (Multiplikation aller Terme mit $\frac{ds}{dt}(t_0)$!); wir haben also für die kovariante Richtungsableitung von $\mathfrak{v}$ die Darstellung

$$(181) \qquad \frac{D\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{n}\right)\mathfrak{n}$$

gewonnen. (181) bedeutet anschaulich, *daß die kovariante Richtungsableitung gleich der Orthogonalprojektion der gewöhnlichen Richtungsableitung auf die Tangentialebene im betreffenden Flächenpunkt ist.*

Wir entnehmen aus (181) die folgenden Eigenschaften für $\frac{D\mathfrak{v}}{dt}$: Es gilt

$$(182) \qquad \frac{D}{dt}(\alpha_i \mathfrak{v}^{(i)}) = \alpha_i \frac{D\mathfrak{v}^{(i)}}{dt}$$

($\mathfrak{v}^{(1)}$, $\mathfrak{v}^{(2)}$ = beliebige stetig differenzierbare Tangentialvektorfelder der Fläche, α_1, α_2 = const) sowie

$$(183) \qquad \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}^{(1)}\mathfrak{v}^{(2)}) = \frac{d\mathfrak{v}^{(1)}}{dt}\mathfrak{v}^{(2)} + \mathfrak{v}^{(1)}\frac{d\mathfrak{v}^{(2)}}{dt} = \frac{D\mathfrak{v}^{(1)}}{dt}\mathfrak{v}^{(2)} + \mathfrak{v}^{(1)}\frac{D\mathfrak{v}^{(2)}}{dt}$$

und

$$(184) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{n}) &= \left(\frac{d\mathfrak{v}^{(1)}}{dt}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{n}\right) + \left(\mathfrak{v}^{(1)}, \frac{d\mathfrak{v}^{(2)}}{dt}, \mathfrak{n}\right) \\ &+ \left(\mathfrak{v}^{(1)}, \mathfrak{v}^{(2)}, \frac{d\mathfrak{n}}{dt}\right) = \left(\frac{D\mathfrak{v}^{(1)}}{dt}, \mathfrak{v}^{(2)}, \mathfrak{n}\right) + \left(\mathfrak{v}^{(1)}, \frac{D\mathfrak{v}^{(2)}}{dt}\mathfrak{n}\right), \end{aligned}$$

da $\frac{d\mathfrak{n}}{dt}$ wegen $\mathfrak{n}^2 = 1$, d.h. $\mathfrak{n}\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = 0$ mit $\mathfrak{v}^{(1)}$ und $\mathfrak{v}^{(2)}$ zusammen in der jeweiligen Tangentialebene der Fläche liegt. Beachten wir, daß nach der Definition (178) von $\frac{D\mathfrak{v}}{dt}$ *das identische Verschwinden der kovarianten Richtungsableitung des Vektorfeldes* $\mathfrak{v}$ *längs der Flächenkurve* $u^i = u^i(t)$ *genau die „Parallelität" von* $\mathfrak{v}$ *in bezug auf die Verschiebung nach Levi-Civita längs dieser Kurve kennzeichnet*, so können wir aus (182), (183) und (184) die folgenden (zum Teil schon in § 38 angeführten) Schlußfolgerungen ziehen: *Die Linearkombination von längs einer Flächenkurve parallelen Vektorfeldern mit konstanten Koeffizienten stellt wieder ein längs der Kurve paralleles Vektorfeld dar. Außerdem bleiben inneres Produkt und Betrag des äußeren Produkts bei der Parallelverschiebung ungeändert.*

§ 62. Kovektoren und Tensoren auf einer Fläche

Die kovariante Richtungsableitung von $\mathfrak{v}$ gibt nun Anlaß zur Definition eines „Tensors" etwa in der Art, wie sie in § 41 beschrieben worden ist. Dort hatten wir eine *„bilineare"*, d.h. in beiden Argumenten lineare reellwertige Funktion Φ zweier Tangentialvektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ der Fläche (in einem beliebigen aber festen Punkt) *„zweifach kovarianten" Tensor* der Fläche (in diesem Punkt) genannt. Entsprechend bezeichnen wir nun eine *lineare* reellwertige Funktion $\mathfrak{V}$ eines Tangentialvektors $\mathfrak{v}$ der Fläche als *„einfach kovarianten"* Tensor oder *„Kovektor"*. Aus $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$ folgt für $\mathfrak{V}$ die Komponentendarstellung $\mathfrak{V}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{V}(v^i\mathfrak{x}_i) = a_i v^i$ mit $a_i = \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_i)$, und umgekehrt wird durch einen derartigen Ausdruck ein Kovektor definiert. Die durch $\mathfrak{X}^{(i)}(\mathfrak{v}) = v^i$ $(i = 1, 2)$ für alle $\mathfrak{v}$ definierten speziellen Kovektoren $\mathfrak{X}^{(1)}$, $\mathfrak{X}^{(2)}$ bilden offensichtlich eine Basis für die Menge aller Kovektoren im betrachteten Flächenpunkt, welche einen zweidimensionalen Vektorraum bei der durch $(\mathfrak{V}^{(1)} + \mathfrak{V}^{(2)})(\mathfrak{v}) = \mathfrak{V}^{(1)}(\mathfrak{v}) + \mathfrak{V}^{(2)}(\mathfrak{v})$ bzw. $(\alpha\mathfrak{V})(\mathfrak{v}) = \alpha\mathfrak{V}(\mathfrak{v})$ für alle $\mathfrak{v}$ definierten Addition bzw. skalaren Multiplikation darstellt. Hierbei sind die Zahlen $a_i = \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_i)$ gerade die Koeffizienten, welche bei der Linearkombination von $\mathfrak{V}$ aus den Basisvektoren $\mathfrak{X}^{(1)}$ und $\mathfrak{X}^{(2)}$ auftreten. Wir bezeichnen sie daher auch als „Komponenten" von $\mathfrak{V}$; sie transformieren sich bei einer Parametertransformation $u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*})$ wegen $\mathfrak{x}_i^* = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^{i*}} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}}\mathfrak{x}_j$ nach dem Gesetz

$$(185)\quad a_i^* = \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_i^*) = \mathfrak{V}\left(\frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}}\mathfrak{x}_j\right) = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}}\mathfrak{V}(\mathfrak{x}_j) = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}}a_j \qquad (i = 1, 2)$$

im Gegensatz zu den Komponenten v^i von $\mathfrak{v}$, für welche wegen

$$\mathfrak{v} = v^j\mathfrak{x}_j = v^j\frac{\partial u^{i*}}{\partial u^j}\mathfrak{x}_i^* = v^{i*}\mathfrak{x}_i^*$$

das „kontravariante" Tarnsformationsgesetz

$$v^{i*} = \frac{\partial u^{i*}}{\partial u^j} v^j \quad (i = 1, 2) \tag{186}$$

gilt. Die Tangentialvektoren $\mathfrak{v}$ der Fläche heißen daher selbst auch „einfach kontravariante" Tensoren.

Jetzt ist es ganz natürlich, auch in *allen Argumenten lineare reellwertige Funktionen* Φ_r^s *von* r *Tangentialvektoren* $\mathfrak{v}_{(\varrho)} = v_{(\varrho)}^i \mathfrak{x}_i$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ *und* s *Kovektoren* $\mathfrak{B}_{(\sigma)} = a_i^{(\sigma)} \mathfrak{X}^{(i)}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ *zu untersuchen* $(r \geqq 1,$ $s \geqq 1)$. *Die* Φ_r^s *heißen „*r*-fach kovariante und* s*-fach kontravariante" Tensoren;* sie bilden bei argumentweise definierter Addition und skalarer Multiplikation einen Vektorraum. Ein Tensor Φ_r^s besitzt die „Komponenten" $a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} = \Phi_r^s(\mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_r}, \mathfrak{X}^{(j_1)}, \ldots, \mathfrak{X}^{(j_s)})$ mit dem Transformationsgesetz

$$a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s *} = \frac{\partial u^{k_1}}{\partial u^{i_1 *}} \cdots \frac{\partial u^{k_r}}{\partial u^{i_r *}} \frac{\partial u^{j_1 *}}{\partial u^{l_1}} \cdots \frac{\partial u^{j_s *}}{\partial u^{l_s}} a_{k_1 \cdots k_r}^{l_1 \cdots l_s} \tag{187}$$

$$(i_1, \ldots, i_r = 1, 2; j_1, \ldots, j_s = 1, 2),$$

wie eine analog zu den bisherigen Betrachtungen ausgeführte Rechnung zeigt. Durch

(187a)

$$(\Phi_r^s \otimes \Psi_t^u)(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}_{(t)}, \mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{W}^{(u)}) = \Phi_r^s(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(s)})\, \Psi_t^u(\mathfrak{w}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{W}^{(u)})$$

kann auch ein „Produkt" der Tensoren Φ_r^s und Ψ_t^u definiert werden mit den Komponenten $a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}\, b_{k_1 \cdots k_t}^{l_1 \cdots l_u}$, wenn $a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}$ bzw. $b_{k_1 \cdots k_t}^{l_1 \cdots l_u}$ die Komponenten von Φ_r^s bzw. Ψ_t^u sind.

Es ist bemerkenswert, daß durch jeden zweifach kovarianten Tensor Φ_2^0 eine lineare Abbildung gegeben ist, welche jedem Tangentialvektor $\mathfrak{v}$ den durch $\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v})$ mit festem $\mathfrak{v}$ und variablem $\mathfrak{w}$ gegebenen Kovektor $\mathfrak{B}$ zuordnet. Sind hierbei v^i bzw. w^i bzw. a_{ij} die Komponenten von $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{w}$ bzw. Φ_2^0, so haben wir $\mathfrak{B}(\mathfrak{w}) = \Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = a_{ij} w^i v^j = (a_{ij} v^j)\, w^i$, woraus für die Komponenten a_i von $\mathfrak{B}$ unmittelbar

$$a_i = a_{ij} v^j \quad (i = 1, 2) \tag{188}$$

folgt. Ist hierbei Φ_2^0 außerdem noch „nichtausgeartet", d.h. hat Φ_2^0 die Eigenschaft, daß aus $\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = 0$ für alle $\mathfrak{w}$ stets $\mathfrak{v} = 0$ folgt, so ist die Φ_2^0 zugeordnete lineare Abbildung eindeutig umkehrbar, und die Umkehrabbildung hat die Komponentendarstellung

$$v^i = a^{ij} a_j \quad (i = 1, 2), \tag{189}$$

wobei (a^{ij}) die durch

$$a^{ij} a_{jk} = \delta_k^i \quad (i, k = 1, 2)$$

definierte, zu (a_{ij}) inverse Matrix ist. Im Spezialfall $\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{w}\mathfrak{v} = g_{ij}w^iv^j$, d.h. $a_{ij} = g_{ij}$ und $a^{ij} = g^{ij}$ (vgl. (30)!) läßt sich die Zuordnung von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{V}$ sehr einfach geometrisch deuten: $\mathfrak{V}$ ist jetzt durch die Gerade $g_{ij}v^j\xi^i = 1$, d.h. durch die Polare des Punktes (v^1, v^2) bezüglich des Einheitskreises $g_{ij}\xi^i\xi^j = 1$ in der Tangentialebene eindeutig bestimmt. In diesem Fall nennt man die Komponenten v_i von $\mathfrak{V}$ bzw. die Komponenten v^i von $\mathfrak{v}$ auch „kovariante Komponenten" von $\mathfrak{v}$ bzw. „kontravariante Komponenten" von $\mathfrak{V}$ und deutet die Gleichungen $v_i = g_{ij}v^j$ bzw. $v^i = g^{ij}v_j$ als „Herunterziehen" bzw. „Heraufziehen" des Komponentenindex.

Allgemeiner sieht man auf genau dieselbe Weise ein: Jeder Tensor Φ_r^s definiert eine lineare Abbildung des Vektorraums der Tangentialvektoren in den Vektorraum aller $(r-1)$-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensoren, welche jedem Tangentialvektor $\mathfrak{v}$ den durch $\Phi_r^s(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}_{(r-1)}, \mathfrak{v}, \mathfrak{V}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{V}^{(s)})$ mit festem $\mathfrak{v}$ gegebenen Tensor zuordnet. Offensichtlich gilt hierfür auch die Umkehrung, d.h. jede derartige lineare Abbildung wird durch einen geeigneten (eindeutig bestimmten) Tensor Φ_r^s bewirkt. In Verallgemeinerung von (188) gilt jetzt für die Komponenten der entsprechenden Tensoren die Beziehung:

$$(190) \qquad a_{i_1\cdots i_{r-1}}^{j_1\cdots j_s} = a_{i_1\cdots i_{r-1}i}^{j_1\cdots j_s}v^i \quad (i_1, \ldots, i_{r-1}, j_1, \ldots, j_s = 1, 2).$$

§ 63. Kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Kehren wir nun zum Begriff der kovarianten Richtungsableitung zurück. Wir können eine solche Richtungsableitung auch für jedes (in seinen Komponenten) stetig differenzierbare „Kovektorfeld" von Kovektoren $\mathfrak{V}(u^1, u^2) = a_i(u^1, u^2)\,\mathfrak{X}^{(i)}(u^1, u^2)$ definieren, indem wir einfach die Gültigkeit der „Produktregel"

$$(190a) \qquad \frac{d(\mathfrak{V}(\mathfrak{v}))}{dt} = \frac{D\mathfrak{V}}{dt}(\mathfrak{v}) + \mathfrak{V}\left(\frac{D\mathfrak{v}}{dt}\right)$$

fordern. Hierin bedeutet $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$ ein beliebiges stetig differenzierbares Feld von Tangentialvektoren der Fläche und $\mathfrak{V}(\mathfrak{v})$ den Wert der Funktion $\mathfrak{V}$ für das Argument $\mathfrak{v}$. Da sowohl $\mathfrak{V}(\mathfrak{v})$ als auch nach (182) $\mathfrak{V}\left(\frac{D\mathfrak{v}}{dt}\right)$ „linear" von $\mathfrak{v}$ abhängen, gilt nach (190a) das gleiche für $\frac{D\mathfrak{V}}{dt}(\mathfrak{v})$; durch diese Gleichung wird also in jedem Flächenpunkt und für jede durch ihn gehende Kurve $u^i = u^i(t)$ $(i = 1, 2)$ ein Kovektor definiert, den wir mit $\frac{D\mathfrak{V}}{dt}$ bezeichnen und „kovariante Richtungsableitung" von $\mathfrak{V}$ nennen.

Um die Abhängigkeit von $\frac{D\mathfrak{v}}{dt}$ bzw. $\frac{D\mathfrak{V}}{dt}$ von der Flächenkurve festzustellen, ermitteln wir zunächst die Komponentendarstellung dieser beiden

Größen. Auf Grund von (131) ergibt sich

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial(v^i \mathfrak{x}_i)}{\partial u^j} \cdot \frac{du^j}{dt} = \left(\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{kj} v^k\right)\mathfrak{x}_i + L_{ij} v^i \mathfrak{n}\right)\frac{du^j}{dt}$$

und damit wegen (181):

$$\frac{D\mathfrak{v}}{dt} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{kj} v^k\right)\frac{du^j}{dt}\,\mathfrak{x}_i. \tag{191}$$

Hieraus folgert man weiter unter Benutzung von (190a):

$$\frac{D\mathfrak{B}}{dt}(\mathfrak{v}) = \frac{d(a_i v^i)}{dt} - a_i\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{kj} v^k\right)\frac{du^j}{dt} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - \Gamma^k_{ij} a_k\right)\frac{du^j}{dt}\,v^i,$$

d.h. nach den vorherigen Ausführungen dieses Paragraphen

$$\frac{D\mathfrak{B}}{dt} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j} - \Gamma^k_{ij} a_k\right)\frac{du^j}{dt}\,\mathfrak{X}^{(i)}. \tag{192}$$

Die kovariante Richtungsableitung von $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{B}$ hängt also nur von dem Tangentenvektor $\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{du^j}{dt}\,\mathfrak{x}_j$ der Flächenkurve, und zwar in linearer Weise ab.

Dies gibt nun Anlaß zu Definition eines einfach kontra- und einfach kovarianten „Tensorfeldes" $D\mathfrak{v}$ bzw. eines zweifach kovarianten „Tensorfelds" $D\mathfrak{B}$, durch welches (in jedem Flächenpunkt) in der früher geschilderten Art gerade die durch die Zuordnung von $\frac{D\mathfrak{v}}{dt}$ bzw. $\frac{D\mathfrak{B}}{dt}$ zu $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ gegebene lineare Abbildung bewirkt wird. $D\mathfrak{v}$ bzw. $D\mathfrak{B}$ heißt „kovariante Ableitung" von $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und besitzt die sich durch Vergleich von (191) bzw. (192) mit (190) ergebenden Komponenten

$$v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{kj} v^k \tag{193}$$

bzw.

$$a_{i;j} = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} - \Gamma^k_{ij} a_k \quad (i, j = 1, 2). \tag{194}$$

In Verallgemeinerung zu (190a) läßt sich nun schließlich durch Forderung der Gültigkeit der „Produktregel"

$$\begin{aligned}\frac{d(\Phi^s_r(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}_{(r)}, \mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(s)}))}{dt} &= \frac{D\Phi^s_r}{dt}(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}_{(r)}, \mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(s)}) \\ &+ \sum_{\varrho=1}^{r} \Phi^s_r\left(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \frac{D\mathfrak{v}_{(\varrho)}}{dt}, \ldots, \mathfrak{v}_{(r)}, \mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(s)}\right) \\ &+ \sum_{\sigma=1}^{s} \Phi^s_r\left(\mathfrak{v}_{(1)}, \ldots, \mathfrak{v}_{(r)}, \mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \frac{D\mathfrak{B}^{(\sigma)}}{dt}, \ldots, \mathfrak{B}^{(s)}\right)\end{aligned} \tag{195}$$

die „kovariante Richtungsableitung" $\frac{D\Phi_r^s}{dt}$ eines stetig differenzierbaren Tensorfeldes Φ_r^s ($r \geqq 1$, $s \geqq 1$) definieren, welche in Verallgemeinerung von (191) und (192) die Komponenten

$$a_{i_1 \cdots i_r ; j}^{j_1 \cdots j_s} \frac{du^j}{dt} \tag{196}$$

mit

$$a_{i_1 \cdots i_r ; j}^{j_1 \cdots j_s} = \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}}{\partial u^j} + \sum_{\sigma=1}^{s} \Gamma_{kj}^{j_\sigma} a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_{\sigma-1} k j_{\sigma+1} \cdots j_s} - \sum_{\varrho=1}^{r} \Gamma_{i_\varrho j}^{k} a_{i_1 \cdots i_{\varrho-1} k i_{\varrho+1} \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s} \tag{197}$$

$$(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s, j = 1, 2)$$

besitzt, wenn $a_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}$ die (stetig differenzierbaren) Komponenten von Φ_r^s sind. $\frac{D\Phi_r^s}{dt}$ hängt wiederum nur von $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ in linearer Weise ab und gibt somit Anlaß zur Definition der „kovarianten Ableitung" $D\Phi_r^s$ von Φ_r^s mit den Komponenten (197) — eine Verallgemeinerung von (193) und (194). $D\Phi_r^s$ ist hierbei ein $(r+1)$-fach kovariantes und s-fach kontravariantes Tensorfeld auf der Fläche.

Zwecks Anwendung im nächsten Paragraphen benötigen wir noch eine Beziehung zwischen der kovarianten Richtungsableitung eines zweifach kovarianten Tensorfelds Φ_2^0 und der kovarianten Richtungsableitung des durch $\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v})$ mit festem $\mathfrak{v}$ und variablem $\mathfrak{w}$ definierten Kovektorfelds $\mathfrak{B}$. Aus der Definitionsgleichung $\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{w})$ für alle $\mathfrak{w}$ folgt jetzt nach (195) und (190a):

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_2^0(\mathfrak{w}, \mathfrak{v})}{dt} &= \frac{D\Phi_2^0}{dt}(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) + \Phi_s^0\left(\frac{D\mathfrak{w}}{dt}, \mathfrak{v}\right) + \Phi_2^0\left(\mathfrak{w}, \frac{D\mathfrak{v}}{dt}\right) \\ &= \frac{d\mathfrak{B}(\mathfrak{w})}{dt} = \frac{D\mathfrak{B}}{dt}(\mathfrak{w}) + \mathfrak{B}\left(\frac{D\mathfrak{w}}{dt}\right), \end{aligned}$$

d.h. wegen $\Phi_2^0\left(\frac{D\mathfrak{w}}{dt}, \mathfrak{v}\right) = \mathfrak{B}\left(\frac{D\mathfrak{w}}{dt}\right)$ ist

$$\frac{D\mathfrak{B}}{dt}(\mathfrak{w}) = \frac{D\Phi_2^0}{dt}(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) + \Phi_2^0\left(\mathfrak{w}, \frac{D\mathfrak{v}}{dt}\right). \tag{198}$$

In Komponenten schreibt sich (198) wegen (188) und (196) in der Form

$$(a_{ij} v^j)_{;k} \frac{du^k}{dt} w^i = a_{ij;k} \frac{du^k}{dt} w^i v^j + a_{ij} w^i v_{;k}^j \frac{du^k}{dt},$$

woraus unmittelbar

$$(a_{ij} v^j)_{;k} = a_{ij;k} v^j + a_{ij} v_{;k}^j \tag{199}$$

folgt, weil die Komponenten $\frac{du^k}{dt}$ und w^i von $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ und $\mathfrak{w}$ beliebig sind. Neben der „Produktregel" (199) gilt noch die „Produktregel"

$$(200) \qquad \left(a^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}\cdot h\right)_{;k} = a^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}\frac{\partial h}{\partial u^k} + a^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r;k}\cdot h$$

mit beliebiger, stetig differenzierbarer Funktion $h = h(u^1, u^2)$, welche durch analoge Rechnung aus (195) hergeleitet werden kann ((199) und (200) sind Spezialfälle einer viel allgemeineren Produktregel, auf die wir jedoch nicht eingehen können!).

Schließlich bemerken wir, daß die kovariante Ableitung des durch $\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \mathfrak{v}\mathfrak{w} = g_{ij}v^iw^j$ definierten Fundamentaltensors der Fläche der Nulltensor ist. Durch Vergleich von (195) mit (183) folgt nämlich:

$$\frac{d\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})}{dt} = \frac{D\Phi}{dt}(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + \Phi\left(\frac{D\mathfrak{v}}{dt}, \mathfrak{w}\right) + \Phi\left(\mathfrak{v}, \frac{D\mathfrak{w}}{dt}\right) = \frac{d(\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})}{dt} = \frac{D\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{w} + \mathfrak{v}\frac{D\mathfrak{w}}{dt},$$

d.h. wegen $\Phi\left(\frac{D\mathfrak{v}}{dt}, \mathfrak{w}\right) = \frac{D\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{w}$ und $\Phi\left(\mathfrak{v}, \frac{D\mathfrak{w}}{dt}\right) = \mathfrak{v}\frac{D\mathfrak{w}}{dt}$ ist $\frac{D\Phi}{dt}(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = 0$ für alle $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und damit in der Tat

$$D\Phi = 0,$$

oder komponentenweise ausgedrückt:

$$(201) \qquad g_{ij;k} = 0 \qquad \text{(Lemma von Ricci!)}.$$

Ähnlich finden wir für den durch $\Theta(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{n}) = \varepsilon_{ij}v^iw^j$ mit

$$(202) \qquad \varepsilon_{ij} = (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{n}) = -\varepsilon_{ji} \qquad (i, j = 1, 2)$$

($\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{w} = w^i\mathfrak{x}_i$ = beliebige Tangentialvektoren, $\mathfrak{n}$ = Einheitsnormalenvektor der Fläche) definierten, zweifach kovarianten und „schiefsymmetrischen" „Diskriminantentensor" der Fläche: $D\Theta = 0$ oder

$$(203) \qquad \varepsilon_{ij;k} = 0$$

wegen der sich durch Vergleich von (195) und (184) für alle $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ergebenden Beziehung

$$\frac{D\Theta}{dt}(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = 0.$$

§ 64. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen der Flächentheorie in Tensorschreibweise

Wir ergänzen zunächst die Ausführungen von § 63 dadurch, daß wir eine auf der Fläche definierte, stetig differenzierbare Funktion $h = h(u^1, u^2)$ als „0-fach kovariantes und 0-fach kontravariantes" Tensorfeld oder „Skalarfeld" ansehen, dessen kovariante Richtungsableitung

durch $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}$ gegeben ist. Diese hängt wiederum nur von $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ in linearer Weise ab und gibt Anlaß zur Definition eines einfach kovarianten Tensorfeldes Dh mit den Komponenten

$$h_{;j} = \frac{\partial h}{\partial u^j}. \tag{204}$$

Bildet man jetzt von Dh wieder die kovariante Ableitung $D(Dh)$ (unter der Voraussetzung, daß h zweimal stetig differenzierbar ist!), so findet man, daß dieselbe einen symmetrischen zweifach kovarianten Tensor darstellt. Es gilt nämlich nach (194):

$$h_{;j;k} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^k} - \Gamma^i_{jk}\frac{\partial h}{\partial u^i} = h_{;k;j} \tag{205}$$

wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole Γ^k_{ij} in den unteren Indizes.

Ist aber statt h ein (zweimal stetig differenzierbares) Tangentenvektorfeld $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$ gegeben und betrachtet man $D(D\mathfrak{v})$, so ergibt sich, daß dieses zweifach kovariante und einfach kontravariante Tensorfeld (bezüglich der kontravarianten Argumente!) im allgemeinen nicht „symmetrisch" ist. Aus (193) und (197) errechnet sich nämlich unter Benutzung von (142):

$$\begin{aligned} v^i_{;j;k} - v^i_{;k;j} = {} & \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{lj}v^l\right) + \Gamma^i_{mk}\left(\frac{\partial v^m}{\partial u^j} + \Gamma^m_{lj}v^l\right) \\ & - \Gamma^m_{jk}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^m} + \Gamma^i_{lm}v^l\right) - \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{lk}v^l\right) - \Gamma^i_{mj}\left(\frac{\partial v^m}{\partial u^k} + \Gamma^m_{lk}v^l\right) \\ & + \Gamma^m_{kj}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^m} + \Gamma^i_{lm}v^l\right) = R^i_{ljk}v^l, \end{aligned} \tag{206}$$

und analog findet man

$$a_{i;j;k} - a_{i;k;j} = -R^l_{ijk}a_l. \tag{207}$$

Aus (206) ist zu entnehmen, daß in jedem Flächenpunkt der zweifach kovariante und einfach kontravariante Tensor $D(D\mathfrak{v}) - A(D(D(\mathfrak{v})))$[1] mit den Komponenten $v^i_{;j;k} - v^i_{;k;j}$ linear von $\mathfrak{v}$ abhängt. Dies gibt Anlaß zur Darstellung (206) mit Hilfe eines dreifach kovarianten und einfach kontravarianten Tensors mit den Komponenten

$$R^i_{ljk} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{lk}}{\partial u^j} + \Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^i_{mj}, \tag{208}$$

dem sogenannten „Riemannschen Krümmungstensor" (vgl. (190)!). Unter Benutzung der durch den Fundamentaltensor der Fläche gege-

[1] Hierbei ist $A(\Phi^1_2)$ durch $A(\Phi^1_2)(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{B}) = \Phi^1_2(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}, \mathfrak{B})$ für alle $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{B}$ definiert.

benen linearen Abbildung von Tangentialvektoren in Kovektoren findet man übrigens auch, daß durch

$$R_{iljk} = R^m_{jlk} g_{mi} \tag{209}$$

die Komponenten eines vierfach kovarianten Tensors gegeben werden, dessen Symmetrieeigenschaften wir schon in § 58 untersucht hatten.

Die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie schreiben sich jetzt nach (131), (194) und (120) in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{i;j} &= L_{ij}\mathfrak{n} \qquad \text{(Gauß)} \\ \mathfrak{n}_i &= -L_{ik}g^{kl}\mathfrak{x}_l \quad \text{(Weingarten)} \\ &(i, j = 1, 2) \end{aligned}} \tag{210}$$

wobei $\mathfrak{x}_{i;j}$ die zu einem Vektor des euklidischen Raums zusammengefaßten drei Größen $(x_\nu)_{i;j}$ (i, j = fest, $\nu = 1, 2, 3$) darstellt ($\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)$!). Ganz allgemein ist das ganze Gleichungssystem (210) als eine Zusammenfassung von zweimal je drei „Tensorkomponentengleichungen" anzusehen.

Durch Anwendung der Rechengesetze (207), (200) und (204) gewinnt man nun aus den Ableitungsgleichungen von Gauß:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{i;j;k} - \mathfrak{x}_{i;k;j} &= -R^l_{ijk}\mathfrak{x}_l = L_{ij;k}\mathfrak{n} + L_{ij}\mathfrak{n}_k - L_{ik;j}\mathfrak{n} - L_{ik}\mathfrak{n}_j \\ &= (L_{ij;k} - L_{ik;j})\,\mathfrak{n} - (L_{ij}L_{km} - L_{ik}L_{jm})\,g^{ml}\mathfrak{x}_l . \end{aligned} \tag{211}$$

Ebenso ergibt sich durch Anwendung von (205) und (199) aus den Ableitungsgleichungen von Weingarten:

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{n}_{i;j} - \mathfrak{n}_{j;i} &= -L_{ik;j}g^{kl}\mathfrak{x}_l - L_{ik}g^{kl}\mathfrak{x}_{l;j} + L_{jk;i}g^{kl}\mathfrak{x}_l \\ + L_{jk}g^{kl}\mathfrak{x}_{l;i} &= -(L_{ik;j} - L_{jk;i})\,g^{kl}\mathfrak{x}_l - (L_{ik}g^{kl}L_{lj} - L_{jk}g^{kl}L_{li})\,\mathfrak{n} . \end{aligned} \tag{212}$$

Hierbei haben wir $(g_{mk}g^{kl}\mathfrak{x}_l)_{;j} = \mathfrak{x}_{m;j} = g_{mk}(g^{kl}\mathfrak{x}_l)_{;j}$ (vgl. (201)!), d.h. $(g^{kl}\mathfrak{x}_l)_{;j} = g^{kl}\mathfrak{x}_{l;j}$ benutzt. Aus (211) folgen jetzt nach Koeffizientenvergleich, Multiplikation mit g_{ln} und Summation über l wegen (209) die Integrierbarkeitsbedingungen der Flächentheorie:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{nijk} &= L_{ij}L_{kn} - L_{ik}L_{jn} \quad \text{(Gauß)} \\ L_{ij;k} &= L_{ik;j} \qquad\qquad\quad \text{(Mainardi-Codazzi)} \\ &(i, j, k, n = 1, 2) \end{aligned}} \tag{213}$$

(vgl. (145) und (146)!), während aus (212) lediglich $L_{ik;j} = L_{jk;i}$ und damit wegen der Symmetrie des Tensors der zweiten Grundform wiederum die Gültigkeit der Integrierbarkeitsbedingungen von Mainardi-Codazzi resultiert.

Die Ableitungsgleichungen (210) und die Integrierbarkeitsbedingungen (213) stellen auf Grund von (209), (187a) und (197) ein typisches Beispiel von „Tensorgleichungen", d.h. von Gleichungen dar, deren linke und rechte Seiten (entsprechende) Komponenten von Tensoren sind. Bei Transformation der Parameter u^1, u^2 transformieren sich dieselben nach dem gleichen Gesetz (187); aus der Gültigkeit der Tensorgleichung in bezug auf ein Parametersystem folgt daher automatisch die Gültigkeit der Tensorgleichung in bezug auf jedes andere zulässige Parametersystem (siehe § 41!). Dies veranlaßte Einstein, die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe des in den letzten Paragraphen entwickelten, hauptsächlich von Ricci stammenden Kalküls zu formulieren, um dem Prinzip der „Relativität" zu genügen, daß diese Gesetze „unabhängig von der Wahl des Bezugssystems" sind.

§ 65. G. Monge

Die heutige Differentialgeometrie geht, wenn wir von Vorläufern wie Euler absehen, im wesentlichen auf zwei Quellen zurück, einerseits auf Monge (1746—1818) und seine Schüler und andererseits auf Gauß (1777—1855). Die beiden Hauptwerke sind: von Monge das Lehrbuch „Application de l'Analyse à la Géométrie" (von 1795 an erschienen), von Gauß die Abhandlung „Disquisitiones circa superficies curvas" (1827). Beide Werke haben ein völlig verschiedenes Gepräge. Bei Monge handelt es sich um eine Sammlung von einzelnen Problemen, um eine Reihe von Untersuchungen über besondere, in den Anwendungen häufig vorkommende Flächenfamilien. Die Darstellung ist den Lehrzwecken angepaßt und leicht lesbar. Bei Gauß hingegen handelt es sich um eine einheitliche und tiefe, aber auch um eine etwas unnahbare Theorie. Beiden Werken gemeinsam ist der innige Zusammenhang mit praktischen Dingen. Die Gegensätze sind in den Persönlichkeiten der beiden Mathematiker begründet. Monge war ein höchst erfolgreicher Lehrer und glänzender Organisator, der mitten im Getriebe der Politik stand, zuerst als überradikaler „Königsmörder", später als Monarchist und treuer Anhänger des großen Napoleon. Gauß hat ein einsames und stilles Gelehrtenleben in recht engen Verhältnissen geführt. Er hat seinen allerdings elementaren Unterricht als Last empfunden, sich um Politik kaum gekümmert und vom Staate nur gefordert, daß er ihm die Möglichkeit ungestörten Schaffens gäbe.

Monge lehrte zunächst in der Kriegsschule zu Mézières und hat dort den Unterricht in Darstellender Geometrie ausgebildet. In der schlimmsten Umwälzung, zur Zeit der größten Geldentwertung wurde 1794 in Paris die Ecole Polytechnique gegründet, wie Jacobi sagt „eine Schule ohne

Vorbild und ohne Nachbild in Europa"[1], und zwar als ein militärisches Internat. Revolutionszeiten, in denen man viel vom ewigen Frieden redet, sind ja dem Emporkommen neuer militärischer Einrichtungen immer günstig gewesen. Monge war als Lehrer und Organisator die treibende Kraft dieser Offiziersschule, und er erreichte, daß die Geometrie zum Mittelpunkt ihres unglaublich intensiven Lehrbetriebes wurde. Die bedeutendsten Mathematiker Frankreichs wurden an die Schule berufen. Durch die Veröffentlichungen der Vorlesungen reichte die Wirksamkeit ihres Unterrichts über die Grenzen Frankreichs hinaus. So ist von Monge außer dem genannten Werk über Differentialgeometrie besonders noch ein Lehrgang der Darstellenden Geometrie, der ebenfalls 1795 zu erscheinen begonnen hat, berühmt geworden.

Der außerordentlich anregenden Lehrbegabung von Monge gelang es, eine geometrische „Schule" zu begründen, der vor allem Ch. Dupin (1784—1873) angehört, dessen Name in diesem Kapitel wiederholt genannt wurde. Während bei Monge die geometrische Anschauung und die Handhabung der analytischen Rechenverfahren noch aufs innigste verknüpft sind, tritt bei dem zweiten großen „Schüler" von Monge, V. J. Poncelet (1788—1867), dem Begründer der projektiven Geometrie, eine völlige Loslösung dieses Zweiges der Geometrie von der Analysis ein. Die Arbeiten aus der Schule von Monge sind größtenteils in Gergonnes „Annales des mathématiques pures et appliquées" (Nîmes 1810—1831), der ersten rein mathematischen Zeitschrift, veröffentlicht.

Von den äußeren Lebensschicksalen von Monge sei noch erwähnt, daß er während der Revolution Marineminister war, in nahen Beziehungen zu Napoleon stand, mit ihm den ersten italienischen Feldzug und das ägyptische Abenteuer mitgemacht hat. Den Sturz seines Kaisers hat Monge nicht lange überlebt.

§ 66. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 43). Eine viermal stetig differenzierbare Fläche F werde durch $x_3 = f(x_1, x_2)$ dargestellt (x_1, x_2, x_3 = kartesische Koordinaten des euklidischen Raumes!). Man zeige: Es gilt die kanonische Entwicklung

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}x_1^2 + \frac{1}{R_2}x_2^2\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{R_1}\right)x_1^3 + 3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{R_1}\right)x_1^2 x\right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)x_1 x_2^2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{R_2}\right)x_2^3\right) + B(x_1, x_2)$$

mit

$$\lim_{x_1^2+x_2^2\to 0} \frac{B(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

[1] Jacobi, C. G. J.: Werke VII, S. 356.

2. (Zu § 43). Man beweise folgendes duales Gegenstück zum Satz von Meusnier: Es sei t eine Tangente in einem nichtparabolischen Punkt p einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche F. Dann gilt: Alle Berührkegel K von F mit einem beliebigen Punkt von t als Spitze besitzen längs t „Krümmungskegel" (d.h. Drehkegel, welche mit K die Tangentialebene durch t und zwei unendlich benachbarte Tangentialebenen gemein haben), welche eine F in p berührende Kugel (die sogenannte Mannheim-Kugel) umhüllen.

[Anleitung: Man benutze die Polarität an einer geeigneten, F in p berührenden Kugel!]

3. (Zu § 43). Man beweise: Es sei ϱ der Krümmungsradius des Normalschnitts eines Zylinders Z, der eine dreimal stetig differenzierbare Fläche F in dem nichtparabolischen Punkt p berührt, und es sei φ der Winkel der Zylindererzeugenden mit der zur Hauptkrümmung $\frac{1}{R_2}$ von F in p gehörenden Richtung. Dann gilt als duales Gegenstück zum Satz von Euler

$$\varrho = R_1 \cos^2\varphi + R_2 \sin^2\varphi.$$

4. (Zu § 43). Sei $F: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine dreimal stetig differenzierbare Fläche mit einer für $s = s_0$ durch den Punkt p mit den Parametern u_0^i gehenden dreimal stetig differenzierbaren Flächenkurve $C: u^i = u^i(s)$ $(i = 1, 2; s =$ Bogenlängenparameter), deren Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ überall von 0 verschieden sei und deren Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$ mit der Flächennormalen $\mathfrak{n}$ den Winkel θ einschließe. Man beweise: Der Ausdruck

$$\left(3\frac{d\theta}{ds} + \frac{2}{\tau}\right)\frac{\sin\theta}{\varrho} - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\cos\theta$$

hängt für $s = s_0$ nur von der durch $\frac{du^i}{ds}(s_0)$ $(i = 1, 2)$ gegebenen Richtung von C in p ab.

5. (Zu § 44). Man beweise: Die mittlere Krümmung H eines beliebigen Punktes einer zweimal stetig differenzierbaren Fläche hat denselben Wert wie

a) das arithmetische Mittel der Normalkrümmungen in zwei zueinander senkrechten durch den Flächenpunkt gehenden Richtungen,

b) der Integralmittelwert $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R}\,d\varphi$.

6. (Zu § 44). Zu einer Schar von zweimal stetig differenzierbaren Drehflächen, die aus einer von ihr durch Verschiebung längs der Achse entsteht, werde eine neue (zweimal stetig differenzierbare) Drehfläche mit derselben Achse konstruiert, die die Flächen der Schar senkrecht schneidet. Man beweise: Die Gaußsche Krümmung der neuen Fläche ist entgegengesetzt gleich der Gaußschen Krümmung der durch diesen Punkt gehenden Fläche der Schar.

7. (Zu § 44). Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine zweimal stetig differenzierbare Fläche F und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2) + c\mathfrak{n}(u^1, u^2)$ $(c = \text{const})$ die „Parallelfläche F_c von F im Abstand c" $(|c| < \text{Min}\,(|R_1|, |R_2|))$. Man beweise: Für die mittlere Krümmung H_c bzw. die Gaußsche Krümmung K_c von F_c gilt:

$$H_c = \frac{H - cK}{1 - 2cH + c^2K}, \qquad K_c = \frac{K}{1 - 2cH + c^2K}.$$

8. (Zu § 46). Sei F eine zweimal stetig differenzierbare Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Man zeige: In jedem Punkt von F, der nicht Nabel-

punkt ist, gibt es genau zwei zueinander senkrechte Richtungen derart, daß für die hindurchgehenden Flächenkurven die geodätische Torsion a (vgl. § 34!) maximal bzw. minimal wird. Diese Richtungen sind genau die Winkelhalbierenden der Krümmungsrichtungen von F im betrachteten Punkt.

9. (Zu § 47). Man bestimme die vier reellen Nabelpunkte der algebraischen Fläche $x_1x_2x_3 = 1$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

10. (Zu § 47). Man zeige: Die einzigen dreimal stetig differenzierbaren Flächen ohne Flachpunkte, für welche die Gesamtwindung $\oint \frac{1}{\tau}\, ds$ aller auf ihr liegenden, geschlossenen (dreimal stetig differenzierbaren) Kurven mit $\frac{1}{\varrho} \neq 0$ konstant (und zwar gleich 0) ist, sind die Kugeln. (Dieser Satz stellt die Umkehrung zum Satz in Übungsaufg. 5. vom Kap. III § 40 dar!).

[Anleitung: Benutze Übungsaufg. 6 von Kap. III § 40!].

11. (Zu § 50). Durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2, t)$ ($\mathfrak{x}$ = zweimal stetig differenzierbar; $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_t\}$ = linear unabhängig) sei eine von einem reellen Parameter t abhängende Schar von Flächen F_t mit den Kurven $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$ als Orthogonaltrajektorien gegeben. Es wird angenommen, daß die durch $\mathfrak{x}(u^1, u^2, a) \to \mathfrak{x}(u^1, u^2, b)$ definierte Abbildung der Fläche F_a auf F_b 1. längentreu bzw. 2. flächentreu ist (a, b = beliebig konstant). Man zeige: Alle Scharflächen F_c sind 1. Ebenen bzw. 2. Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung H (Minimalflächen).

12. (Zu § 50). Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1) + r(\cos u^2\, \mathfrak{v}_2(u^1) + \sin u^2 \mathfrak{v}_3(u^1))$ die Parameterdarstellung einer sogenannten „Röhrenfläche", welche von einer einparametrigen Schar von Kreisen vom konstanten Radius $r > 0$ gebildet wird, deren Mittelpunkte die „Seele" $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1)$ (u^1 = Bogenlängenparameter) erfüllen, welche als zweimal stetig differenzierbare Raumkurve mit einer der Bedingung $\varrho(u^1) > r$ genügenden Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ vorausgesetzt wird ($\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ = orthonormierte stetig differenzierbare Vektorfunktionen mit $\mathfrak{y}'\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{y}'\mathfrak{v}_3 = 0$!). Man beweise für das Oberflächenelement do der Röhrenfläche bzw. für das Oberflächenelement $d\omega$ ihres sphärischen Bildes die Formeln

$$do = r\left(1 - \frac{r}{\varrho}(\cos u^2\, \mathfrak{v}_2 + \sin u^2 \mathfrak{v}_3)\, \mathfrak{h}\right) du^1\, du^2,$$

$$d\omega = -\frac{1}{\varrho}\left((\cos u^2 \mathfrak{v}_2 + \sin u^2 \mathfrak{v}_3)\, \mathfrak{h}\right) du^1\, du^2.$$

13. (Zu § 52). Man bestimme explizit die Asymptotenlinien des durch Drehung eines Kreises um eine seiner Tangenten entstehenden „Dorntorus"

$$x_1 = a(1 - \cos t)\cos\varphi,\ x_2 = a(1 - \cos t)\sin\varphi,\ x_3 = a\sin t$$

$$\left(0 \leqq \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

14. (Zu § 53). Sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1) + u^2\mathfrak{e}(u^1)$ mit $\mathfrak{e}^2 = 1$ und $\mathfrak{e}' \neq 0$ eine zweimal stetig differenzierbare Regelfläche, deren „Leitkurve" $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1)$ mit dem Bogenlängenparameter u^1 gleichzeitig „Kehlkurve" der Regelfläche ist (vgl. § 34). Man beweise, daß für die an die Leitkurve angehefteten Dreibeine $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{z}\}$ mit $\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{e}'}{|\mathfrak{e}'|}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{n}$ die (den Frenetschen Formeln entsprechenden) Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{e}' = \varkappa\mathfrak{n},\ \mathfrak{n}' = -\varkappa\mathfrak{e} + \tau\mathfrak{z},\ \mathfrak{z}' = -\tau\mathfrak{n}$$

mit $\varkappa = |\mathfrak{e}'| > 0$ und $\tau = (\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}')$ sowie

$$\mathfrak{y}' = \cos\sigma\, \mathfrak{e} + \sin\sigma\, \mathfrak{z}$$

mit $\sigma = \sphericalangle(\mathfrak{y}', \mathfrak{e})$ gelten, und zeige außerdem, daß die durch (beliebige) Vorgabe der (stetig differenzierbaren) „Krümmung" $\varkappa > 0$, (stetigen) „Windung" τ und (stetig differenzierbaren) „Striktion" σ als Funktion von u^1 eindeutig eine Regelfläche mit diesen Größen bestimmt ist.

15. (Zu § 53). Man beweise: Eine fünfmal stetig differenzierbare Torse F, bei welcher die Orthogonaltrajektorien ihrer Erzeugenden alle ebene Kurven sind, ist im allgemeinen

a) ein Zylinder,

b) ein Drehkegel,

c) die Tangentenfläche einer Böschungslinie (d.h. eine sogenannte „Böschungstorse") in bezug auf die Ebenenrichtung der Orthogonaltrajektorien.

16. (Zu § 53). Man zeige: Sei $\mathfrak{x}(u^1, u^2) = \mathfrak{y}(u^1) + u^2\mathfrak{e}(u^1)$ mit $\mathfrak{e}^2 = 1$ eine stetig differenzierbare Regelfläche. Dann besteht zwischen der Gaußschen Krümmung K der Regelfläche und der geodätischen Krümmung c (vgl. § 34!) der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden $u^1 = \text{const}$ der Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\sqrt[+]{-K} = 2c\sqrt[+]{-K}.$$

17. (Zu § 54). Man beweise: Die einzigen zweimal stetig differenzierbaren Schiebflächen $\mathfrak{x}(u^1, u^2) = \mathfrak{y}(u^1) + \mathfrak{z}(u^2)$, auf denen die Schiebkurven ein orthogonales Netz bilden, wobei eine von ihnen ohne Wendepunkte ist, sind die Zylinder.

18. (Zu § 54). Die dreimal stetig differenzierbare Fläche F: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ sei auf ein Netz konjugierter Kurven als Parameterkurven bezogen und habe die Eigenschaft, daß die Tangentialebenen längs jeder Parameterkurve

a) einen Zylinder bzw.

b) einen Kegel umhüllen, dessen Erzeugende bzw. Spitze zweimal stetig differenrenzierbar von dem entsprechenden Parameter abhängt. Dann gilt:

a) F ist eine Schiebfläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1) + \mathfrak{z}(u^2)$ bzw.

b) F hat die Darstellung $\mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{y}(u^1) + \mathfrak{z}(u^2)}{U_1(u^1) + U_2(u^2)}$

mit dreimal stetig differenzierbaren Vektorfunktionen $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und dreimal stetig diffezierbaren Funktionen U_1, U_2.

19. (Zu § 56). Man beweise: Ist F eine dreimal stetig differenzierbare Fläche und c eine Konstante mit $\dfrac{1}{R_2} < c < \dfrac{1}{R_1}$, so gilt: Durch jeden Flächenpunkt p gehen zwei verschiedene stetig differenzierbare Kurven C_i konstanter Normalkrümmung $b = c$ $(i = 1, 2)$, deren geodätische Windungen a_i in p entgegengesetzt gleich sind.

20. (Zu § 56). Man zeige: In Analogie zum Satz von Enneper: $K = -\dfrac{1}{\tau^2}$ gilt für die mittlere Krümmung H einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche mit negativer Gaußscher Krümmung:

$$H = \frac{1}{\tau}\operatorname{cotg}\varphi,$$

worin $\dfrac{1}{\tau}$ die Windung einer Asymptotenlinie der Fläche und φ den Winkel zwischen beiden Asymptotenlinien bedeuten.

21. (Zu § 59 und § 64). Es seien $\hat{e}_{ij}\,du^i\,du^j$ bzw. $\hat{L}_{ij}\,du^i\,du^j$ eine positiv definite, zweimal stetig differenzierbare bzw. eine einmal stetig differenzierbare quadratische Differentialform auf einem Bereich $|u^i - u^i_{(0)}| < b_i$ $(i = 1, 2)$, welche den Integrier-

barkeitsbedingungen

$$\hat{r}_{lijk} = \hat{e}_{ij}\hat{e}_{kl} - \hat{e}_{ik}\hat{e}_{jl} \quad \text{und} \quad \hat{L}_{ij;k} = \hat{L}_{ik;j}$$

genügen (; = kovariante Ableitung, $\hat{r}_{lijk}$ = Krümmungstensor bezüglich $\hat{e}_{ij}\,du^i\,du^j$!). Man beweise: Es existiert bis auf Bewegungen genau eine zweimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ $(|u^i - u^i_{(0)}| < b_i)$ mit $\hat{L}_{ij}\,du^i\,du^j$ bzw. $\hat{e}_{ij}\,du^i\,du^j$ als zweiter bzw. dritter Grundform.

b) Bemerkungen

1. (Zu § 46 und § 52). Hartmann und Wintner untersuchen das Verhalten von Krümmungslinien bzw. Asymptotenlinien in der Umgebung eines isolierten Nabelpunktes bzw. Flachpunktes bei gewissen Zusatzbedingungen (Amer. J. Math. **75** (1953) 277—297)).

2. (Zu § 47). Nabelpunkte auf den analytischen „W-Flächen", d.h. Flächen mit einer Relation $W\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right) = 0$ zwischen den beiden Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ werden von H. Hopf untersucht (Math. Nachr. **4** (1951) 232—249).

3. (Zu § 50). Von Minkowski stammt die folgende Definition der Oberfläche eines Flächenstückes F: Sei F_h der „Parallelkörper im Abstand h" von F, d.h. die Vereinigungsmenge aller Vollkugeln vom Radius h mit einem auf F liegenden Mittelpunkt, und sei $V(F_h)$ das Volumen von F_h. Dann heißt

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{V(F_h)}{h}$$

„Oberfläche" von F. Diese Definition stimmt bei zweimal stetig differenzierbarem F mit unserer Definition in § 50 überein.

4. (Zu § 50). F. Löbell untersucht in mehreren, hauptsächlich in den Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Arbeiten die Abbildung zweier durch gleiche Parameter aufeinander bezogenen Flächen des euklidischen Raumes und die Differentialinvarianten dieser Abbildung.

5. (Zu § 55). In § 55 wurde gezeigt, daß die einzigen flachpunktfreien Flächen mit lauter parabolischen Punkten ($K \equiv 0$) Torsen sind. Hartmann und Nirenberg bewiesen weitergehend, daß jede zweimal stetig differenzierbare Fläche mit identisch verschwindender Gaußscher Krümmung die folgende Eigenschaft besitzt: Jeder ihrer Punkte ist innerer Punkt einer auf der Fläche liegenden Strecke, längs welcher die Tangentialebene konstant ist. (Amer. J. Math. **81** (1959) 901—920).

6. (Zu § 59). Die mittlere Krümmung H einer Fläche genügt zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit Koeffizienten, die nur von der ersten Grundform abhängen. Nebenergebnis: Die Fläche ist lokal (unter einer schwachen Zusatzvoraussetzung) durch ihre erste Grundform und H bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt (T. Y. Thomas, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945) 390—399).

7. (Zu § 59). K. Leichtweiß zeigte, daß in einer gewissen Analogie zu den natürlichen Gleichungen einer Kurve (§ 16) auch (im allgemeinen) eine analytische Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ lokal durch die beliebig mögliche Vorgabe einer linear gebrochenen Funktion von mittlerer und Gaußscher Krümmung

$$\frac{aH + bK + c}{dH + eK + f} \qquad (a, \ldots, f = \text{const})$$

als analytische Funktion von „isothermen" bzw. „affin isothermen" bzw. „sphärisch isothermen" Parametern mit $g_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}$ bzw. $L_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}$ bzw. $e_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ und eines analytischen „Anfangsstreifen" $u^1 = s$ (s = Bogenlängenparameter), $u^2 = 0$ eindeutig bestimmt ist (Math. Z. **57** (1953) 244—264).

8. (Zu § 59). E. Cartan (Bull. Sci. Math. (2) **67**, S. 8–32) und J. Erard (Diss. ETH Zürich 1968) haben gezeigt, daß es unter gewissen Voraussetzungen stets eine durch eine vorgegebene analytische Kurve gehende Fläche mit vorgegebener analytischer zweiter Fundamentalform gibt. Dies hat in neuester Zeit den Anstoß zu einer „Differentialgeometrie bezüglich der zweiten Grundform" gegeben.

9. K. Strubecker entwickelt eine Differentialgeometrie für Flächen des „isotropen Raumes" mit dem Bogenelement $ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2$ und beweist viele zu Sätzen von Kap. IV analoge Sätze (Math. Z. **48** (1943) 369–427).

10. P. Hartmann und A. Wintner konnten in zahlreichen, hauptsächlich im „American Journal of Mathematics" erschienenen Arbeiten die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen in der Flächentheorie abschwächen.

5. Kapitel

Cartansche Differentialformen auf einer Fläche

§ 67. Definition, alternierendes Produkt und äußeres Differential von Differentialformen

Neben dem in den Paragraphen 61—64 entwickelten Riccischen Tensorkalkül existiert gleichwertig der zunächst völlig anders erscheinende Kalkül der „Differentialformen" von E. Cartan, welcher im folgenden dargelegt werden soll. Es wird sich die Brauchbarkeit dieses Kalküls für die Flächentheorie erweisen; wir können insbesondere die Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen in anderer Weise als in § 64 formulieren, was für viele Zwecke praktischer ist.

Cartan ging bei der Einführung seiner Differentialformen von dem Begriff eines „Linienintegrals"

$$\int \left(a_1 \frac{du^1}{dt} + a_2 \frac{du^2}{dt} \right) dt = \int a_i \frac{du^i}{dt}\, dt \tag{1}$$

bzw. eines „Gebietsintegrals"

$$\iint a_{12} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)}\, dt^1\, dt^2 \tag{2}$$

mit stetigen Integranden a_1, a_2 bzw. a_{12} als Funktionen von u^1 und u^2 aus, welches über eine stetig differenzierbare Kurve

$$u^i = u^i(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta) \tag{3}$$

bzw. über einen Bereich B mit „stetig differenzierbarer Parameterdarstellung"

$$u^i = u^i(t^1, t^2) \tag{4}$$

$\big((t^1, t^2) \in T,\ T =$ abgeschlossen, beschränkt und besitze einen Jordanschen Inhalt!$\big)$

auf unserer Fläche erstreckt wird ($i = 1,2$). Der Wert des Linienintegrals (1) bzw. des Gebietsintegrals (2) ist von der Auswahl des Parameters t bzw. der

Parameter t^1, t^2 in (3) bzw. (4) unabhängig; nach Ausführung der Substitution

$$t = g(t^*)$$

bzw.

$$t^i = g_i(t^{1*}, t^{2*}) \quad (i = 1,2)$$

(g, g_1, g_2 stetig differenzierbar, $\frac{dg}{dt^*} > 0$, $\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(t^{1*}, t^{2*})} > 0$)
in (1) bzw. (2) erhält man nämlich

$$\int a_i \frac{du^i}{dt}\, dt = \int a_i \frac{du^i}{dt} \frac{dg}{dt^*}\, dt^* = \int a_i \frac{du^i}{dt^*}\, dt^* \tag{5}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \iint a_{12} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)}\, dt^1\, dt^2 &= \iint a_{12} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)} \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(t^{1*}, t^{2*})}\, dt^{1*}\, dt^{2*} \\ &= \iint a_{12} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^{1*}, t^{2*})}\, dt^{1*}\, dt^{2*}. \end{aligned} \tag{6}$$

Infolgedessen kann (1) und (2) symbolisch auch in der (abgekürzten) Form

$$\int a_i\, du^i \tag{7}$$

und

$$\iint a_{12}\, du^1\, du^2 \tag{8}$$

geschrieben werden.

E. Cartan nennt nun die als Integranden in (7) und (8) auftretenden *formalen Linearkombinationen*

$$\omega^{(1)} = a_i\, du^i \tag{9}$$

bzw.

$$\omega^{(2)} = a_{12}\, du^1\, du^2 \tag{10}$$

der „Differentiale" du^1 und du^2 mit den auf dem Parametergebiet U der Fläche stetigen Funktionen a_1, a_2 bzw. a_{12} der Flächenparameter u^1, u^2 als Koeffizienten „Differentialformen" vom Grade 1 (oder „Pfaffsche Formen") bzw. vom Grade 2 auf der Fläche. Wir betonen ausdrücklich, *daß die Differentiale hierbei (ähnlich wie bei Polynomen in der abstrakten Algebra) als „Unbestimmte", nicht aber als „unendlich kleine Größen" anzusehen sind.*

Auf Grund der Formeln

$$\int a_i \frac{du^i}{dt}\, dt + \int b_i \frac{du^i}{dt}\, dt = \int (a_i + b_i) \frac{du^i}{dt}\, dt,$$

$$c \int a_i \frac{du^i}{dt}\, dt = \int c a_i \frac{du^i}{dt}\, dt \qquad (c = \text{const})$$

bzw.

$$\iint a_{12}\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2+\iint b_{12}\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1dt^2=\iint(a_{12}+b_{12})\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2,$$

$$c\iint a_{12}\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2=\iint ca_{12}\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2\quad(c=\text{const})$$

für Linien- bzw. Gebietsintegrale ist es plausibel, die „Addition" und die „skalare Multiplikation" von Differentialformen desselben Grades folgendermaßen zu definieren:

(11a) $$a_i\,du^i+b_i\,du^i=(a_i+b_i)\,du^i$$

bzw.

(11b) $$a_{12}\,du^1\,du^2+b_{12}\,du^1\,du^2=(a_{12}+b_{12})\,du^1\,du^2$$

und

(12a) $$c(a_i\,du^i)=(ca_i)\,du^i$$

bzw.

(12b) $$c(a_{12}\,du^1\,du^2)=(ca_{12})\,du^1\,du^2\quad(c=\text{const}).$$

Hieraus ergibt sich, daß für die Differentialformen dieselben Regeln wie für das Rechnen mit Vektoren gelten (vgl. § 1!).

Beachtet man weiter die für Gebietsintegrale geltende Relation

$$\iint\frac{\partial(u^2,u^1)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2=-\iint\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(t^1,t^2)}dt^1\,dt^2,$$

so erscheint es sinnvoll, für die formalen Produkte $du^1\,du^2$ und $du^2\,du^1$ die Gültigkeit des „Antikommutativgesetzes"

(13) $$du^2\,du^1=-du^1\,du^2$$

zu fordern. Allgemeiner definieren wir für zwei beliebige Pfaffsche Formen $a_i\,du^i$ und $b_i\,du^i$ ein „alternierendes Produkt" durch

(14) $$\begin{aligned}(a_1\,du^1+a_2\,du^2)\wedge(b_1\,du^1+b_2\,du^2)&=a_1b_1\,du^1\,du^1+a_1b_2\,du^1\,du^2\\&+a_2b_1\,du^2\,du^1+a_2b_2\,du^2\,du^2=(a_1b_2-a_2b_1)\,du^1\,du^2,\end{aligned}$$

indem wir die Gültigkeit des Distributivgesetzes verlangen und (13) sowie die analog ableitbaren Formeln

(15) $$du^1\,du^1=0,\quad du^2\,du^2=0$$

benutzen. Aus (14) folgt dann *für zwei beliebige Pfaffsche Formen* $\omega_1^{(1)}$ und $\omega_2^{(1)}$ die Gültigkeit des Antikommutativitätsgesetzes

(16) $$\omega_2^{(1)}\wedge\omega_1^{(1)}=-(\omega_1^{(1)}\wedge\omega_2^{(1)}).$$

In der Differential- und Integralrechnung gelten die Integralsätze

$$(17)\qquad \int_D \frac{\partial a}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}\,dt = \int_D \frac{d}{dt}\,a\big(u^1(t), u^2(t)\big)\,dt = a\big(u^1(\beta), u^2(\beta)\big) - a\big(u^1(\alpha), u^2(\alpha)\big)$$

(a = stetig differenzierbar, D = stetig differenzierbarer Kurvenbogen mit Parameterdarstellung $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ für $\alpha \leqq t \leqq \beta$) und

$$(18)\qquad \iint_B \left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right) du^1\,du^2 = \int_{\partial B} \left(a_1\frac{du^1}{dt} + a_2\frac{du^2}{dt}\right) dt$$

(Satz von Stokes!, a_1, a_2 = stetig differenzierbar, ∂B = stetig differenzierbare einfach geschlossene Randkurve von B mit der Parameterdarstellung $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$).

Sie geben Anlaß zur Definition eines auf stetig differenzierbare Funktionen a von u^1 und u^2 bzw. auf Pfaffsche Formen $\omega^{(1)} = a_i\,du^i$ mit stetig differenzierbaren Koeffizienten a_i anwendbaren Operators d, *des sogenannten „äußeren Differentials"*

$$(19)\qquad da = \frac{\partial a}{\partial u^i}\,du^i$$

bzw.

$$(20)\qquad d(a_i\,du^i) = da_i \wedge du^i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial u^j}\,du^j\right) \wedge du^i = \left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right) du^1\,du^2,$$

denn damit lassen sich (17) und (18) in der bemerkenswerten Form

$$(21)\qquad \int_D da = \int_{\partial D} a$$

bzw.

$$(22)\qquad \iint_B d\omega^{(1)} = \int_{\partial B} \omega^{(1)}$$

schreiben (∂D = „Rand" von D). Die Anwendung des Differentialoperators d erhöht den Grad einer Differentialform immer um 1, *wenn man zweckmäßigerweise wegen* (19) *eine stetige Funktion selbst als Differentialform* $\omega^{(0)}$ *vom Grade 0 ansieht.* Definiert man nun noch in Ergänzung zu (14) das alternierende Produkt einer Differentialform vom Grade 0 und einer Differentialform vom Grade 0, 1 oder 2 durch

$$(23a)\qquad a \wedge b = b \wedge a = ab$$

bzw.

$$(23b)\qquad a \wedge (a_i\,du^i) = (a_i\,du^i) \wedge a = (aa_i)\,du^i$$

bzw.

$$(23c)\qquad a \wedge (a_{12}\,du^1\,du^2) = (a_{12}\,du^1\,du^2) \wedge a = (aa_{12})\,du^1\,du^2 \text{ (vgl. (12))},$$

so gilt das allgemeine Multiplikationsgesetz

$$\omega_2^{(q)} \wedge \omega_1^{(p)} = (-1)^{pq}\,(\omega_1^{(p)} \wedge \omega_2^{(q)}) \quad (p, q = 0, 1, 2;\ p + q \leqq 2). \tag{24}$$

Wir fassen noch einmal zusammen: Die Definition der Kurven- und Gebietsintegrale sowie die damit verbundenen Integralsätze lassen es als zweckmäßig erscheinen, die als Integranden dieser Integrale auftretenden formalen Linearkombinationen der „Unbestimmten" du^1 und du^2 mit stetigen Funktionen der Flächenparameter als Koeffizienten näher zu untersuchen. Diese Linearkombinationen werden „Differentialformen" genannt, und für sie läßt sich nach (11), (23) *und* (14), (21) *und* (22) *eine Addition, eine alternierende Multiplikation und ein äußeres Differential definieren.*

§ 68. Rechengesetze, Transformation von Differentialformen

Wir haben im letzten Paragraphen schon festgestellt, daß in bezug auf die Addition von Differentialformen die Gesetze des Rechnens mit Vektoren gelten; insbesondere haben wir

$$\omega_1^{(p)} + (\omega_2^{(p)} + \omega_3^{(p)}) = (\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)}) + \omega_3^{(p)} \quad \text{(Assoziativgesetz)}, \tag{25}$$

$$\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)} = \omega_2^{(p)} + \omega_1^{(p)} \quad \text{(Kommutativgesetz)}, \tag{26}$$

(27) $\omega_1^{(p)} + x = \omega_2^{(p)}$ ist eindeutig lösbar (Existenz der Differenz) $(p = 0, 1, 2)$.

Außerdem sieht man für das Produkt dreier Differentialformen unmittelbar die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Multiplikation

$$\omega_1^{(p)} \wedge (\omega_2^{(q)} \wedge \omega_3^{(r)}) = (\omega_1^{(p)} \wedge \omega_2^{(q)}) \wedge \omega_3^{(r)} \tag{28}$$

$$(p, q, r = 0, 1, 2;\ p + q + r \leqq 2)$$

ein, weil hierbei mindestens eine Differentialform vom Grade 0, d.h. eine Funktion sein muß. Wir können daher jede Differentialform vom Grade 2 statt durch (10) in der Form

$$\omega^{(2)} = a_{12}\, du^1 \wedge du^2 \tag{29}$$

ausdrücken (vgl. (14)!), was wir im folgenden immer tun wollen. An Stelle des Kommutativgesetzes (26) bei der Addition gilt das Multiplikationsgesetz (24). Addition und Multiplikation werden verknüpft durch die Distributivgesetze

$$(\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)}) \wedge \omega_3^{(q)} = (\omega_1^{(p)} \wedge \omega_3^{(q)}) + (\omega_2^{(p)} \wedge \omega_3^{(q)}) \tag{30a}$$

und

$$\omega_3^{(q)} \wedge (\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)}) = (\omega_3^{(q)} \wedge \omega_1^{(p)}) + (\omega_3^{(q)} \wedge \omega_2^{(p)}) \tag{30b}$$

$$(p, q = 0, 1, 2;\ p + q \leqq 2),$$

eine unmittelbare Folge der „distributiven" Produktdefinition (14).

Für das äußere Differential findet man sofort

$$d(\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)}) = d\omega_1^{(p)} + d\omega_2^{(p)} \quad (p = 0, 1). \tag{31}$$

Wir beweisen weiter die „Produktregel“:

$$d(\omega_1^{(p)} \wedge \omega_2^{(q)}) = (d\omega_1^{(p)} \wedge \omega_2^{(q)}) + (-1)^p (\omega_1^{(p)} \wedge d\omega_2^{(q)}) \tag{32}$$

$$(p, q = 0, 1, 2; p + q \leqq 1).$$

Im Falle $p = q = 0$ ist diese wegen (19) eine unmittelbare Konsequenz der Produktregel der Differentiation einer Funktion. Falls $p = 0$, $q = 1$ ist, ergibt sich wegen (23b), (20), (19), (30a) und (28) mit $\omega_1^{(p)} = a$, $\omega_2^{(q)} = b_i\, du^i$:

$$d\big(a \wedge (b_i\, du^i)\big) = d\big((ab_i)\, du^i\big) = d(ab_i) \wedge du^i = (da\, b_i + a\, db_i) \wedge du^i$$

$$= da \wedge (b_i\, du^i) + a(db_i \wedge du^i) = \big(da \wedge (b_i\, du^i)\big) + \big(a \wedge d(b_i\, du^i)\big),$$

während der Fall $p = 1$, $q = 0$ unter Benutzung von (24) auf den Fall $p = 0$, $q = 1$ zurückgeführt werden kann.

Schließlich gilt für jede Differentialform $\omega^{(0)} = a$ vom Grade 0 mit zweimal stetig differenzierbarer Funktion a nach (19) und (20) das „Lemma von Poincaré“:

$$dd\omega^{(0)} = d\left(\frac{\partial a}{\partial u^i}\, du^i\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial a}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial a}{\partial u^1}\right)\right) du^1 \wedge du^2 = 0. \tag{33}$$

Für spätere Anwendungen verdient noch die folgende Bemerkung Interesse: *Die Pfaffschen Formen* $\omega_1^{(1)} = a_i\, du^i$ *und* $\omega_2^{(1)} = b_i\, du^i$ *sind genau dann „an der Stelle* $(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$ *linear unabhängig“*, d. h. *die „Koeffizientenvektoren“* $(a_1(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}), a_2(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}))$ *und* $(b_1(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}), b_2(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}))$ *sind genau dann linear unabhängig, wenn*

$$(\omega_1^{(1)} \wedge \omega_2^{(1)})\,(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$$

$$= \big(a_1(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})\, b_2(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) - a_2(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})\, b_1(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})\big)\, du^1 \wedge du^2 \neq 0$$

gilt. Insbesondere hat also die Bedingung

(34) $(\omega_1^{(1)} \wedge \omega_2^{(1)})\,(u^1, u^2) \neq 0$ für alle (u^1, u^2) aus dem Parametergebiet U

zur Folge, daß sich eine beliebige Pfaffsche Form $\omega^{(1)}$ in eindeutiger Weise mit stetigen Funktionen c_1 und c_2 als Koeffizienten aus $\omega_1^{(1)}$ und $\omega_2^{(1)}$ linear kombinieren läßt:

$$\omega = c_1\omega_1^{(1)} + c_2\omega_2^{(1)}. \tag{35}$$

Neben dem in (14) erklärten „alternierenden“ Produkt zweier Pfaffscher Formen spielt gelegentlich auch das durch

$$(a_1\, du^1 + a_2\, du^2)\,(b_1\, du^1 + b_2\, du^2)$$

$$= a_1b_1(du^1)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\, du^1\, du^2 + a_2b_2(du^2)^2 \tag{35a}$$

erklärte „kommutative" Produkt zweier Pfaffscher Formen eine Rolle. Diese Produktbildung genügt offensichtlich dem Kommutativgesetz und Distributivgesetz, und die Produkte selbst sind im Gegensatz zu den bisher betrachteten Differentialformen zweiten Grades (29) „quadratische Differentialformen"

$$a_{11}(du^1)^2 + 2a_{12}\,du^1\,du^2 + a_{22}(du^2)^2 \quad ((1)). \tag{36}$$

Wir haben bisher Differentialformen nur auf Flächen mit einer einzigen Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ $((u^1, u^2) \in U)$ definiert. Nach Ausführung einer Parametertransformation T:

$$u^i = f_i(u^{1*}, u^{2*}) \quad (i = 1, 2) \tag{37}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen f_i und $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^{1*}, u^{2*})} \neq 0$, durch welche das Gebiet U der (u^1, u^2)-Ebene eineindeutig und in beiden Richtungen stetig auf das Gebiet U^* der (u^{1*}, u^{2*})-Ebene abgebildet wird, läßt sich aber unsere Fläche auch in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*(u^{1*}, u^{2*}) = \mathfrak{x}(f_1(u^{1*}, u^{2*}), f_2(u^{1*}, u^{2*})) \quad (u^{1*}, u^{2*}) \in U^* \tag{38}$$

darstellen, und wir können auch „über U^*" Differentialformen

$$\omega^{(0)*} = b^* \tag{39a}$$

bzw.

$$\omega^{(1)*} = b_i^*\,du^{i*} \tag{39b}$$

bzw.

$$\omega^{(2)*} = b_{12}^*\,du^{1*} \wedge du^{2*} \tag{39c}$$

vom Grade 0 bzw. 1 bzw. 2 definieren, *deren Koeffizienten auf U^* erklärte stetige Funktionen sind.* Wir sagen nun, *„die Differentialformen*

$$\omega^{(0)} = a \tag{40a}$$

bzw.

$$\omega^{(1)} = a_i\,du^i \tag{40b}$$

bzw.

$$\omega^{(2)} = a_{12}\,du^1 \wedge du^2 \tag{40c}$$

über U werden bei der Parametertransformation (37) *in die Differentialformen*

$$\omega^{(0)*} = \tilde{a} = a^* \tag{41a}$$

((1)) Wegen der in (29) eingeführten Schreibweise ist eine Verwechslung der Differentialformen zweiten Grades mit den quadratischen Differentialformen ausgeschlossen.

bzw.

$$\omega^{(1)*} = \sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_j \, df_j = \tilde{a}_j \frac{\partial u^j}{\partial u^{i*}} \, du^{i*} = a_i^* \, du^{i*} \tag{41b}$$

bzw.

$$\omega^{(2)*} = \tilde{a}_{12} \, df_1 \wedge df_2 = \tilde{a}_{12} \frac{\partial u^1}{\partial u^{i*}} \frac{\partial u^2}{\partial u^{j*}} \, du^{i*} \wedge du^{j*} \tag{41c}$$

$$= \tilde{a}_{12} \frac{\partial (u^1, u^2)}{\partial (u^{1*}, u^{2*})} \, du^{1*} \wedge du^{2*} = a_{12}^* \, du^{1*} \wedge du^{2*}$$

$$(\tilde{a}(u^{1*}, u^{2*}) = a(f_1(u^{1*}, u^{2*}), f_2(u^{1*}, u^{2*})) \text{ usw.!})$$

über U^* transformiert" (vgl. (19)!), und schreiben

$$\omega^{(p)*} = T(\omega^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2). \tag{42}$$

Bei einem so definierten Transformationsverhalten ändern sich nämlich die Werte des Linienintegrals (1) bzw. des Gebietsintegrals (2) nicht!

Dann ergibt sich unmittelbar die Rechenregel

$$T(\omega_1^{(p)} + \omega_2^{(p)}) = T(\omega_1^{(p)}) + T(\omega_2^{(p)}). \tag{43}$$

Weiter finden wir

$$T(\omega_1^{(p)} \wedge \omega_2^{(q)}) = T(\omega_1^{(p)}) \wedge T(\omega_2^{(q)}) \quad (p, q = 0, 1, 2; \, p + q \leqq 2). \tag{44}$$

Dies ist im Falle $p = 0$ oder $q = 0$ trivial und folgt für $p = q = 1$ und $\omega_1^{(1)} = a_i \, du^i$, $\omega_2^{(1)} = b_i \, du^i$ aus

$$(a_1 b_2 - a_2 \tilde{b}_1) \, df_1 \wedge df_2 = (\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_1) \, df_1 \wedge df_2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} \tilde{a}_i \, df_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{2} \tilde{b}_j \, df_j \right).$$

Entsprechend beweist man

$$T(\omega_1^{(1)} \omega_2^{(1)}) = T(\omega_1^{(1)}) \, T(\omega_2^{(1)}) \quad \text{(vgl. Def. (35a)!)}. \tag{45}$$

Schließlich gilt bei stetig differenzierbaren Koeffizienten und zweimal stetig differenzierbarer Parametertransformation sogar

$$T(d\omega^{(p)}) = d(T(\omega^{(p)})) \quad (p = 0, 1), \tag{46}$$

denn im Falle $p = 0$, $\omega^{(0)} = a$ ist

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial u^i} \right) df_i = \left(\frac{\partial \tilde{a}}{\partial u^i} \right) \frac{\partial u^i}{\partial u^{j*}} \, du^{j*} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial u^{j*}} \, du^{j*} = d\tilde{a},$$

und im Falle $p = 1$, $\omega^{(1)} = a_i\, du^i$ haben wir nach (19), (20), (43), (44) und (46) mit $p = 0$

$$T(da_i \wedge du^i) = d\big(T(a_i)\big) \wedge d\big(T(u^i)\big) = \left(\frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial u^{j*}}\, du^{j*}\right) \wedge \left(\frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}}\, du^{k*}\right)$$

$$= d\left(\tilde{a}_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}}\right) \wedge du^{k*} = d\left(\tilde{a}_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{k*}}\, du^{k*}\right),$$

da wegen (16) $\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial u^{j*}\, \partial u^{k*}}\, du^{j*} \wedge du^{k*} = 0$ gilt. Wir sehen also, *daß die Transformation der Differentialformen mit der Bildung der Summe, des alternierenden und des kommutativen Produkts, sowie der äußeren Ableitung vertauschbar ist.*

Es läßt sich übrigens zeigen, daß die Transformation von Differentialformen eine Äquivalenzrelation darstellt, welche nach dem eben Gesagten mit den bisher angeführten Operationen für Differentialformen „verträglich" ist.

§ 69. Zusammenhang der Differentialformen mit Tensoren

Man könnte meinen, daß der bisher entwickelte Differentialformenkalkül mit dem in den vorangegangenen Paragraphen dargelegten Tensorkalkül nichts zu tun hat. Dem ist aber nicht so. Im Gegenteil, wir werden sehen, daß sich jede Differentialform vom Grade 1 oder 2 als ein Feld von Kovektoren oder ein Feld geeigneter „Produkte" von Kovektoren auffassen läßt.

Zu diesem Zweck betrachten wir einmal die Ableitung des längs des Kurvenbogens $u^i = u^i(t)$ auf unserer Fläche mit $t_0 \leqq t \leqq \tau$ $(i = 1, 2)$ erstreckten Linienintegrals

$$\int \omega^{(1)} = \int_{t_0}^{\tau} a_j \frac{du^j}{dt}\, dt \tag{47}$$

nach τ an der Stelle t_0 ($\omega^{(1)} = a_j\, du^j$!). Wir finden dafür den Wert

$$\left(\frac{d}{dt} \int \omega^{(1)}\right)(t_0) = a_j\big(u^1(t_0), u^2(t_0)\big) \frac{du^j}{dt}(t_0). \tag{48}$$

(48) zeigt, daß dieser Wert nur vom Tangentenvektor

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt}(t_0) = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}\big(u^1(t_0), u^2(t_0)\big) \frac{du^i}{dt}(t_0)$$

des Kurvenbogens an der Stelle t_0, und zwar in linearer Weise abhängt. Nach § 62 wird also durch die Zuordnung von $\left(\frac{d}{dt} \int \omega^{(1)}\right)(t_0)$ zu $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}(t_0)$ ein Kovektor $\mathfrak{A}$ der Fläche im Punkt $u^i = u^i(t_0)$ mit den Komponenten

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}\big(u^1(t_0), u^2(t_0)\big)\right) = a_i\big(u^1(t_0), u^2(t_0)\big) \quad (i = 1, 2) \tag{49}$$

in bezug auf die durch die Zuordnung von $\frac{du^i}{dt}(t_0)$ zu $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}(t_0)$ $(i = 1, 2)$ erklärte Basis $\{\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}\}$ definiert. Da die Komponenten (49) dieser Kovektoren von den Flächenparametern u^1, u^2 stetig abhängen, *können wir von dem „stetigen Kovektorfeld"*

$$\mathfrak{B} = a_i \mathfrak{x}^{(i)} \tag{50}$$

der Fläche sprechen, welches der Pfaffschen Form $\omega^{(1)} = a_i\, du^i$ in eineindeutiger Weise entspricht. Bei einer Parametertransformation (37) unserer Fläche ändert das Linienintegral (47) seinen Wert nicht, d.h. $\mathfrak{B}$ hängt nicht von der Wahl der Flächenparameter ab. *Seine Komponenten transformieren sich also nach dem Gesetz Kap.* 4 (185), *welches das gleiche Gesetz wie das Transformationsgesetz* (41b) *der Koeffizienten einer Pfaffschen Form ist.*

In ähnlicher Weise können wir nun einer Differentialform zweiten Grades $\omega^{(2)} = a_{12}\, du^1 \wedge du^2$ ein zweifach kovariantes Tensorfeld auf der Fläche zuordnen: Es sei B ein durch (4) gegebener Bereich, welcher den festen Punkt $u^i = u^i(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}) = u^i_{(0)}$ $(i = 1, 2)$ enthalte. Wir betrachten den Quotienten $\frac{1}{2}\frac{\iint_B \omega^{(2)}}{\iint_T dt^1\, dt^2}$ und bilden den Grenzwert dieses Quotienten für $d(T) \to 0$, wenn $d(T)$ der „Durchmesser" von T, d.h. das Maximum des euklidischen Abstands zweier Punkte von T ist. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ergibt jetzt wegen

$$\iint_B \omega^{(2)} = \iint_T a_{12} \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)}\, dt^1\, dt^2: \tag{51}$$

$$\lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{2}\frac{\iint_B \omega^{(2)}}{\iint_T dt^1\, dt^2} = \frac{1}{2} a_{12}\big(u^1(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}), u^2(t^1_{(0)}, t^2_{(0)})\big) \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)}(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}). \tag{52}$$

Dieser Wert hängt wegen $\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(t^1, t^2)} = \frac{\partial u^1}{\partial t^1}\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \frac{\partial u^1}{\partial t^2}\frac{\partial u^2}{\partial t^1}$ im Sinne von § 62 „bilinear" von den beiden Tangentenvektoren

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t^i}(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}) = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^j}\big(u^1(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}), u^2(t^1_{(0)}, t^2_{(0)})\big) \frac{\partial u^j}{\partial t^i}(t^1_{(0)}, t^2_{(0)}) \quad (i = 1, 2)$$

der Fläche ab. Hierdurch wird auf der Fläche also ein zweifach kovariantes, stetiges Tensorfeld Φ mit den Komponenten

$$\Phi\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^j}\right) = \frac{1}{2}\, a_{12}(\delta^1_i \delta^2_j - \delta^1_j \delta^2_i) = \frac{1}{2} a_{ij} \quad \text{(vgl. Kap. 4 (33))} \tag{53}$$

definiert $(i, j = 1, 2)$, wobei

$$a_{11} = a_{22} = 0, a_{21} = -a_{12} \tag{54}$$

gilt. (54) oder $a_{ji} = -a_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ ist wegen

$$\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \Phi\left(v^i \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}, w^j \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^j}\right) = \frac{1}{2} a_{ij} v^i w^j$$

gleichbedeutend mit

$$\Phi(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = -\Phi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}), \tag{55}$$

d.h. unser Tensorfeld Φ ist „schiefsymmetrisch".

Berücksichtigt man noch die vorhin angegebene Definition der Kovektoren $\mathfrak{X}^{(1)}$, $\mathfrak{X}^{(2)}$ sowie die Definition Kap. 4 (187a) des Produkts zweier Tensoren, so läßt sich Φ in der Form

$$\Phi = \frac{1}{2} a_{12}\left((\mathfrak{X}^{(1)} \otimes \mathfrak{X}^{(2)}) - (\mathfrak{X}^{(2)} \otimes \mathfrak{X}^{(1)})\right)$$

oder

$$\Phi = a_{12}(\mathfrak{X}^{(1)} \wedge \mathfrak{X}^{(2)}) \tag{56}$$

ausdrücken, wenn ein neues „alternierendes Produkt" von Kovektoren durch

$$\mathfrak{W}^{(1)} \wedge \mathfrak{W}^{(2)} = \frac{1}{2}\left((\mathfrak{W}^{(1)} \otimes \mathfrak{W}^{(2)}) - (\mathfrak{W}^{(2)} \otimes \mathfrak{W}^{(1)})\right) = -(\mathfrak{W}^{(2)} \wedge \mathfrak{W}^{(1)}) \tag{57}$$

definiert wird. *Wir stellen fest, daß der Differentialform zweiten Grades* $\omega^{(2)} = a_{12}\, du^1 \wedge du^2$ *in derselben Weise wie vorhin das zweifach kovariante schiefsymmetrische stetige Tensorfeld* (56) *entspricht.* Wiederum ändert das Gebietsintegral (51) bei einer Parametertransformation (37) seinen Wert nicht, *und somit transformieren sich die Komponenten* a_{ij} *von* Φ *nach Kap.* 4 (187), *was wegen* (54) *mit dem Transformationsgesetz* (41c) *für eine Differentialform übereinstimmt.*

Wir sehen leicht ein, daß der Summe bzw. dem alternierenden Produkt zweier Differentialformen (auf Grund der Gleichartigkeit der algebraischen Rechengesetze — vgl. insbesondere (13) und (57)!) genau die Summe bzw. das alternierende Produkt der entsprechenden Tensorfelder entspricht. *In der Sprache der abstrakten Algebra ausgedrückt bedeutet dies, daß Differentialformen und stetige schiefsymmetrische Tensorfelder „isomorph" sind.* (Dies gilt auch für Differentialformen vom Grade 0 bzw. 1, da Skalarfelder und Kovektorfelder in trivialer Weise im Sinne von Definition (55) *schiefsymmetrische* Tensorfelder darstellen.) Weiter sehen wir, daß der äußeren Ableitung $da = \frac{\partial a}{\partial u^i} du^i$ einer (stetig differenzierbaren) Differentialform a vom Grade 0 die kovariante Ableitung $Da = \frac{\partial a}{\partial u^i} \mathfrak{X}^{(i)}$ des Skalarfelds a entspricht (vgl. Kap. 4 (204)), und daß der äußeren Ableitung $d(a_i\, du^i) = \left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right) du^1 \wedge du^2$ der (stetig differenzierbaren) Differentialform $a_i\, du^i$ vom Grade 1 wegen Kap. 4

(194) und (57) das durch die kovariante Ableitung $D(a_i\mathfrak{X}^{(i)})$ von $a_i\mathfrak{X}^{(i)}$ bestimmte schiefsymmetrische Tensorfeld

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(-D(a_i\mathfrak{X}^{(i)})+AD(a_i\mathfrak{X}^{(i)})\right)=\frac{1}{2}(-a_{i;j}+a_{j;i})\,(\mathfrak{X}^{(i)}\otimes\mathfrak{X}^{(j)})\\ (58)\qquad&=\left(-\frac{\partial a_i}{\partial u^j}+\frac{\partial a_j}{\partial u^i}\right)\frac{1}{2}(\mathfrak{X}^{(i)}\otimes\mathfrak{X}^{(j)})=\frac{\partial a_j}{\partial u^i}(\mathfrak{X}^{(i)}\wedge\mathfrak{X}^{(j)})\\ &=\left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1}-\frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right)(\mathfrak{X}^{(1)}\wedge\mathfrak{X}^{(2)})\end{aligned}$$

entspricht[1].

Übrigens können auch „Differentialformen vom Grade r" als formale Linearkombinationen

$$(59)\qquad \omega^{(r)}=\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n} a_{i_1\cdots i_r}\,du^{i_1}\cdots du^{i_r}$$

der „Differentiale" $du^1,\ldots,du^n$ mit auf einem Gebiet U des „n-dimensionalen Zahlenraums" stetigen Funktionen $a_{i_1\cdots i_r}$ $(1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n)$ der Variablen $u^1,\ldots,u^n$ als Koeffizienten definiert werden $(0\leqq r\leqq n)$. Für diese lassen sich in völlig analoger Weise Summe, alternierendes Produkt, äußere Ableitung und Transformation bilden. Ihnen entsprechen ebenfalls schiefsymmetrische, stetige, r-fach kovariante Tensorfelder. Da sie für die Flächentheorie keine Bedeutung haben, werden wir nicht weiter auf sie eingehen.

§ 70. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen für die „beweglichen Dreibeine" E. Cartans

E. Cartan ordnet jedem Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ an Stelle der bei den Ableitungsgleichungen auftretenden „Grundvektoren" $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{n}$ (vgl. § 55!) ein „bewegliches Dreibein" zu, welches aus drei paarweise orthogonalen und zusammen „rechtsorientierten" Einheitsvektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ besteht, wobei speziell $\mathfrak{a}^{(3)}$ mit dem Einheitsnormalenvektor $\mathfrak{n}$ der Fläche in $\mathfrak{x}$ übereinstimmt und somit $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$ Tangentenvektoren der Fläche sind. Derartige Dreibeine existieren als zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Flächenparameter, man braucht nämlich nur etwa $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ analog wie in Kap. 1 (53), (54) zu „orthogonalisieren":

$$(60)\qquad \mathfrak{a}^{(1)}=\frac{\mathfrak{x}_1}{|\mathfrak{x}_1|},\quad \mathfrak{a}^{(2)}=\frac{\mathfrak{x}_2-(\mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{a}^{(1)}}{|\mathfrak{x}_2-(\mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{a}^{(1)}|}.$$

---

[1] Hierbei ist $A\Phi_2^0$ durch $A\Phi_2^0(\mathfrak{v},\mathfrak{w})=\Phi_2^0(\mathfrak{w},\mathfrak{v})$ für alle $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ definiert. Vgl. Fußnote 1 auf S. 153!

Sie sind allerdings nur bis auf Drehung um $\mathfrak{a}^{(3)}$ *mit dem (zweimal stetig differenzierbaren) Winkel* $\tau = \tau(u^1, u^2)$ *eindeutig bestimmt.* Bei einer derartigen Drehung gehen die Vektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ in die Vektoren $\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}$, $\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}$, $\tilde{\mathfrak{a}}^{(3)}$ über wobei

$$\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)} = \mathfrak{a}^{(1)} \cos\tau + \mathfrak{a}^{(2)} \sin\tau,\quad \tilde{\mathfrak{a}}^{(2)} = -\mathfrak{a}^{(1)} \sin\tau + \mathfrak{a}^{(2)} \cos\tau,\quad \tilde{\mathfrak{a}}^{(3)} = \mathfrak{a}^{(3)} \tag{61}$$

gilt. Es erweist sich als zweckmäßig, die Lage der Dreibeine zunächst nicht weiter zu fixieren, sondern statt dessen immer ihr Transformationsverhalten (61) zu beachten.

Wir bezeichnen im folgenden die Komponenten der Vektorfunktionen $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, 3)$ mit x_ν bzw. $a_\nu^{(\mu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ und fassen die äußeren Ableitungen $dx_\nu = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial u^i}\, du^i$ bzw. $da_\nu^{(\mu)} = \dfrac{\partial a_\nu^{(\mu)}}{\partial u^i}\, du^i$ dieser Differentialformen vom Grade 0 zu den „Vektoren“

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i\, du^i,\quad d\mathfrak{a}^{(\mu)} = \mathfrak{a}_i^{(\mu)}\, du^i \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{62}$$

zusammen. Diese Vektoren lassen sich aus den Vektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ linear kombinieren:

$$d\mathfrak{x} = \sigma_\nu \mathfrak{a}^{(\nu)},\quad d\mathfrak{a}^{(\mu)} = \omega_\nu^\mu \mathfrak{a}^{(\nu)} \qquad (\mu = 1, 2, 3),$$

wobei die Koeffizienten die Pfaffschen Formen

$$\sigma_j = d\mathfrak{x}\, \mathfrak{a}^{(j)} = (\mathfrak{x}_i \mathfrak{a}^{(j)})\, du^i \qquad (j = 1, 2) \tag{63}$$

bzw.

$$\sigma_3 = 0 \tag{64}$$

bzw.

$$\omega_\nu^\mu = d\mathfrak{a}^{(\mu)}\, \mathfrak{a}^{(\nu)} = (\mathfrak{a}_i^{(\mu)} \mathfrak{a}^{(\nu)})\, du^i = -\omega_\mu^\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{65}$$

sind. Damit haben wir die „Ableitungsgleichungen“

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \sigma_j \mathfrak{a}^{(j)} && \text{(66a)}\\ d\mathfrak{a}^{(\mu)} &= \omega_\nu^\mu \mathfrak{a}^{(\nu)} \qquad (\mu = 1, 2, 3) && \text{(66b)} \end{aligned}}$$

für die beweglichen Dreibeine erhalten. Die hierin als Pfaffsche Formen auftretenden Koeffizienten transformieren sich bei der Drehung (61) der Dreibeine in der folgenden leicht nachzurechnenden Weise:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \sigma_1 \cos\tau + \sigma_2 \sin\tau, \\ \tilde{\sigma}_2 &= -\sigma_1 \sin\tau + \sigma_2 \cos\tau, \end{aligned} \tag{67a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_3^2 &= \omega_3^2 \cos\tau + \omega_1^3 \sin\tau, \\ \tilde{\omega}_1^3 &= -\omega_3^2 \sin\tau + \omega_1^3 \cos\tau, \\ \tilde{\omega}_2^1 &= \omega_2^1 + d\tau. \end{aligned} \tag{67b}$$

Um die „Integrierbarkeitsbedingungen" von (66) in der Kap. 4 (137) entsprechenden Weise zu gewinnen, bilden wir das äußere Differential der Gleichungen (66) und setzen (66) in die entstehenden Ausdrücke wieder ein. Dies ergibt nach (32) unter Benutzung von (33) für die Komponenten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}^{(\mu)}$:

$$0 = dd\mathfrak{x} = d\sigma_j\,\mathfrak{a}^{(j)} - \sigma_j \wedge d\mathfrak{a}^{(j)} = d\sigma_j\,\mathfrak{a}^{(j)} - (\sigma_j \wedge \omega_\nu^j)\,(\mathfrak{a}^{(\nu)}$$

und

$$0 = dd\mathfrak{a}^{(\mu)} = d\omega_\nu^\mu\,\mathfrak{a}^{(\nu)} - \omega_\nu^\mu \wedge d\mathfrak{a}^{(\nu)} = d\omega_\nu^\mu\,\mathfrak{a}^{(\nu)} - (\omega_\nu^\mu \wedge \omega_\lambda^\nu)\,\mathfrak{a}^{(\lambda)}$$

$$(\mu = 1, 2, 3).$$

Diese beiden Bedingungen sind aber wegen (65) und der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ gleichbedeutend mit

(68a) und (68b)

$$\boxed{\begin{array}{l} d\sigma_1 = -\sigma_2 \wedge \omega_2^1,\ d\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \omega_2^1,\ 0 = -\sigma_1 \wedge \omega_1^3 + \sigma_2 \wedge \omega_3^2 \\ d\omega_3^2 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3,\ d\omega_1^3 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1,\ d\omega_2^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2. \end{array}}$$

(68a) und (68b) sind nun die gesuchten Integrierbarkeitsbedingungen für die Koeffizienten der Ableitungsgleichungen (66). Man kann beweisen, daß sie die einzigen Abhängigkeiten für diese Koeffizienten darstellen. Es gilt nämlich analog zum Fundamentalsatz der Flächentheorie in Kap. 4 § 59 der Satz, *daß zu zwei zweimal stetig differenzierbaren Pfaffschen Formen σ_1, σ_2 und drei stetig differenzierbaren Pfaffschen Formen ω_3^2, ω_1^3, ω_2^1, welche den Bedingungen $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = a_{12}\,du^1 \wedge du^2$ mit $a_{12} > 0$ und* (68a), (68b) *genügen, immer eine bis auf eigentliche Bewegungen eindeutig bestimmte, zweimal stetig differenzierbar von den Parametern abhängende Mannigfaltigkeit von beweglichen Dreibeinen einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche existiert, deren Ableitungsgleichungen diese Differentialformen als Koeffizienten besitzen.* Wir wollen auf einen Beweis dieses Satzes verzichten.

§ 71. Grundgrößen der Flächentheorie in Cartanscher Schreibweise

Im folgenden denken wir uns wie im vorigen Paragraphen eine Fläche $\mathfrak{x}$ mit einer zweimal stetig differenzierbar von den Flächenparametern abhängenden Mannigfaltigkeit von beweglichen Dreibeinen $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \mathfrak{a}^{(3)}\}$ gegeben. Unser Ziel ist die Darstellung der in Kap. 4 angegebenen Grundgrößen der Flächentheorie mit Hilfe der Cartanschen Differentialformen.

Zunächst gilt für die drei Grundformen der Flächentheorie nach (66) und Kap. 4 (84):

$$\begin{aligned} I &= (d\mathfrak{x})^2 = (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 \\ II &= -d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{a}^{(3)} = -\sigma_1\omega_1^3 + \sigma_2\omega_3^2 \\ III &= (d\mathfrak{a}^{(3)})^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_3^2)^2. \end{aligned} \tag{69}$$

Weiter wird die Oberfläche eines Flächenstücks wegen (66) und Kap. 4 (75) durch das Doppelintegral

$$\iint W\, du^1\, du^2 = \iint (\mathfrak{x}_1\, du^1, \mathfrak{x}_2\, du^2, \mathfrak{n}) = \frac{1}{2}\iint (d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge$$

$$= \frac{1}{2}\iint (\sigma_i\mathfrak{a}^{(i)}, \sigma_j\mathfrak{a}^{(j)}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge \overset{((1))}{=} \frac{1}{2}\iint \big((\sigma_1 \wedge \sigma_2) - (\sigma_2 \wedge \sigma_1)\big) = \iint (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

gegeben, d.h. die Differentialform zweiten Grades

$$\frac{1}{2}(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge = \sigma_1 \wedge \sigma_2 = W\, du^1 \wedge du^2 \quad (W = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}) > 0) \tag{70}$$

stellt genau das „Oberflächenelement" der Fläche dar. Analog dazu ist

$$\frac{1}{2}(d\mathfrak{a}^{(3)}, d\mathfrak{a}^{(3)}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 \tag{71}$$

das bei der sphärischen Abbildung entsprechende Oberflächenelement der Einheitskugel, woraus wegen Kap. 4 (81) für die Gaußsche Krümmung K unserer Fläche

$$K = \frac{\omega_3^2 \wedge \omega_1^3}{\sigma_1 \wedge \sigma_2} \tag{72}$$

resultiert. Untersuchen wir schließlich noch die Determinante $\frac{1}{2}(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{a}^{(3)}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge$, so finden wir einerseits auf Grund von Kap. 4 (120), (35) und (36)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{a}^{(3)}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge &= \frac{1}{2}\big((\mathfrak{x}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}) - (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n})\big)\, du^1 \wedge du^2 \\ &= -\frac{1}{2}L_{ik}g^{ik}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n})\, du^1 \wedge du^2 = -H(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \end{aligned} \tag{73}$$

und andererseits nach (66)

$$\frac{1}{2}(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{a}^{(3)}, \mathfrak{a}^{(3)})_\wedge = \frac{1}{2}\big((\sigma_1 \wedge \omega_2^3) - (\sigma_2 \wedge \omega_1^3)\big), \tag{74}$$

((1)) Die hier vorkommenden Determinanten von dreireihigen Matrizen mit Differentialformen $\omega_{\mu\nu}$ als Elementen sind durch die Formeln

$$\|\omega_{\mu\nu}\|_\wedge = \omega_{11} \wedge \omega_{22} \wedge \omega_{33} \pm \cdots \text{ bzw. } \|\omega_{\mu\nu}\| = \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33} \pm \cdots$$

definiert!

so daß sich für die mittlere Krümmung H unserer Fläche

$$H = \frac{(\sigma_1 \wedge \omega_3^2) + (\sigma_2 \wedge \omega_1^3)}{2(\sigma_1 \wedge \sigma_2)} \tag{75}$$

ergibt. Man verifiziert übrigens leicht, daß das Oberflächenelement sowie K und H bei der Transformation (67) ungeändert bleiben.

Das Gaußsche theorema egregium (vgl. Kap. 4, § 45) *läßt sich nun unter Benutzung der Cartanschen Methode des beweglichen Dreibeins folgendermaßen einsehen*: Nach (70) ist für alle (u^1, u^2) aus dem Parametergebiet U: $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)(u^1, u^2) \neq 0$; d.h. wir können auf Grund von (35) ω_2^1 aus σ_1 und σ_2 mit stetig differenzierbaren Koeffizienten c_1 und c_2 linear kombinieren:

$$\omega_2^1 = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2. \tag{76}$$

Hieraus folgt zusammen mit den Integrierbarkeitsbedingungen (68a):

$$d\sigma_1 = c_1(\sigma_1 \wedge \sigma_2),\ d\sigma_2 = c_2(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

und damit

$$\omega_2^1 = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1 \wedge \sigma_2}\sigma_1 + \frac{d\sigma_2}{\sigma_1 \wedge \sigma_2}\sigma_2. \tag{77}$$

Die Anwendung von (68b) ergibt dann wegen (72)

$$K = \frac{\omega_3^2 \wedge \omega_1^3}{\sigma_1 \wedge \sigma_2} = -\frac{d\omega_2^1}{\sigma_1 \wedge \sigma_2} = -\frac{d\left(\frac{d\sigma_1}{\sigma_1 \wedge \sigma_2}\sigma_1 + \frac{d\sigma_2}{\sigma_1 \wedge \sigma_2}\sigma_2\right)}{\sigma_1 \wedge \sigma_2} \tag{78}$$

und damit die Tatsache, daß K nur von den Pfaffschen Formen σ_1 und σ_2 abhängt, welche ihrerseits nach (69) durch die erste Grundform der Fläche bis auf die Transformation (67a) (welche K nicht ändert!) eindeutig bestimmt sind. Hiermit ist aber das theorema egregium auf neue Art bewiesen.

Wir erwähnen zum Schluß, daß sich die quadratischen Differentialgleichungen der Krümmungslinien und der Asymptotenlinien ebenfalls einfach im Cartanschen Kalkül schreiben lassen. Betrachten wir dazu in der Tat die Differentialgleichungen der Krümmungslinien Kap. 4 (47) und berücksichtigen darin die Ableitungsgleichungen (66), so finden wir die quadratische Differentialgleichung

$$-(d\mathfrak{x}, d\mathfrak{a}^{(3)}, \mathfrak{a}^{(3)}) = -\sigma_1\omega_2^3 + \sigma_2\omega_1^3 = \sigma_1\omega_3^2 + \sigma_2\omega_1^3 = 0 \tag{79}$$

für die Krümmungslinien. Entsprechend folgt aus (69) und Kap. 4 (98) die quadratische Differentialgleichung

$$-II = \sigma_1\omega_1^3 - \sigma_2\omega_3^2 = 0 \tag{80}$$

für die Asymptotenlinien. Bei der Transformation (67) bleiben die Gleichungen (79) und (80) wieder ungeändert.

§ 72. Invariante Ableitungen bezüglich eines Paares von Pfaffschen Formen

Da die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien bei speziellen Problemen der Flächentheorie eine wichtige Rolle spielen, wollen wir ihre Darstellung noch etwas modifizieren. Wir wissen, daß bei nabelpunktfreien Flächen bzw. bei hyperbolisch gekrümmten Flächen je zwei Scharen von Krümmungslinien bzw. von Asymptotenlinien auf der Fläche existieren (vgl. § 46 und § 47 bzw. § 52!), die sich in keinem Flächenpunkt „berühren". *Diese beiden Scharen von Flächenkurven sind nun die Lösungen von linearen Differentialgleichungen* $\omega_2 = 0$ *und* $\omega_1 = 0$ *(*$\omega_1, \omega_2 =$ *stetig differenzierbare Pfaffsche Formen) mit* $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Bei Krümmungslinien findet man ω_1 und ω_2 folgendermaßen: Wegen Kap. 4 (43) genügen die Krümmungslinien mit der Hauptkrümmung $\frac{1}{R_k}$ der Differentialgleichung $II - \frac{1}{R_k} I = 0$ $(k = 1, 2)$. Die Koeffizientendeterminante $\left\| L_{ij} - \frac{1}{R_k} g_{ij} \right\|$ der hierbei auftretenden quadratischen Differentialform $II - \frac{1}{R_k} I = a_{ij}^{(k)}\, du^i\, du^j \left(a_{ij}^{(k)} = L_{ij} - \frac{1}{R_k} g_{ij}\right)$ verschwindet nach § 44; man kann also schreiben

$$\varepsilon_k \left(II - \frac{1}{R_k} I\right) = \left(\sqrt{|a_{11}^{(k)}|}\, du^1 + \frac{\varepsilon_k a_{12}^{(k)}}{\sqrt{|a_{11}^{(k)}|}}\, du^2\right)^2 = 0 \quad {}^{((1))} \quad (k = 1, 2) \tag{81}$$

$$(\varepsilon_k = \operatorname{sign} a_{11}^{(k)} = \operatorname{sign} a_{22}^{(k)}),$$

d.h.

$$\omega_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \left(II - \frac{1}{R_1} I\right)}, \quad \omega_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \left(II - \frac{1}{R_2} I\right)}, \tag{82}$$

da $a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} = |a_{11}^{(k)}| \cdot |a_{22}^{(k)}| = (a_{12}^{(k)})^2$ wegen $\|a_{ij}^{(k)}\| = 0$ ist. Bei den Asymptotenlinien, welche nach Kap. 4 (98) durch die quadratische Differentialgleichung $II = L_{ij}\, du^i\, du^j = 0$ definiert werden, findet man für II die Faktorzerlegung

$$\varepsilon II = \frac{1}{|L_{11}|} \left(|L_{11}|\, du^1 + \left(\varepsilon L_{12} - \sqrt[+]{(L_{12})^2 - L_{11} L_{22}}\right) du^2\right) \tag{83}$$

$$\times \left(|L_{11}|\, du^1 + \left(\varepsilon L_{12} + \sqrt[+]{(L_{12})^2 - L_{11} L_{22}}\right) du^2\right) = \omega_2 \omega_1 \quad {}^{((2))}$$

$$(\varepsilon = \operatorname{sign} L_{11})$$

${}^{((1))}$ Hierbei haben wir o.B.d.A. $a_{11}^{(k)} \neq 0$ vorausgesetzt; im Falle $a_{22}^{(k)} \neq 0$ gilt eine analoge Formel mit Vertauschung der Rollen der Indizes 1 und 2!

${}^{((2))}$ Hierbeihaben wir o.B.d.A. $L_{11} \neq 0$ vorausgesetzt; im Fall $L_{22} \neq 0$ gilt eine analoge Formel mit Vertauschung der Rollen der Indizes 1 und 2. Den Fall $L_{11} = L_{22} = 0$, $L_{12} \neq 0$ kann man mit Hilfe der Parametertransformation $u^1 = u^{1*} + u^{2*}$, $u^2 = u^{1*} - u^{2*}$ auf die vorigen Fälle zurückführen!

mit

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{|L_{11}|}}\left(|L_{11}|\,du^1 + (\varepsilon L_{12} - \overset{+}{\sqrt{(L_{12})^2 - L_{11}L_{22}}})\,du^2\right),$$

(84)

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{|L_{11}|}}\left(|L_{11}|\,du^1 + (\varepsilon L_{12} + \overset{+}{\sqrt{(L_{12})^2 - L_{11}L_{22}}})\,du^2\right).$$

Wir wollen nun allgemeiner auf unserer Fläche die Existenz zweier ausgezeichneter, stetig differenzierbarer Pfaffscher Formen ω_1 und ω_2 *voraussetzen, welche der einzigen Bedingung*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)\,(u^1, u^2) > 0 \text{ für alle } (u^1, u^2) \in U \tag{85}$$

(vgl. (34)!) *genügen.* Dann werden durch

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 0 \tag{86}$$

auf der Fläche zwei Integralkurvenscharen definiert, die jede für sich die Fläche schlicht überdecken und sich in jedem Flächenpunkt echt „durchschneiden" (d.h. sich schneiden ohne sich zu berühren).

Es ist nun von besonderem Interesse, das äußere Differential einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion a der Flächenparameter aus ω_1 und ω_2 linear zu kombinieren:

$$da = c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \tag{87}$$

was nach (85) immer mit stetigen Koeffizienten c_1 und c_2 möglich ist (vgl. (35)!). Diese Koeffizienten lassen die folgende geometrische Bedeutung zu: Ist $u^1 = u^1(t^1)$, $u^2 = u^2(t^1)$ Integralkurve der Differentialgleichung

$$\omega_2 = b_i\,du^i = 0, \tag{88}$$

d.h. gilt für sie

$$\frac{du^1}{dt^1} = \varrho b_2, \quad \frac{du^2}{dt^1} = -\varrho b_1 \qquad (\varrho \neq 0), \tag{89}$$

so kann man auf dieser Integralkurve durch die Parametertransformation

$$t^{1*} = \int \omega_1 = \int_{t^1_{(0)}}^{t^1} a_i \frac{du^i}{dt^1}\,dt^1 = \int_{t^1_{(0)}}^{t^1} \varrho(a_1b_2 - a_2b_1)\,dt^1 \tag{90}$$

(hierbei haben wir $\omega_1 = a_i\,du^i$ gesetzt, vgl. (7)!) wegen der aus (85) folgenden Beziehung

$$\frac{dt^{1*}}{dt^1} = \varrho(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$$

einen neuen Parameter t^{1*} einführen. Damit finden wir nach (87) für die Ableitung von a längs der Integralkurve nach t^{1*}:

$$\frac{da}{dt^{1*}} = \frac{\partial a}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt^{1*}} = c_1 a_i \frac{du^i}{dt^{1*}} + c_2 b_i \frac{du^i}{dt^{1*}}$$

(91)

$$= \frac{1}{\varrho(a_1 b_2 - a_2 b_1)}\left(c_1 a_i \frac{du^i}{dt^1} + c_2 b_i \frac{du^i}{dt^1}\right) = c_1 .$$

Analog erhalten wir für die Ableitung von a längs einer Integralkurve der Differentialgleichung

(92) $$\omega_1 = a_i\, du^i = 0$$

nach dem darauf durch

(93) $$t^{2*} = \int \omega_2 = \int_{t^2_{(0)}}^{t^2} b_i \frac{du^i}{dt^2}\, dt^2$$

definierten Parameter t^{2*}:

(94) $$\frac{da}{dt^{2*}} = c_2 .$$

Die Koeffizienten in (87) *sind also genau die Richtungsableitungen von a längs der durch eine der beiden Pfaffschen Formen definierten Integralkurve nach dem durch die andere Pfaffsche Form hierauf definierten speziellen Parameter.* Sie sind unabhängig von der Wahl der Flächenparameter u^1, u^2 auf Grund des Transformationsverhaltens (41b) Pfaffscher Formen. *Man bezeichnet aus diesem Grund c_1 und c_2 auch als die „invarianten Ableitungen von a in bezug auf die Pfaffschen Formen ω_2, ω_1“* und schreibt

(95) $$c_1 = \nabla_1 a,\ c_2 = \nabla_2 a$$

und damit an Stelle von (87)

(96) $$da = \nabla_1 a \omega_1 + \nabla_2 a \omega_2 .$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit (31), (32) sofort die Rechenregeln

(97) $$\nabla_i(a + b) = \nabla_i a + \nabla_i b ,$$

(98) $$\nabla_i(ab) = a\nabla_i b + b\nabla_i a \quad (i = 1, 2).$$

Unter Voraussetzung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von a sind weiter $\nabla_1 a$ und $\nabla_2 a$ stetig differenzierbar, und man kann daher auch $\nabla_1(\nabla_2 a)$ und $\nabla_2(\nabla_1 a)$ bilden. Aus

$$0 = dda = d(\nabla_1 a \omega_1 + \nabla_2 a \omega_2) = \left(\nabla_1(\nabla_1 a)\, \omega_1 + \nabla_2(\nabla_1 a)\, \omega_2\right) \wedge \omega_1$$
$$+ \left(\nabla_1(\nabla_2 a)\, \omega_1 + \nabla_2(\nabla_2 a)\, \omega_2\right) \wedge \omega_2 + \nabla_1 a\, d\omega_1 + \nabla_2 a\, d\omega_2$$

folgt jetzt

$$\nabla_2(\nabla_1 a) - \nabla_1(\nabla_2 a) = q_1 \nabla_1 a + q_2 \nabla_2 a, \tag{99}$$

wobei die (stetigen) Funktionen q_1 und q_2 (unter Benutzung von (85)!) durch

$$d\omega_1 = q_1(\omega_1 \wedge \omega_2),\ d\omega_2 = q_2(\omega_1 \wedge \omega_2) \tag{100}$$

erklärt sind.

Zum Schluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß die Pfaffschen Formen ω_1, ω_2 durch die Integralkurven der Differentialgleichungen

$$\omega_2 = 0,\ \omega_1 = 0 \tag{101}$$

nur bis auf überall von Null verschiedene (stetig differenzierbare) Funktionen Θ_1, Θ_2 der Flächenparameter eindeutig bestimmt sind: Die Differentialgleichungen

$$\Theta_2\omega_2 = 0,\ \Theta_1\omega_1 = 0 \quad (\Theta_k(u^1, u^2) \neq 0 \text{ für } k = 1, 2) \tag{102}$$

besitzen nämlich genau dieselben Integralkurven wie die Differentialgleichungen (101), und umgekehrt ist jedes Pfaffsche Differentialgleichungssystem mit denselben Integralkurven wie bei (101) von der Gestalt (102). *Diese Tatsache gibt Anlaß, die zwei Integralkurvenscharen definierenden Pfaffschen Formen ω_1 und ω_2 so zu normieren, daß die durch $\Theta_1\omega_1$ bzw. $\Theta_2\omega_2$ auf einer Integralkurve von $\Theta_2\omega_2 = 0$ bzw. $\Theta_1\omega_1 = 0$ definierten speziellen Parameter t^{1*} bzw. t^{2*} Bogenlängenparameter sind* (vgl. (90) und (93)!). Dies führt wegen (89) und Kap. 4 (31) auf die Bedingungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{dt^{1*}}{dt^1}\right)^2 &= \varrho^2(\Theta_1)^2\ (\Theta_2)^2\,(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \left(\frac{ds}{dt^1}\right)^2 = g_{ij}\frac{du^i}{dt^1}\frac{du^j}{dt^1} \\ &= \varrho^2(\Theta_2)^2\left(g_{11}(b_2)^2 - 2g_{12}b_1b_2 + g_{22}(b_1)^2\right) = \varrho^2(\Theta_2)^2\,\|g_{kl}\|\,g^{ij}b_ib_j\end{aligned} \tag{103}$$

oder

$$\Theta_1 = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\sqrt{\|g_{kl}\|\,g^{ij}b_ib_j} \tag{104a}$$

und analog

$$\Theta_2 = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\sqrt{\|g_{kl}\|\,g^{ij}a_ia_j}\ ^{((1))}, \tag{104b}$$

wenn wir wie früher $\omega_1 = a_i\,du^i$, $\omega_2 = b_i\,du^i$ setzen.

Es seien nun noch die durch die schon so normierten Pfaffschen Formen $\omega_1 = a_i\,du^i$ und $\omega_2 = b_i\,du^i$ definierten Integralkurvenscharen auf der Fläche orthogonal. Dann kann man die (geeignet gewählten) Tangenteneinheitsvektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$ an die Integralkurven durch den Flächennormaleneinheitsvektor $\mathfrak{a}^{(3)}$ zu einer Mannigfaltigkeit von (stetig nach

((1)) Wegen (85) müssen die Quadratwurzeln in (104a) und (104b) dasselbe Vorzeichen besitzen!

den Flächenparametern differenzierbaren) beweglichen Dreibeinen $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \mathfrak{a}^{(3)}\}$ ergänzen und hat nach (66) die Ableitungsgleichungen

$$d\mathfrak{x} = \sigma_i \mathfrak{a}^{(i)} \tag{105}$$

mit $\sigma_i = \mathfrak{a}^{(i)}\, d\mathfrak{x}$ $(i = 1, 2)$. Hieraus folgt wegen (70) nach der Definition (96) der invarianten Ableitungen bezüglich σ_1, σ_2 unmittelbar

$$\nabla_i \mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{(i)} \quad (i = 1, 2), \tag{106}$$

d.h. $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ sind (als Einheitsvektoren) genau die Richtungsableitungen von $\mathfrak{x}$ nach den auf Bogenlängenparameter bezogenen Integralkurven von $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_1 = 0$. Andererseits waren aber $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ (als Tangenteneinheitsvektoren) die Richtungsableitungen von $\mathfrak{x}$ nach auf Bogenlängenparameter bezogenen Integralkurven unserer beiden vorgegebenen Differentialgleichungen $\omega_2 = 0$ und $\omega_1 = 0$. Aus dem Vergleich dieser beiden Tatsachen resultiert nun zunächst $\omega_i = \Theta_i \sigma_i$ mit $\Theta_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Auf Grund der Eigenschaft der bezüglich σ_1, σ_2 invarianten Ableitungen $\nabla_i \mathfrak{x}$, Richtungsableitungen von $\mathfrak{x}$ nach *auf Bogenlängenparameter bezogenen* Integralkurven zu sein, sind also auch σ_1, σ_2 schon in der vorhin geschilderten Weise normiert, so daß in Verbindung mit (70) und (85) $\Theta_1 = \Theta_2 = \pm 1$ gelten muß. Nach eventuellem Ersatz von $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$ durch $-\mathfrak{a}^{(1)}$, $-\mathfrak{a}^{(2)}$ und damit von σ_1, σ_2 durch $-\sigma_1$, $-\sigma_2$ haben wir also

$$\omega_i = \sigma_i \quad (i = 1, 2), \tag{106a}$$

d.h. wegen (105)

$$d\mathfrak{x} = \omega_i \mathfrak{a}^{(i)}. \tag{107}$$

§ 73. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen in invarianter Schreibweise

Die in § 70 *hergeleiteten Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen für die beweglichen Dreibeine können nun in einfacher Weise vom Differentialformenkalkül in eine die invarianten Ableitungen benutzende Form umgeschrieben werden.* Wir gehen von zwei orthogonalen Kurvenscharen auf der Fläche aus, die die Integralkurven der Differentialgleichungen $\omega_2 = 0$ und $\omega_1 = 0$ mit den normierten, der Bedingung (85) genügenden, zweimal stetig differenzierbaren Pfaffschen Formen ω_1, ω_2 seien (vgl. § 72!), und wählen die (geeignet gerichteten) Tangenteneinheitsvektoren an diese Kurvenscharen zusammen mit dem Normaleneinheitsvektor der Fläche als (zweimal stetig differenzierbare) bewegliche Dreibeine $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \mathfrak{a}^{(3)}\}$. Damit haben wir zunächst die Ableitungsgleichungen (107) sowie nach (66b)

$$d\mathfrak{a}^{(\mu)} = \omega_\nu^\mu \mathfrak{a}^{(\nu)} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{108}$$

in der Schreibweise Cartans. Nun lassen sich die (stetig differenzierbaren) Koeffizienten $\omega_\nu^\mu = -\omega_\mu^\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ in (108) wegen (85) aus ω_1 und ω_2 linear kombinieren:

$$\omega_\nu^\mu = \alpha_\nu^{\mu i}\omega_i \quad (\alpha_\nu^{\mu i} = -\alpha_\mu^{\nu i}). \tag{109}$$

Setzen wir dies in (108) ein, so finden wir

$$d\mathfrak{a}^{(\mu)} = \omega_i \alpha_\nu^{\mu i}\mathfrak{a}^{(\nu)} \quad (\mu = 1, 2, 3). \tag{110}$$

Auf Grund der Definition (96) sind dann die Ableitungsgleichungen (107) und (110) gleichwertig mit

$$\nabla_i \mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{(i)} \tag{111a}$$

$$\nabla_i \mathfrak{a}^{(\mu)} = \alpha_\nu^{\mu i}\mathfrak{a}^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2; \mu = 1, 2, 3). \tag{111b}$$

Die in (110) bzw. (111b) auftretenden Größen $\alpha_\nu^{\mu i} = -\alpha_\mu^{\nu i}$ lassen sich geometrisch leicht deuten, wenn man bedenkt, daß die Vektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ längs einer (auf den Bogenlängenparameter s^1 bezogenen) Integralkurve von $\omega_2 = 0$ gerade mit den Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ des begleitenden Dreibeins des durch die Integralkurve gegebenen Flächenstreifens übereinstimmen (vgl. § 33!). Für die Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ gelten aber die Ableitungsgleichungen (7) von Kap. 3, die in der jetzigen Schreibweise

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{a}^{(1)}}{ds^1} &= q\mathfrak{a}^{(2)} + r\mathfrak{a}^{(3)} \\ \frac{d\mathfrak{a}^{(2)}}{ds^1} &= -q\mathfrak{a}^{(1)} + n\mathfrak{a}^{(3)} \\ \frac{d\mathfrak{a}^{(3)}}{ds^1} &= -r\mathfrak{a}^{(1)} - n\mathfrak{a}^{(2)} \end{aligned} \tag{112}$$

lauten. *Hierbei sind n bzw. r bzw. q die „geodätische Windung" bzw. die „Normalkrümmung" bzw. die „geodätische Krümmung" des Streifens der Fläche mit $\omega_2 = 0$.* In ähnlicher Weise findet man, daß $\mathfrak{a}^{(2)}$, $-\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ längs einer auf den Bogenlängenparameter s^2 bezogenen Integralkurve von $\omega_1 = 0$ mit den Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ des durch $\omega_1 = 0$ gegebenen Flächenstreifens übereinstimmen, und somit die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{a}^{(1)}}{ds^2} &= \bar{q}\mathfrak{a}^{(2)} - \bar{n}\mathfrak{a}^{(3)} \\ \frac{d\mathfrak{a}^{(2)}}{ds^2} &= -\bar{q}\mathfrak{a}^{(1)} + \bar{r}\mathfrak{a}^{(3)} \\ \frac{d\mathfrak{a}^{(3)}}{ds^2} &= \bar{n}\mathfrak{a}^{(1)} - \bar{r}\mathfrak{a}^{(2)}. \end{aligned} \tag{113}$$

Dabei sind $\bar{n}$ bzw. $\bar{r}$ bzw. $\bar{q}$ die „geodätische Windung" bzw. die „Normalkrümmung" bzw. die „geodätische Krümmung" des Streifens mit $\omega_1 = 0$.

Der Vergleich von (111b) mit (112) und (113) liefert jetzt wegen $\frac{d\mathfrak{a}^{(\mu)}}{ds^i} = \nabla_i \mathfrak{a}^{(\mu)}$ $(i = 1, 2; \mu = 1, 2, 3)$:

$$\alpha_3^{21} = n, \alpha_1^{31} = -r, \alpha_2^{11} = q, \tag{114a}$$

$$\alpha_3^{22} = \bar{r}, \alpha_1^{32} = \bar{n}, \alpha_2^{12} = \bar{q}. \tag{114b}$$

Damit bekommen die Ableitungsgleichungen (111) die endgültige Gestalt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{(1)}, && \nabla_2 \mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{(2)} \\ &\nabla_1 \mathfrak{a}^{(1)} = q\mathfrak{a}^{(2)} + r\mathfrak{a}^{(3)}, && \nabla_2 \mathfrak{a}^{(1)} = \bar{q}\mathfrak{a}^{(2)} - \bar{n}\mathfrak{a}^{(3)} \\ &\nabla_1 \mathfrak{a}^{(2)} = -q\mathfrak{a}^{(1)} + n\mathfrak{a}^{(3)}, && \nabla_2 \mathfrak{a}^{(2)} = -\bar{q}\mathfrak{a}^{(1)} + \bar{r}\mathfrak{a}^{(3)} \\ &\nabla_1 \mathfrak{a}^{(3)} = -r\mathfrak{a}^{(1)} - n\mathfrak{a}^{(2)}, && \nabla_2 \mathfrak{a}^{(3)} = \bar{n}\mathfrak{a}^{(1)} - \bar{r}\mathfrak{a}^{(2)}. \end{aligned}} \tag{115a, 115b}$$

Setzen wir jetzt (109) in die Integrierbarkeitsbedingungen (68a) ein, so ergibt sich wegen (100), (106a) und (114) $q_i = \alpha_2^{1i}$ $(i = 1, 2)$, d.h.

$$q_1 = q, \; q_2 = \bar{q}, \tag{116}$$

sowie $\alpha_1^{32} + \alpha_3^{21} = 0$, d.h.

$$\bar{n} = -n. \tag{117}$$

(Hiermit ist auf neue Weise ein Satz aus § 46 bewiesen!) Weiter finden wir durch Bildung der äußeren Ableitung in (109) unter Benutzung von (96) und (100):

$$d\omega_\nu^\mu = d\alpha_\nu^{\mu i} \wedge \omega_i + \alpha_\nu^{\mu i} d\omega_i = (\nabla_1 \alpha_\nu^{\mu 2} - \nabla_2 \alpha_\nu^{\mu 1} + \alpha_\nu^{\mu i} q_i)\,(\omega_1 \wedge \omega_2)$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, 3),$$

was zusammen mit (109) in (68b) eingesetzt wegen (114), (116) und (117) die gesuchten Integrierbarkeitsbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_1 \bar{r} - \nabla_2 n + 2nq + \bar{q}(\bar{r} - r) &= 0 \\ -\nabla_1 n + \nabla_2 r - 2n\bar{q} + q(\bar{r} - r) &= 0 \\ \nabla_1 \bar{q} - \nabla_2 q + q^2 + \bar{q}^2 + r\bar{r} - n^2 &= 0 \end{aligned}} \tag{118}$$

ergibt.

Ein besonders wichtiger Spezialfall tritt ein, wenn bei einer (viermal stetig differenzierbaren) nabelpunktfreien Fläche die beiden Scharen von Krümmungslinien als Integralkurvenscharen von geeigneten normierten Differentialgleichungen $\omega_2 = 0$ bzw. $\omega_1 = 0$ gewählt werden, was nach vorigem Paragraphen immer möglich ist. In diesem Fall verschwinden

$$\bar{n} = -n = 0, \tag{119}$$

nämlich die geodätischen Windungen:

und die Ableitungsgleichungen (115b) bzw. die Integrierbarkeitsbedingungen (118) spezialisieren sich zu

$$\nabla_1 \mathfrak{a}^{(1)} = q\mathfrak{a}^{(2)} + r\mathfrak{a}^{(3)}, \quad \nabla_2 \mathfrak{a}^{(1)} = \bar{q}\mathfrak{a}^{(2)}$$

$$\nabla_1 \mathfrak{a}^{(2)} = -q\mathfrak{a}^{(1)}, \qquad \nabla_2 \mathfrak{a}^{(2)} = -\bar{q}\mathfrak{a}^{(1)} + \bar{r}\mathfrak{a}^{(3)} \tag{120}$$

$$\nabla_1 \mathfrak{a}^{(3)} = -r\mathfrak{a}^{(1)}, \qquad \nabla_2 \mathfrak{a}^{(3)} = -\bar{r}\mathfrak{a}^{(2)}$$

bzw.

$$\nabla_1 \bar{r} + \bar{q}(\bar{r} - r) = 0$$

$$\nabla_2 r + q(\bar{r} - r) = 0 \tag{121}$$

$$\nabla_1 \bar{q} - \nabla_2 q + q^2 + \bar{q}^2 + r\bar{r} = 0.$$

Hierin bedeuten die Invarianten $q, \bar{q}$ und $r, \bar{r}$ die geodätischen Krümmungen und die Normalkrümmungen der Krümmungsstreifen mit $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$, wobei $r, \bar{r}$ nach § 43 genau mit den Hauptkrümmungen der Fläche übereinstimmen, so daß

$$r = \frac{1}{R_1}, \quad \bar{r} = \frac{1}{R_2} \tag{122}$$

gilt.

Zum Schluß dieses Paragraphen untersuchen wir noch die Abhängigkeit der Invarianten $\tilde{n}, \bar{\tilde{n}}, \tilde{r}, \bar{\tilde{r}}, \tilde{q}, \bar{\tilde{q}}$ eines beliebigen orthogonalen Kurvennetzes $\tilde{\omega}_2 = 0$, $\tilde{\omega}_1 = 0$ der Fläche von den Invarianten $r, \bar{r}$ und $q, \bar{q}$ der Krümmungsstreifen. Um diese Abhängigkeit formelmäßig auszudrücken, ordnen wir wie in § 72 den beiden Kurvennetzen bewegliche Dreibeine $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \mathfrak{a}^{(3)}\}$ bzw. $\{\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}, \tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}, \tilde{\mathfrak{a}}^{(3)}\}$ zu und haben auf Grund von $\omega_i = \sigma_i$ (vgl. (106a)) bzw. $\tilde{\omega}_i = \tilde{\sigma}_i$ und (67a)

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \cos\tau + \omega_2 \sin\tau$$

$$\tilde{\omega}_2 = -\omega_1 \sin\tau + \omega_2 \cos\tau,$$

d.h. umgekehrt

$$\omega_1 = \tilde{\omega}_1 \cos\tau - \tilde{\omega}_2 \sin\tau$$

$$\omega_2 = \tilde{\omega}_1 \sin\tau + \tilde{\omega}_2 \cos\tau. \tag{123}$$

Hierin bedeutet τ den Winkel der Kurven $\tilde{\omega}_2 = 0$ mit den Krümmungslinien $\omega_2 = 0$. Desgleichen gilt für die Pfaffschen Formen ω_ν^μ, welche als Koeffizienten in (108) auftreten, nach (67b):

$$\tilde{\omega}_3^2 = \omega_3^2 \cos\tau + \omega_1^3 \sin\tau$$

$$\tilde{\omega}_1^3 = -\omega_3^2 \sin\tau + \omega_1^3 \cos\tau \tag{124}$$

$$\tilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + d\tau.$$

Berücksichtigen wir hierin

$$\omega_3^2 = \bar{r}\omega_2, \qquad \tilde{\omega}_3^2 = \tilde{n}\tilde{\omega}_1 + \tilde{\bar{r}}\tilde{\omega}_2$$
$$\omega_1^3 = -r\omega_1, \qquad \tilde{\omega}_1^3 = -\tilde{r}\tilde{\omega}_1 + \tilde{\bar{n}}\tilde{\omega}_2$$
$$\omega_2^1 = q\omega_1 + \bar{q}\omega_2, \quad \tilde{\omega}_2^1 = \tilde{q}\tilde{\omega}_1 + \tilde{\bar{q}}\tilde{\omega}_2$$

(siehe (109), (114) und (119)!) sowie (123), so finden wir nach leichter Rechnung wegen $d\tau = \nabla_1\tau\,\omega_1 + \nabla_2\tau\,\omega_2 = \tilde{\nabla}_1\tau\,\tilde{\omega}_1 + \tilde{\nabla}_2\tau\,\tilde{\omega}_2$ durch Vergleich der Koeffizienten von $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ die gesuchten Beziehungen:

$$\tilde{n} = (\bar{r} - r)\cos\tau\sin\tau, \qquad \tilde{\bar{n}} = (r - \bar{r})\cos\tau\sin\tau,$$

$$\tilde{r} = r\cos^2\tau + \bar{r}\sin^2\tau, \qquad \tilde{\bar{r}} = \bar{r}\cos^2\tau + r\sin^2\tau, \tag{125}$$

$$\tilde{q} = \tilde{\nabla}_1\tau + q\cos\tau + \bar{q}\sin\tau, \quad \tilde{\bar{q}} = \tilde{\nabla}_2\tau + \bar{q}\cos\tau - q\sin\tau.$$

Aus der ersten mittleren Gleichung von (125) ersehen wir, daß sich der Winkel τ zwischen den (als eine Schar $\tilde{\omega}_2 = 0$ eines orthogonalen Netzes auftretenden) Asymptotenlinien unserer (als hyperbolisch gekrümmt und damit nabelpunktfrei vorausgesetzten) Fläche und den Krümmungslinien $\omega_2 = 0$ wegen $\tilde{r} = 0$ durch

$$\tan\tau = \pm\sqrt{-\frac{r}{\bar{r}}} \tag{126}$$

berechnet. Daraus folgt, daß die beiden Scharen von Asymptotenlinien selbst miteinander den Winkel

$$2\tau = \arccos\frac{\bar{r} + r}{\bar{r} - r} \tag{127}$$

einschließen. Sie bilden also insbesondere genau dann selbst wieder ein orthogonales Kurvennetz, wenn

$$r + \bar{r} = 2H = 0$$

(vgl. (122)!) gilt, d.h. wenn die Fläche eine sogenannte „Minimalfläche" ist. Auf derartige Flächen werden wir ausführlich im Kap. 7 zu sprechen kommen.

§ 74. Gesimsflächen und Kanalflächen

Wir wollen die Flächen mit

$$q \cdot \bar{q} = 0 \tag{128}$$

untersuchen, also die Flächen, bei denen die Invariante q oder $\bar{q}$ verschwindet. Wegen $r - \bar{r} \neq 0$ ist die Gleichung (128) nach (121) offenbar mit

$$\nabla_2 r \cdot \nabla_1 \bar{r} = 0 \tag{129}$$

äquivalent. Wir wollen etwa $q = \nabla_2 r = 0$ annehmen. Nach S. 185 sind dann die Krümmungsstreifen der Schar, auf die sich der Ableitungsindex 1 bezieht, gleichzeitig geodätische Streifen. Nach Kap. 3 $(7)_2$ und (4) sind dabei die Kurven der Streifen, die Krümmungslinien, notwendig eben. Da die Hauptnormalen einer ebenen Kurve alle in ihrer Ebene enthalten sind, und da bei unseren geodätischen ebenen Krümmungsstreifen die Flächennormalen mit den Hauptnormalen zusammenfallen, erkennt man, daß die Fläche die Schar der Ebenen senkrecht durchsetzen muß, in denen die Krümmungslinien der ausgezeichneten Schar liegen. Unsere Flächen mit $q = 0$ sind also *orthogonale Trajektorienflächen einer Schar von Ebenen*, also solche Flächen, die entstehen, wenn wir auf einer der Ebenen eine beliebige Kurve C zeichnen, und von den einzelnen Punkten von C aus die rechtwinkligen Trajektorien der Ebenenschar ziehen, also die Kurven, deren Tangente an jeder Stelle zu der hindurchgehenden Ebene der Schar orthogonal ist. Diese Eigenschaft ist auch kennzeichnend für unsere Flächen mit $q = 0$. Denn man sieht ohne weiteres, daß bei einer Orthogonalfläche einer Ebenenschar die Schnitte mit den Ebenen der Schar Krümmungslinien sind, da längs derselben die in der Ebene gelegenen Flächennormalen eine Torse bilden (vgl. § 46!). Andererseits fallen die Flächennormalen mit den Hauptnormalen der verschiedenen Kurven zusammen, also sind die zugehörigen Streifen geodätisch, das heißt aber nach S. 185: Es ist $q = 0$. Man nennt die Flächen mit $q = 0$ nach ihrem Entdecker Monge *„surfaces moulures"* oder *Gesimsflächen*.

Wir wollen noch eine sehr einfache mechanische Erzeugung der Gesimsflächen angeben. Die Ebenen der Krümmungslinien der ausgezeichneten Schar umhüllen als einparametrige Gesamtheit offenbar eine Torse. Geht man von dieser Torse aus, so kann man von ihr durch die folgende Konstruktion zu der Gesimsfläche gelangen:

Man zeichnet auf einer der Tangentenebenen der ganz beliebig anzunehmenden Torse eine beliebige Kurve $\mathfrak{K}$. Läßt man dann die Tangentenebene ohne zu gleiten auf der Torse rollen, so daß sie diese immer längs einer Erzeugenden berührt, so beschreibt $\mathfrak{K}$ die allgemeinste Gesimsfläche.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich daraus, daß bei dem mechanischen Vorgang des gleitungsfreien Rollens die Bahnkurven der Punkte von $\mathfrak{K}$ jeweils senkrecht sind zu der Ebene von $\mathfrak{K}$.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$q = \bar{q} = 0$$

kennzeichnet die *allgemeinen Zylinderflächen*. In der Tat folgt aus (121) $r\bar{r} = 0$. Wir können dann etwa $r = 0$ annehmen. Aus $\nabla_1 \mathfrak{a}^{(1)} = \nabla_2 \mathfrak{a}^{(1)} = 0$ (vgl. (120)!) folgt jetzt die Konstanz des Vektors $\mathfrak{a}^{(1)} = \nabla_1 \mathfrak{x}$ auf der ganzen Fläche. Daraus folgt weiter, daß die Krümmungslinien der Schar 1

lauter parallele Geraden sind. Also ist die Fläche eine Zylinderfläche. Umgekehrt folgt für eine Zylinderfläche, deren Erzeugende stets Krümmungslinien sind, aus der Konstanz von $\nabla_1 \mathfrak{x}$ die Gültigkeit von $q = \bar{q} = 0$.

Wir wollen nun noch eine andere Flächenklasse kurz behandeln, nämlich die durch

$$\nabla_1 r \cdot \nabla_2 \bar{r} = 0 \tag{130}$$

gekennzeichnete, die ein Gegenstück zu der Flächenklasse (129) darstellt. Wegen der Gleichberechtigung von $\nabla_1 r$ und $\nabla_2 \bar{r}$ können wir etwa $\nabla_1 r = 0$ annehmen. Aus

$$\nabla_1 r = 0 \tag{131}$$

und der Codazzischen Gleichung (vgl. (121))

$$\nabla_2 r = -q(\bar{r} - r)$$

folgt mittels der Integrierbarkeitsbedingung

$$\nabla_2(\nabla_1 r) - q\,\nabla_1 r = \nabla_1(\nabla_2 r) + \bar{q}\,\nabla_2 r$$

(vgl. (99) und (116)) die Beziehung

$$(\nabla_1 q + q\bar{q})\,(\bar{r} - r) + q\nabla_1 \bar{r} = 0.$$

Mittels (121) erhält man daraus nach Weglassen des Faktors $r - \bar{r}$

$$\nabla_1 q = 0. \tag{132}$$

Aus $\nabla_1 r = \nabla_1 q = 0$ leitet man nun nach (120) leicht her, daß die Determinante $(\nabla_1 \mathfrak{x}, \nabla_1(\nabla_1 \mathfrak{x}), \nabla_1(\nabla_1(\nabla_1 \mathfrak{x})))$ verschwindet. Die Krümmungslinien sind also wieder eben (vgl. Kap. 1 (78)). Aus (120) folgt weiter

$$(\nabla_1(\nabla_1 \mathfrak{x}))^2 = q^2 + r^2. \tag{133}$$

Nun ist nach § 10 (78)

$$(\nabla_1(\nabla_1 \mathfrak{x}))^2 = 1 : \varrho^2 \tag{134}$$

das Quadrat der Krümmung $1 : \varrho$ der Krümmungslinie der Schar 1. Aus (131) und (132) folgt aber $\nabla_1((\nabla_1(\nabla_1 \mathfrak{x}))^2) = 0$. Die Krümmung ist also längs der ganzen Kurve konstant. Die Krümmungslinie ist daher eine ebene Kurve konstanter Krümmung, das heißt ein Kreis bzw. eine Gerade. Die Krümmungslinien der einen Schar unserer Fläche sind also alle Kreise (bzw. Geraden). Da nun weiter die Normalkrümmung r unserer Krümmungsstreifen konstant längs der ganzen Kurven ist, folgt, daß die im Kap. 3, S. 83 erwähnte Tangentenkugel jeweils für den ganzen Streifen fest ist, das heißt, daß der ganze Streifen auf einer und derselben Kugel (bzw. Ebene) liegt. Daraus ersieht man: Unsere Flächen sind einfach die *Hüllflächen einer einparametrigen Schar von Kugeln* (bzw. Ebenen). Die Hüllflächen solcher Scharen pflegt man auch als *Kanalflächen*

zu bezeichnen. Auch umgekehrt ist leicht einzusehen, daß die Gleichung (130) für Kanalflächen gültig ist.

Ist in (130) gleichzeitig $\nabla_1 r = 0$ und $\nabla_2 \bar{r} = 0$, so erhalten wir die sogenannten *Zykliden von Dupin*, die gleichzeitig als Hüllflächen von zwei Kugelscharen aufgefaßt werden können.

Wir wollen jetzt noch die Flächen bestimmen, *die gleichzeitig Gesimsflächen und Kanalflächen sind*. Nach (129) und (130) haben wir wegen der Gleichberechtigung der Größen $\nabla_1 r$, $\nabla_2 \bar{r}$ und weiter der Gleichberechtigung der beiden Größen $\nabla_2 r$ und $\nabla_1 \bar{r}$ sowie der Gleichberechtigung beider aufgeführten Größenpaare miteinander nur zwei wesentlich verschiedene Fälle

$$I: \quad \nabla_1 r = \nabla_2 r = 0,$$
$$II: \nabla_1 r = \nabla_1 \bar{r} = 0.$$

Im Fall I ist nach Kap. 3 S. 77 $|r|$ der reziproke Radius der Kugeln der Kanalfläche bzw. 0. Aus $\nabla_1 r = \nabla_2 r = 0$ folgt aber nach (19) und (96) das Verschwinden der gewöhnlichen Ableitungen: $r_1 = r_2 = 0$. Das heißt, wir haben speziell die Hüllfläche einer Schar von Kugeln mit gleichem Radius bzw. von Ebenen. Die ersteren Flächen pflegt man als *Röhrenflächen* zu bezeichnen. Im Fall II haben wir nach (121) zunächst auch $\bar{q} = 0$. Weiter bemerken wir: Für Kanalflächen $\nabla_1 r = 0$ sind ja die Krümmungslinien der Schar 1 als Kreise bzw. Geraden eben. Für den Einheitsvektor senkrecht zu der Ebene der Krümmungslinie der Schar 1, also ihren Binormalenvektor $\mathfrak{b}$ ist nach § 34 (13) im Fall $r^2 + q^2 > 0$

$$\mathfrak{b} = \frac{-r \nabla_2 \mathfrak{x} + q \mathfrak{n}}{\sqrt{r^2 + q^2}}. \tag{135}$$

$\mathfrak{b}$ ist natürlich längs der Krümmungslinien der Schar 1 fest: $\nabla_1 \mathfrak{b} = 0$. Durch Ableitung folgt aus (135) unter Berücksichtigung von $\bar{q} = 0$ und (120)

$$\nabla_2 \mathfrak{b} = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + q^2}} \left\{ \left[\nabla_2 r + q \bar{r} - \frac{r}{r^2 + q^2} (r \nabla_2 r + q \nabla_2 q) \right] \nabla_2 \mathfrak{x} \right. \tag{136}$$
$$\left. + \left[- \nabla_2 q + r \bar{r} + \frac{q}{r^2 + q^2} (r \nabla_2 r + q \nabla_2 q) \right] \mathfrak{n} \right\}.$$

Wegen $\bar{q} = 0$ nehmen die Gleichungen (121) nun die Form an:

$$\nabla_2 q = q^2 + r \bar{r}, \tag{137}$$
$$\nabla_2 r = -q \bar{r} + q r.$$

Daraus erhält man

$$\frac{r \nabla_2 r + q \nabla_2 q}{r^2 + q^2} = q, \tag{138}$$

und mittels (137) und (138) ergibt dann die Gleichung (136)

$$\nabla_2 \mathfrak{b} = 0. \tag{139}$$

Der Vektor $\mathfrak{b}$ ist also überhaupt konstant. Die Kreise, in denen sich die benachbarten Kugeln der Schar der Kanalfläche schneiden, liegen somit alle in parallelen Ebenen. Das ist aber nur möglich, wenn die Mittelpunkte der Kugeln alle auf einer festen Geraden liegen. Die Hüllfläche einer solchen Kugelschar ist aber eine *Drehfläche*. Im Fall $r^2 + q^2 = 0$ ist dagegen $q = 0$ und daher die Fläche wegen $\bar{q} = 0$ nach S. 187 eine allgemeine Zylinderfläche. Man überzeugt sich leicht, daß $\nabla_1 r = \nabla_1 \bar{r} = 0$ die Drehflächen und die allgemeinen Zylinderflächen kennzeichnet.

§ 75. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 68). Auf der Einheitssphäre (Mittelpunkt o) begrenze eine einfach geschlossene zweimal stetig differenzierbare Kurve C (Bogenlängenparameter s) einen Bereich B, in dessen „Äußeren" ein Punkt e liegt. Sei weiter x ein beliebiger Punkt von C mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x} = \vec{ox}$, $\mathfrak{e} = \vec{oe}$ der Ortsvektor von e und $\mathfrak{f}$ der zweite Streifenvektor des durch C auf der Sphäre gebildeten Flächenstreifens. Man zeige unter Benutzung des Satzes von Stokes, daß sich dann der Flächeninhalt F von B durch

$$F = \oint_C \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}{1 - \mathfrak{e}\mathfrak{x}}\, ds$$

berechnet.

2. (Zu § 70). Es seien durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2, u^3)$ und $u^3 = \text{const}$ bzw. $u^2 = \text{const}$ ($\mathfrak{x}$ = zweimal stetig differenzierbar, $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3\}$ linear unabhängig) zwei Flächenscharen des euklidischen Raums gegeben, die sich in den Kurven $u^2 = \text{const}$, $u^3 = \text{const}$ orthogonal durchdringen. Diese Kurven seien weiter Krümmungslinien auf den Flächen der beiden Scharen. Man beweise die Existenz einer einparametrigen Schar zweimal stetig differenzierbarer Flächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(t, u^2, u^3)$, die die beiden gegebenen Flächenscharen orthogonal durchdringen.

[Anleitung: Es ist zweckmäßig, ein bewegliches Dreibein geometrisch gut an die beiden gegebenen Flächenscharen anzupassen und die Tatsache zu benutzen, daß die Pfaffsche Gleichung $\omega = a_1\, du^1 + a_2\, du^2 + a_3\, du^3 = 0$ (ω = stetig differenzierbar) genau dann überall eine Integralmannigfaltigkeit besitzt, wenn $\omega \wedge d\omega = 0$ ist!].

3. (Zu § 73). Sei F eine dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ (u^1, u^2 = Krümmungslinienparameter) mit den Hauptkrümmungen r und $\bar{r}$, die den Bedingungen $r\bar{r} \neq 0$, $r - \bar{r} \neq 0$ und $\frac{\partial r}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \neq 0$ genügen sollen. Man zeige: Die Normalen von F umhüllen die beiden sogenannten „Zentraflächen"

$$Z: \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \frac{1}{r}\mathfrak{n}, \quad \bar{Z}: \bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} + \frac{1}{\bar{r}}\mathfrak{n}$$

(d.h. Z, $\bar{Z}$ stellen die „Brennflächen" der „Normalenkongruenz" dar).

4. (Zu § 73). Man nennt eine dreimal stetig differenzierbare Fläche F mit den Hauptkrümmungen $r, \bar{r}$ „W-Fläche", wenn es eine stetig differenzierbare Funktion f von r und $\bar{r}$ mit $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{r}}\right)^2 > 0$ gibt, so daß $f(r, \bar{r})$ auf der ganzen Fläche verschwindet. Es soll bewiesen werden: Eine Fläche F mit $r\bar{r} \neq 0$, $r - \bar{r} \neq 0$, $\frac{\partial r}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} \neq 0$ (u^1, u^2 = Krümmungslinienparameter) ist genau dann eine W-Fläche, wenn bei der durch die Normalenkongruenz von F vermittelten Abbildung der beiden Zentraflächen Z und $\bar{Z}$ von F (vgl. Übungsaufg. 3) die Asymptotenlinien von Z und $\bar{Z}$ einander entsprechen (d.h. die Normalenkongruenz eine sogenannte „W-Kongruenz" ist).

5. (Zu § 74). Man beweise: Die einzigen viermal stetig differenzierbaren Flächen mit konstanten Hauptkrümmungen sind die Ebenen, die Kugeln und die Drehzylinder.

b) Bemerkungen

1. (Zu § 68). Das „Lemma von Poincaré" in Kap. 5 (33) besitzt auf Grund des Satzes von Stokes (Kap. 5 (21) und (22)) offensichtlich die folgende Umkehrung: Ist $\omega^{(1)}$ eine Pfaffsche Form mit $d\omega^{(1)} = 0$, so gilt $\omega^{(1)} = d\omega^{(0)}$, wenn $\omega^{(0)}$ durch $\int_{(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})}^{(u^1, u^2)} \omega^{(1)}$ definiert wird (das Linienintegral ist hier nämlich wegen $\int_{\partial B} \omega^{(1)} = \iint_B d\omega^{(1)} = 0$ vom Wege unabhängig!). Es bleibt auch nebst Umkehrung für die Differentialformen vom Grade r (Kap. 5 (59)) gültig, wenn der Definitionsbereich eine offene, sternförmige Menge des n-dimensionalen Zahlenraumes ist (siehe Grauert-Lieb: Differential- und Integralrechnung III, Springer Berlin 1968, S. 89).

6. Kapitel

Innere Geometrie einer Fläche

§ 76. Verbiegung

In diesem Kapitel soll der Grundgedanke von Gauß' flächentheoretischen Untersuchungen auseinandergesetzt werden. Denkt man sich eine Fläche aus einem biegsamen, undehnbaren Stoff hergestellt, wie er etwa durch Papier verwirklicht wird, so läßt diese Fläche (oder ein genügend kleines Stück von ihr) außer ihrer Beweglichkeit als starrer Körper im allgemeinen auch noch (stetige) Formänderungen, sogenannte „*Verbiegungen*" zu. Die Undehnbarkeit äußert sich dadurch, daß die Bogenlängen aller auf der Fläche gezogenen Kurven bei der Verbiegung ungeändert bleiben. Etwas allgemeiner bezeichnet man als „*längentreue*" oder „*isometrische Abbildung*" zweier Flächen aufeinander eine Abbildung mit Erhaltung der Längen. Verbiegungen von Flächenstreifen haben wir ja schon im § 37 behandelt. Jetzt wollen wir uns mit der Verbiegung von Flächen beschäftigen, welche mathematisch durch eine von einem reellen Parameter stetig abhängende Schar isometrischer Flächen beschrieben werden kann.

Während nun die gewöhnliche Flächentheorie die Eigenschaften der Flächen untersucht, die erhalten bleiben, wenn man die Fläche als starren Körper bewegt, untersucht die Gaußsche „Innere Geometrie einer Fläche" die gegenüber längentreuen Abbildungen invarianten Eigenschaften, also die „inneren" Eigenschaften der Fläche, die nur von den Maßverhältnissen auf der Fläche selbst und nicht von denen des umgebenden Raumes abhängen. Diese Betrachtungsweise ist auf praktischem Boden erwachsen, nämlich aus der Frage der Geodäsie, was man aus Messungen auf der krummen Erdoberfläche über diese Fläche aussagen kann.

Als Beispiel einer Verbiegung soll gezeigt werden, daß man ein genügend kleines Stück einer (in speziellen Parametern) zweimal stetig differenzierbaren Torse längentreu in die Ebene verbiegen kann.

Dazu stellen wir die Torse wie in § 53 als Regelfläche in speziellen Parametern

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1) + u^2\mathfrak{z}(u^1) \tag{1}$$

dar, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß die durch $u^2 = 0$ gegebene „Leitkurve" die „Erzeugenden" $u^1 =$ const senkrecht durchsetzt, d.h. daß

(2a) $$\mathfrak{y}_1 \mathfrak{z} = 0$$

gilt, und daß der Vektor $\mathfrak{z} \neq 0$ und der Parameter u^1 noch durch die Bedingungen

(2b) $$\mathfrak{z}^2 = 1$$

und

(2c) $$(\mathfrak{y}_1)^2 = 1$$

normiert sind (letzteres bedeutet, daß u^1 Bogenlängenparameter der Leitkurve ist!). Nun gilt nach Kap. 4 (110) die „Torsenbedingung"

$$(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}_1) = 0,$$

so daß $\mathfrak{z}_1$ eine Linearkombination der wegen (2a), (2b) und (2c) linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}$ sein muß:

$$\mathfrak{z}_1 = \alpha \mathfrak{y}_1 + \beta \mathfrak{z}.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathfrak{y}_1$ bzw. $\mathfrak{z}$ liefert unter Berücksichtigung von (2)

$$\alpha = \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1 = -\mathfrak{y}_{11} \mathfrak{z} \quad \text{bzw.} \quad \beta = 0.$$

Hierbei ist $\mathfrak{y}_{11} \mathfrak{z}$ nach § 33 (8) nichts anderes als die geodätische Krümmung $c = c(u^1)$ des durch die Leitkurve gehenden Flächenstreifens, der übrigens nach § 35 und § 36 wie der um $\pi/2$ gedrehte Streifen wegen der Torsenbedingung Krümmungsstreifen ist. Wir haben also

$$\mathfrak{z}_1 = -c \mathfrak{y}_1$$

und damit wegen (1) und (2) als erste Grundform unserer Torse:

(3) $$I = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j \, du^i \, du^j = \big(1 - c(u^1)\, u^2\big)^2 \, (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Nun läßt sich aber der Flächenstreifen $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1 \times \mathfrak{z}\}$ durch die Leitkurve nach den Überlegungen von § 37 in einer von einem reellen Parameter stetig abhängenden Weise unter Erhaltung der geodätischen Krümmung $c(u^1)$ und der geodätischen Windung $a(u^1) = 0$ in einen ebenen Streifen $\{\mathfrak{y}^*, \mathfrak{y}^{*\prime} \times \mathfrak{z}^*\}$ überführen. Legen wir durch alle Streifen dieser Schar in entsprechender Weise Torsen, so sind diese alle durch gleiche Parameter längentreu aufeinander bezogen, da die (allein von c abhängende) erste Grundform immer dieselbe Gestalt (3) besitzt. Dies bedeutet aber, daß sich in der Tat die Ausgangstorse (1) in das Ebenenstück

(4) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}^*(u^1) + u^2 \mathfrak{z}^*(u^1)$$

verbiegen läßt. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht. Wir kommen auf die Abwickelbarkeit der Torsen später zurück (§ 82).

Sind zwei längentreu zugeordnete Flächen so auf die Parameter u^1, u^2 bezogen, daß entsprechenden Punkten dieselben Parameterwerte zukommen, so stimmen nach § 41 die zugehörigen ersten Grundformen, also g_{11}, g_{12}, g_{22}, für beide Flächen überein. Diese Übereinstimmung sichert auch umgekehrt die Längentreue. In der Formel (42) von § 45 ist nun das Hauptergebnis von Gauß enthalten, daß man das Krümmungsmaß K allein aus g_{11}, g_{12} und g_{22} berechnen kann. Das läßt sich jetzt so aussprechen: *Bei zwei längentreu aufeinander abgebildeten Flächen stimmen in entsprechenden Punkten die Krümmungsmaße überein.* Diesen Satz hat Gauß 1822 abgeleitet (vgl. § 98).

Es wird sich im folgenden zunächst darum handeln, etwas deutlicher den geometrischen Grund dieser Biegungsinvarianz von K aufzuhellen.

Da wir früher (in § 55) gezeigt haben, daß die Torsen unter den flachpunktfreien Flächen durch identisches Verschwinden von K gekennzeichnet sind, so folgt aus dem Gaußschen Satz: *Die Torsen sind unter den flachpunktfreien viermal stetig differenzierbaren Flächen*[1] *die einzigen in die Ebene verbiegbaren Flächen.* Diese Tatsache war schon Euler (1770) und Monge bekannt. Man nennt die Torsen wegen der „Abwickelbarkeit" in die Ebene auch *„abwickelbare Flächen"*. Ließe man auch imaginäre Flächen zu, oder faßte man im reellen Gebiet den Flächenbegriff sehr allgemein, so wäre dieser Satz mit Einschränkungen zu versehen[2].

Im übrigen brauchen zwei isometrische Flächen nicht immer ineinander verbiegbar zu sein. Dies zeigt schon das Beispiel der beiden Kugelstücke

$$x_3 = R - \overset{+}{\sqrt{R^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2}}, \qquad x_3 = -R + \overset{+}{\sqrt{R^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2}},$$

die durch Spiegelung an der Ebene $x_3 = 0$ isometrisch aufeinander abbildbar sind. Ihre zweiten Grundformen haben im Punkt $x_1 = x_2 = 0$ die Gestalt

$$\frac{1}{R}\left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right), \quad -\frac{1}{R}\left((dx_1)^2 + (dx_2)^2\right)$$

(vgl. § 42!) und sind daher positiv definit bzw. negativ definit. Gäbe es nun eine von einem reellen Parameter stetig abhängende Schar von isometrischen Flächen, welche diese beiden Kugelstücke verbindet, so müßte deren

---

[1] Die Flächen müssen als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden, damit sie in der speziellen Gestalt (1) noch zweimal stetig differenzierbar sind (vgl. § 55).

[2] Lebesgue, H.: Comptes Rendus **128**, 1502—1505 (1899). Tangentenflächen der isotropen Kurven (§ 19) sind nicht „abwickelbar".

zweite Grundform im entsprechenden Punkt aus Stetigkeitsgründen einmal indefinit werden, d.h. es gäbe eine Fläche der Schar mit (mindestens) einer reellen Asymptotenrichtung durch diesen Punkt. Dann wäre aber nach § 52 dieser Punkt ein hyperbolischer oder parabolischer Flächenpunkt im Widerspruch zu der aus der Biegungsinvarianz von K folgenden Tatsache, daß alle Flächen der Flächenschar die konstante Gaußsche Krümmung $K = \frac{1}{R^2} > 0$ besitzen müssen. H. Schilt[1] hat gezeigt, daß es sogar isometrische Flächen gibt, die sich auch nach eventueller Spiegelung nicht ineinander verbiegen lassen.

§ 77. Geodätische Krümmung

Da ein Flächenstreifen auf unserer Fläche bei einer Verbiegung der gesamten Fläche für sich eine Verbiegung im Sinne des § 37 erfährt und da sich die dort erklärte geodätische Krümmung c bei einer solchen Streifenbiegung nicht ändert, so ist c auch eine Invariante gegenüber Biegungen der Fläche.

c ist natürlich keine allein von der Fläche abhängige Biegungsinvariante (wie etwa K), sondern bestimmt sich erst durch eine auf der Fläche gezogene Kurve. Durch die Kurve und die Fläche ist der Flächenstreifen längs der Kurve und c als deren geodätische Krümmung dann bestimmt.

Man nennt die schon von Gauß betrachtete Krümmung c, deren Invarianz gegenüber Biegungen von F. Minding (1806—1830) erkannt worden ist, nach J. Liouville (1809—1882) dann auch einfach *„geodätische Krümmung der Flächenkurve"*[2]. Bei Gauß heißt c *„Seitenkrümmung"*.

Wir wollen im folgenden noch zur Abkürzung $c = \frac{1}{\varrho_g}$ setzen und bezeichnen ϱ_g dann als *geodätischen Krümmungsradius* ($-\infty \leqq \varrho_g \leqq +\infty$, $\varrho_g \neq 0$).

Auf unserer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ sei eine Kurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = \mathfrak{x}(u^1(s), u^2(s)) \tag{5}$$

gezogen, die wir uns dadurch festgelegt denken, daß wir die Parameter u^1 und u^2 als zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Bogenlänge s angeben. Dann ist nach § 35 $(25)_3$:

$$\boxed{(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{n}) = \frac{1}{\varrho_g}}. \tag{6}$$

[1] Schilt, H.: Compositio Math. **5**, 239—283 (1937).

[2] Minding, F.: Bemerkung über die Abwicklung ... Crelles Journal **6**, 159 (1830); Liouville, J. in Monges Application ..., 568 unten (1850).

Danach kehrt sich das Vorzeichen von $\frac{1}{\varrho_g}$ um, wenn man die Richtung des Flächennormaleneinheitsvektors $\mathfrak{n}$ umkehrt. Ebenso wechselt $1:\varrho_g$ sein Zeichen, wenn man den positiven Sinn der Zählung der Bogenlänge s umdreht, wie wir das im besonderen Fall der ebenen Kurven, für die ja nach § 37 die geodätische Krümmung gleich der gewöhnlichen ist, in § 12 festgestellt haben. Was dort über das Vorzeichen gesagt wurde, läßt sich sofort auf den hier vorliegenden allgemeineren Fall übertragen. Die geodätische Krümmung ist also zunächst nur bis aufs Vorzeichen erklärt. Das Vorzeichen kann aber dadurch festgelegt werden, daß man 1. den positiven Sinn wachsender s auf der Kurve auswählt und 2. über den Sinn des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ entscheidet.

Nach § 34 (11) und $(13)_2$ hängt die geodätische mit der gewöhnlichen Krümmung zusammen durch die Formel:

$$\frac{\mathfrak{bn}}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g}, \tag{7}$$

wo $\frac{1}{\varrho}$ die gewöhnliche Krümmung und $\mathfrak{b}$ die Binormale unserer Kurve ist. Wir wollen aus unseren Formeln einige Schlüsse ziehen. Zunächst gilt, weil $\frac{1}{\varrho_g}$ nur vom Streifen unserer Flächenkurve abhängt:

Berühren sich zwei Flächen längs einer Kurve, so hat diese auf beiden Flächen dieselbe geodätische Krümmung.

Wenden wir ferner dieses Ergebnis auf die einer Fläche längs einer Kurve umschriebene Torse an (vgl. § 54), und beachten wir, daß $\frac{1}{\varrho_g}$ biegungsinvariant ist, und außerdem, daß bei einer ebenen Kurve die geodätische mit der gewöhnlichen Krümmung zusammenfällt, so erhalten wir weiter:

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der „Abwickelkrümmung", d.h. der gewöhnlichen Krümmung der ebenen Kurve, die man durch Abwicklung der unserer Fläche längs der Kurve umschriebenen Torse erhält.

Dieser Satz steckt natürlich auch unmittelbar in den Ergebnissen des § 37 über die Abwicklung eines Streifens in die Ebene. Nach § 34 haben wir weiter:

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der gewöhnlichen Krümmung ihres Normalrisses auf die Tangentialebene.

§ 78. Geodätische Linien

Nach der Formel § 37 (41) haben wir für die Variation der Bogenlänge einer zweimal stetig differenzierbaren Flächenkurve, wenn wir wieder $\frac{1}{\varrho_g}$

für c setzen, bei festgehaltenen Enden

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{\delta n}{\varrho_g}\, ds. \tag{8}$$

Also verschwindet die erste Variation δs der Bogenlänge bei beliebigen Verrückungen δn für die Flächenkurven mit identisch verschwindender geodätischer Krümmung. Man nennt seit der Mitte des 19. Jahrhunderts diese Linien auf der Fläche, die an Stelle der geraden Linien in der Ebene treten und die schon Euler betrachtet hat, geodätische Linien. Die geodätischen Linien sind natürlich die zu den geodätischen Streifen gehörigen Flächenkurven. Unter ihnen sind jedenfalls die kürzesten Verbindungen auf einer Fläche zwischen zwei vorgegebenen Flächenpunkten zu suchen, denn bei festgehaltenen Endpunkten verschwindet in § 37 (41) das Glied $[\delta t]_{s_1}^{s_2}$ und nur für $c = 0$ hat die Bogenlänge der Kurve gegenüber allen Nachbarkurven einen stationären Wert, wie eine Überlegung analog zu derjenigen in § 26 zeigt.

Nach (6) genügen die geodätischen Linien der Bedingung

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{n}) = 0, \tag{9}$$

d.h. geometrisch, *ihre Schmiegebenen gehen, falls sie existieren, durch die zugehörigen Flächennormalen.*

Ferner ergibt sich aus (9) und $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}((\mathfrak{x}')^2) = 0$, daß die geodätischen Linien zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen. (Wir werden diese Differentialgleichungen im § 83 explizit aufschreiben.) In

$$\mathfrak{x}'' = \left(\mathfrak{x}_i \frac{du^i}{ds}\right)' = \mathfrak{x}_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \mathfrak{x}_i \frac{d^2u^i}{ds^2} \tag{10}$$

stecken nämlich die zweiten Ableitungen der die Flächenkurve bestimmenden Funktionen $u^i = u^i(s)$. Wir können daher erwarten, daß durch jedes Linienelement[1] der Fläche genau eine geodätische Linie hindurchgeht, was sich aus der Regularität der Fläche auf Grund von Existenzsätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung streng begründen läßt.

Nehmen wir nun an, es existiere eine einparametrige Schar geodätischer Linien, die ein Flächenstück „schlicht" überdeckt, so daß also durch jeden Punkt des Flächenstücks nur eine einzige Kurve der Schar hindurchgeht. Diese Schar — nach Weierstraß spricht man auch von einem „Feld" geodätischer Linien — seien die Parameterkurven $u^2 = \text{const}$ unserer Fläche, während die Kurven $u^1 = \text{const}$ ihre orthogonalen Trajektorien

[1] Das Wort „Linienelement" bedeutet hier einen Punkt mit hindurchgehender Richtung.

sein sollen. Für die erste Grundform

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

finden wir dann wegen $\frac{du^1}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{g_{11}}}$, $\frac{du^2}{ds} = 0$, d.h.

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_1 : \overset{+}{\sqrt{g_{11}}},$$

(11)

$$\mathfrak{x}'' = \frac{\mathfrak{x}_{11}}{g_{11}} - \frac{1}{2}\mathfrak{x}_1 \frac{g_{11,1}}{g_{11}^2}$$

(vgl. (10)!), nach (6), (9) und § 57 (131) die Bedingung

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\Gamma_{11}^2 \overset{+}{\sqrt{g_{22}}}}{g_{11}} = -\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{11}\overset{+}{\sqrt{g_{22}}}} = 0, \tag{12}$$

d.h. g_{11} ist nur von u^1 abhängig, nicht von u^2. Führen wir nun an Stelle von u^1 einen neuen Parameter

$$\int \overset{+}{\sqrt{g_{11}}}\, du^1$$

ein, er sei nachträglich wieder mit u^1 bezeichnet, so nimmt die erste Grundform die einfache von Gauß angegebene Gestalt an

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2. \tag{13}$$

Für $u^2 = \text{const}$ wird

$$s = \int_{u^1_{(0)}}^{u^1_{(1)}} du^1 = u^1_{(1)} - u^1_{(0)}.$$

Das gibt sofort den Satz: *Die orthogonalen Trajektorien eines geodätischen Feldes schneiden auf den geodätischen Linien des Feldes gleiche Längen ab.*

Umgekehrt gilt wegen § 37 (41): Schneiden die Kurven $u^1 = \text{const}$ auf ihren orthogonalen Trajektorien $u^2 = \text{const}$ gleiche Längen aus, so sind die Linien $u^2 = \text{const}$ geodätisch.

Die Kurven $u^1 = \text{const}$ nennt man *geodätisch parallel*, die Parameter u^1, u^2 *geodätische Parallelkoordinaten*. Für die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve $u^i = u^i(t)$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1;\ i = 1, 2)$ mit $u^2(t_0) = u^2(t_1) = u^2_{(0)}$ innerhalb des Feldes erhält man nach (13)

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \overset{+}{\sqrt{\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}}\, dt. \tag{14}$$

Wegen $g_{22} > 0$ folgt danach

$$s \geqq |u^1(t_1) - u^1(t_0)|. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich, daß die geodätischen Linien des Feldes im folgenden Sinne *Kürzeste* sind:

Läßt sich ein Bogen einer geodätischen Linie in ein „Feld" einbetten[1], *so liefert er die kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten im Vergleich zu allen anderen innerhalb des Feldes verlaufenden Kurven.*

Die Bedingung des Einbettens ist dabei nicht überflüssig. Davon kann man sich am besten auf der Kugelfläche überzeugen. Die Großkreise der Kugel sind dort die geodätischen Linien. Jeder Großkreisbogen, der kleiner als ein Halbkreis ist, läßt sich in ein Feld von Großkreisbogen einbetten, hingegen ein Großkreisbogen, der diametral gegenüberliegende Punkte enthält, nicht. Tatsächlich liefert aber auch ein Großkreisbogen, der über einen Halbkreis hinausragt, für die Bogenlänge kein Extrem.

§ 79. Geodätische Polarkoordinaten

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Punkt einer Fläche, φ der Winkel einer durch $\mathfrak{o}$ gehenden geodätischen Linie mit der Richtung der u^1-Linie durch $\mathfrak{o}$, und r die auf dieser geodätischen Linie gemessene Entfernung eines ihrer Punkte von $\mathfrak{o}$. Diese Größen r, φ kann man in Analogie zu den Polarkoordinaten der Ebene als *geodätische Polarkoordinaten* bezeichnen. Aus der Formel § 37 (41) für die Variation der Bogenlänge der geodätischen Linie $\varphi = \text{const}$ $(r \geqq 0)$ leitet man leicht ab, daß die Kurven $r = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ der geodätischen Polarkoordinaten sich rechtwinklig schneiden. Im Ursprung des Polarkoordinatensystems wird nämlich $\delta t_1 = 0$, und somit folgt aus

$$\delta s = 0$$

auch

$$\delta t_2 = 0,$$

d.h. die behauptete Rechtwinkligkeit.

Die erste Grundform hat nach den Sätzen des vorigen Abschnitts für diese Parameter r, φ zunächst die Gaußsche Form (13)

$$ds^2 = dr^2 + G\, d\varphi^2.^2 \tag{16}$$

Hierin ist enthalten, daß die „geodätischen Kreise" $r = \text{const}$ ihre geodätischen Radien $\varphi = \text{const}$ senkrecht durchschneiden. Es bleibt festzustellen, wie sich die Funktion $G = G(r, \varphi)$ an der für die Parameterdarstellung ausgezeichneten Stelle $r = 0$ verhält.

---

[1] Die Bedingung des Einbettens ist nahe verwandt mit der sogenannten Bedingung Jacobis, auf die wir später (§ 110) zu sprechen kommen werden.

[2] Auf die Frage, in welchen Umkreis um $\mathfrak{o}$ diese geodätischen Polarkoordinaten brauchbar sind, kommen wir später zu sprechen.

Zu diesem Zweck führen wir durch

$$v^1 = r\cos\varphi,\ v^2 = r\sin\varphi \tag{17}$$

neue Parameter auf der als fünfmal stetig differenzierbar vorausgesetzten Fläche in einer Umgebung des Punktes $\mathfrak{o}$ ein, wobei wir noch o.B.d.A. voraussetzen, daß für diesen Punkt in bezug auf die Ausgangsparameter u^1, u^2

$$g_{ij}(u^1_{(0)}, u^2_{(0)}) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \tag{18}$$

gilt. Die durch (17) bestimmten Parameter pflegt man als *Riemannsche Normalkoordinaten* zu bezeichnen. Nun stellt die (nach Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen dreimal stetig differenzierbare) Lösung $u^i = f^i(t; a^1, a^2)$ $(i = 1, 2)$ des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung $(\mathfrak{x}_t, \mathfrak{x}_{tt}, \mathfrak{n}) = 0$ und $\mathfrak{x}_t\mathfrak{x}_{tt} = 0$ unter den Anfangsbedingungen $f^i(0; a^1, a^2) = u^i_{(0)}, \frac{df^i}{dt}(0; a^1, a^2) = a^i$ $(i = 1, 2;\ (a^1, a^2) \neq (0, 0))$ wegen (9) und $(\mathfrak{x}_t)^2 = a^2 = \text{const} = (\mathfrak{x}_t(0))^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 > 0$ (vgl. (18)) nichts anderes als die durch $\mathfrak{o}$ gehende geodätische Linie mit dem Bogenlängenparameter $r = at$ und dem durch $\cos\varphi = \frac{a^1}{a}$, $\sin\varphi = \frac{a^2}{a}$ gegebenen Anfangswinkel φ dar. Diese geodätische Linie besitzt hiermit die Parameterdarstellung

$$u^i = f^i\left(\frac{r}{a}; a\cos\varphi, a\sin\varphi\right) \quad (i = 1, 2), \tag{19}$$

wobei φ einen festen Wert hat und $a \neq 0$ eine beliebige Konstante darstellt. Im Spezialfall $a = r$ erhalten wir daraus unter Benützung von (17) die (auch für $v^1 = v^2 = 0$ gültige) Transformationsformel

$$u^i = f^i(1; v^1, v^2) \qquad (i = 1, 2) \tag{19a}$$

für den Übergang von den ursprünglichen Parametern u^1, u^2 zu den Riemannschen Normalkoordinaten v^1, v^2. Dieser Übergang ist nach dem Satz über implizite Funktionen in einer geeigneten Umgebung von $u^1 = u^1_{(0)}$, $u^2 = u^2_{(0)}$ dreimal stetig differenzierbar, weil die Funktionaldeterminante $\left\| \frac{\partial f^i}{\partial a^j}(1; 0, 0) \right\|$ wegen der aus (19) durch Spezialisierung $a = 1$ und $a = r$ entstehenden Funktionalgleichung

$$f^i(r; \cos\varphi, \sin\varphi) = f^i(1; r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad (i = 1, 2)$$

und damit

$$\frac{\partial f^i}{\partial a^j}(1; 0, 0) = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(0, 0) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2)$$

den von Null verschiedenen Wert $\|\delta_{ij}\| = 1$ besitzt.

Setzen wir jetzt die aus

$$r = \sqrt[+]{(v^1)^2 + (v^2)^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{v^2}{v^1} \quad \text{(vgl. (17))}$$

folgenden Beziehungen

$$(dr)^2 = \frac{(v^1)^2\,(dv^1)^2 + 2v^1v^2\,dv^1\,dv^2 + (v^2)^2\,(dv^2)^2}{r^2},$$

$$(d\varphi)^2 = \frac{(v^2)^2\,(dv^1)^2 - 2v^1v^2\,dv^1\,dv^2 + (v^1)^2\,(dv^2)^2}{r^4}$$

in (16) ein und vergleichen wir die so entstehende quadratische Differentialform mit

$$ds^2 = h_{ij}\,dv^i\,dv^j,$$

so finden wir die Gleichungen

(20a) $$h_{11}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos^2\varphi + \frac{G}{r^2}\sin^2\varphi,$$

(20b) $$h_{12}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi\left(1 - \frac{G}{r^2}\right)$$

(20c) $$h_{22}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sin^2\varphi + \frac{G}{r^2}\cos^2\varphi$$

für die zweimal stetig differenzierbaren Koeffizienten h_{ij} der ersten Grundform in bezug auf die Riemannschen Normalkoordinaten. Durch Elimination von G aus (20a) und (20c) erhält man nun

(21a) $$\cos^2\varphi\,(h_{11} - 1) = \sin^2\varphi(h_{22} - 1),$$

während das Einsetzen der durch Addition von (20a) und (20c) entstehenden Beziehung

(21b) $$G = r^2(h_{11} + h_{22} - 1)$$

in (20b)

(21c) $$h_{12} = \cos\varphi\sin\varphi\,(2 - h_{11} - h_{22})$$

ergibt. Man ersieht hieraus, *daß offenbar* (21a) *und* (21c) *für die Koeffizienten der ersten Grundform bezüglich Riemannscher Normalkoordinaten kennzeichnend sind.*

Jetzt ist es leicht, das Verhalten von G an der Stelle $r = 0$ festzustellen. Hierzu beachten wir zunächst, daß aus (21a) durch Spezialisierung $r = 0$ sowie $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(22a) $$h_{11}(0, 0) = h_{22}(0, 0) = 1$$

folgt. Weiter liefert partielle Differentiation von (21a) nach r für $r = 0$

$$\cos^2\varphi(h_{11,1}(0,0)\cos\varphi + h_{11,2}(0,0)\sin\varphi)$$
$$= \sin^2\varphi(h_{22,1}(0,0)\cos\varphi + h_{22,2}(0,0)\sin\varphi),$$

woraus durch Spezialisierung $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zunächst

$$h_{11,1}(0,0) = h_{22,2}(0,0) = 0 \tag{22b}$$

und damit wegen

$$\cos\varphi\, h_{11,2}(0,0) = \sin\varphi\, h_{22,1}(0,0)$$

durch erneute Spezialisierung $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zusätzlich

$$h_{11,2}(0,0) = h_{22,1}(0,0) \tag{22c}$$

resultiert. Auf dieselbe Weise gewinnt man durch zweimalige partielle Differentiation von (21a) nach r für $r = 0$:

$$\begin{aligned} &h_{11,11}(0,0) = h_{11,12}(0,0) = h_{22,22}(0,0) = h_{22,12}(0,0) = 0, \\ &h_{11,22}(0,0) = h_{22,11}(0,0) = 2\alpha \end{aligned} \tag{22d}$$

sowie (unter Verwendung sechsmaliger stetiger Differenzierbarkeit der Fläche in bezug auf u^1, u^2 und damit dreimaliger stetiger Differenzierbarkeit von h_{ij} bzw. von G) durch dreimalige partielle Differentiation von (21a) nach r für $r = 0$:

$$\begin{aligned} &h_{11,111}(0,0) = h_{11,112}(0,0) = h_{22,222}(0,0) = h_{22,122}(0,0) = 0, \\ &3h_{11,122}(0,0) = h_{22,111}(0,0) = 6\beta,\ h_{11,222}(0,0) = 3h_{22,112}(0,0) = 6\gamma. \end{aligned} \tag{22e}$$

Nach (21b) ist nun G an der Stelle $r = 0$ wie die h_{ij} zweimal stetig differenzierbar, und wir finden daraus unter Benutzung von (22) speziell für die Ableitungen von G die Werte:

$$\overset{+}{\sqrt{G}}(0,\varphi) = 0,\ \frac{\partial\overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r}(0,\varphi) = 1,\ \frac{\partial^2\overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r^2}(0,\varphi) = 0,\ \frac{\partial^3\overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r^3}(0,\varphi) = 3\alpha, \tag{23}$$

bzw. im Falle dreimaliger stetiger Differenzierbarkeit von h_{ij}

$$\frac{\partial^4\overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r^4}(0,\varphi) = 12\beta\cos\varphi + 12\gamma\sin\varphi. \tag{24}$$

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch die aus (21c) durch partielle Ableitung nach r an der Stelle $r = 0$ resultierenden Beziehungen

$$\begin{aligned} &h_{12}(0,0) = h_{12,1}(0,0) = h_{12,2}(0,0) = h_{12,11}(0,0) \\ &= h_{12,22}(0,0) = 0,\ \ h_{12,12}(0,0) = -\alpha. \end{aligned} \tag{25}$$

Es ist bemerkenswert, daß die Konstante α nach (23) nur von der Flächenmetrik und dem Punkt $\mathfrak{o}$ abhängt, also eine *Biegungsinvariante* der

Fläche für den Punkt $\mathfrak{o}$ ist. Es bleibt festzustellen, wie α mit den Bewegungsinvarianten von § 44 zusammenhängt.

§ 80. Biegungsinvariante Deutung des Krümmungsmaßes

Im vorigen Abschnitt sind wir ganz naturgemäß zu einer Biegungsinvariante α gelangt, von der wir nur festzustellen brauchen, daß sie mit dem Krümmungsmaß $K = \dfrac{1}{R_1 \cdot R_2}$ (§ 44) bis auf einen Zahlenfaktor zusammenfällt.

Wir brauchen nur die Formel (42) von Baltzer in § 45 heranzuziehen. Setzt man darin $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = G$, so wird

$$K = -\frac{1}{\sqrt[+]{G}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt[+]{G}. \tag{26}$$

Hieraus ergibt sich sofort mittels (23) für den Wert K_0 von K im Ursprung des geodätischen Polarkoordinatensystems unter Benutzung der Regel von de l'Hôpital:

$$\alpha = -\frac{1}{3} K_0, \tag{27}$$

so daß also tatsächlich α im wesentlichen mit dem Krümmungsmaß im Ursprung zusammenfällt.

Aus unseren Formeln folgt leicht eine geometrische Deutung des Krümmungsmaßes, die seine Biegungsinvarianz in helles Licht rückt. Es war für geodätische Polarkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + G\, d\varphi^2. \tag{28}$$

Berechnen wir hieraus die Umfänge L der Kurven $r = \text{const}$, die man nach Gauß als *„geodätische Kreise"* bezeichnet, so finden wir

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt[+]{G}\, d\varphi. \tag{29}$$

Somit ist nach (23), wie J. Bertrand und V. Puiseux 1848 gefunden haben[1], unter Benutzung der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L}{r^3} = K_0. \tag{30}$$

Das ist die gewünschte „innere" geometrische Deutung von K. Man kann sie auch mit Diguet (1848)[1] noch etwas anders fassen. Der Flächen-

[1] Vgl. Monge, G.: Application ..., 5. Aufl. 1850, 4. Note, S. 583–588. Diguet: Journ. de Mathematiques (1), **13**, 83–86 (1848).

inhalt F unseres geodätischen Kreises ist nämlich

$$F = \int_0^r \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{G}\, dr\, d\varphi = \int_0^r L\, dr, \tag{31}$$

und daraus folgt wiederum unter Benutzung der Regel von de l'Hopital:

$$\lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - F}{r^4} = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L}{r^3} = K_0. \tag{32}$$

§ 81. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise

Wir haben im vorigen Abschnitt die geodätischen Kreise einer Fläche durch ihre Mittelpunktseigenschaft erklärt, indem wir nämlich auf allen durch einen Punkt o der Fläche gehenden geodätischen Linien von o aus dieselben Entfernungen abgetragen haben. Wir wollen die so erklärten geodätischen Kreise im folgenden „Entfernungskreise" nennen.

Ebenso gut kann man aber die isoperimetrische Eigenschaft der Kreise (§ 28) verwenden, um ihre Definition von der Ebene auf eine krumme Fläche zu übertragen. Die erste Variation des Umfangs L einer auf der Fläche gezogenen einfach geschlossenen Kurve ist (vgl. § 78 (8))

$$\delta L = -\oint \frac{\delta n}{\varrho_g} \cdot ds, \tag{33}$$

und die Variation des auf der Fläche umgrenzten Flächeninhalts F errechnet sich unter Verwendung geodätischer Parallelkoordinaten (§ 78) mit der gegebenen Kurve als Orthogonaltrajektorie $u^1 = 0$ zu

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(F + \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon\varphi(u^2)} \sqrt{g_{22}}\, du^1\right) du^2\right)\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \\ &= \int_0^L \varepsilon\varphi(u^2) \sqrt{g_{22}(0, u^2)}\, du^2 = -\oint \delta n \cdot ds. \end{aligned} \tag{34}$$

Daraus ergibt sich genau wie in § 28 als Differentialgleichung der Extremalen des isoperimetrischen Problems (L = gegeben, F = Maximum)

$$\frac{1}{\varrho_g} = \text{const}. \tag{35}$$

Diese Kurven mit fester geodätischer Krümmung, die von S. Lie und G. Darboux als „geodätische Kreise" bezeichnet wurden, sollen hier (geodätische) „*Krümmungskreise*" genannt werden.

Wir wollen zeigen: *Dafür, daß die beiden Erklärungen der geodätischen Kreise auf einer viermal stetig nach v^1, v^2 differenzierbaren Fläche zusammenfallen, ist notwendig, daß die Fläche festes Krümmungsmaß* (K = const) *besitzt.*

Dazu setzen wir das Bogenelement in geodätischen Polarkoordinaten an (vgl. § 79):

$$ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2. \tag{36}$$

Es war nach (26)

$$K = -\frac{1}{\overset{+}{\sqrt{G}}}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\overset{+}{\sqrt{G}}. \tag{37}$$

Unter Benutzung von (23), (24) und der Regel von de l'Hôpital folgt hieraus:

$$-\frac{\partial K}{\partial r}(0, \varphi) = 6(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi). \tag{38}$$

Andererseits findet sich für die geodätische Krümmung der Entfernungskreise $r = \text{const}$ nach einer der Formel (12) entsprechenden Formel

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{(\overset{+}{\sqrt{G}})_r}{\overset{+}{\sqrt{G}}}. \tag{39}$$

Dafür, daß diese Entfernungskreise auch gleichzeitig Krümmungskreise sind, ist notwendig, daß $\frac{1}{\varrho_g}$ von φ nicht abhängt. Dasselbe gilt in diesem Fall auch von der zweiten partiellen Ableitung von $\frac{1}{\varrho_g} + \frac{1}{r}$ nach r für $r = 0$, welche sich unter Benutzung von (39), (21b) und (22) zu

$$-3\beta\cos\varphi - 3\gamma\sin\varphi$$

errechnet. Daraus folgt aber $\beta = \gamma = 0$ und damit wegen (38)

$$\frac{\partial K}{\partial r}(0, \varphi) = \frac{\partial K}{\partial v^1}(0, 0)\cos\varphi + \frac{\partial K}{\partial v^2}(0, 0)\sin\varphi = 0$$

für alle φ, d.h. speziell $\frac{\partial K}{\partial v^1}(0, 0) = \frac{\partial K}{\partial v^2}(0, 0) = 0$. Soll dies an jeder Stelle unserer Fläche der Fall sein, so muß K tatsächlich einen konstanten Wert besitzen.

§ 82. Flächen festen Krümmungsmaßes

Durch unsere Fragestellung sind wir ganz von selbst auf die wichtige Klasse von Flächen mit festem K geführt worden. Um nun festzustellen, in welchem Umfang die gefundene Bedingung $K = \text{const}$ für die Übereinstimmung der Krümmungskreise mit den Entfernungskreisen auch hinreicht, wollen wir die Maßverhältnisse auf einer solchen Fläche untersuchen, womit schon 1830 F. Minding begonnen hat.

Dazu führen wir auf einer solchen Fläche ein Gaußsches geodätisches Parallelkoordinatensystem von der im § 78 geschilderten Art ein:

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

und wählen insbesondere auch die Kurve $u^1 = 0$ als geodätische Linie mit u^2 als Bogenlänge. Dann ist

$$g_{22}(0, u^2) = 1, \quad g_{22,1}(0, u^2) = 0. \tag{40}$$

Ferner hatten wir für das Krümmungsmaß die Formel

$$-\frac{1}{\sqrt[+]{g_{22}}} \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} \sqrt[+]{g_{22}} = K. \tag{41}$$

Durch die Differentialgleichung (41) und die beiden Randbedingungen (40) ist aber die Funktion g_{22} leicht berechenbar. Ist zunächst $K = 0$, so wird

$$\sqrt[+]{g_{22}}\,(u^1, u^2) = A(u^2)\,u^1 + B(u^2). \tag{42}$$

Wegen der Randbedingungen ist $B = 1$, $A = 0$. Somit haben wir

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2, \tag{43}$$

die Maßbestimmung in der Ebene Euklids. Dadurch ist aufs neue bestätigt (vgl. § 76), daß die (viermal stetig differenzierbaren) Torsen ($K = 0$) im Kleinen auf die Ebene längentreu abbildbar sind.

Nehmen wir zweitens $K > 0$. Dann hat die allgemeine Lösung von (41) die Form

$$\sqrt[+]{g_{22}}\,(u^1, u^2) = A(u^2) \cos(\sqrt[+]{K}\,u^1) + B(u^2) \sin(\sqrt[+]{K}\,u^1). \tag{44}$$

Unter Berücksichtigung der Randwerte ergibt sich

$$A = 1, \quad B = 0.$$

Somit bekommen wir als erste Grundform

$$ds^2 = (du^1)^2 + \cos^2(\sqrt[+]{K}\,u^1)\,(du^2)^2. \tag{45}$$

Es bleibt noch der Fall $K < 0$. Man findet entsprechend

$$ds^2 = (du^1)^2 + ch^2(\sqrt[+]{-K}\,u^1)\,(du^2)^2 \tag{46}$$

wo der hyperbolische Kosinus die Definition hat

$$ch\,\psi = \frac{1}{2}(e^{+\psi} + e^{-\psi}). \tag{47}$$

In den damit gewonnenen Ergebnissen ist enthalten: *Zwei genügend kleine Stücke zweier Flächen mit demselben konstanten Gaußschen Krümmungsmaß sind stets aufeinander längentreu abbildbar.*

Daß der entsprechende Satz für Flächen in ihrer Gesamterstreckung nicht mehr gilt, soll später gezeigt werden (§ 98). Da ferner, um zu unseren Normalformen der ersten Grundform zu kommen, der Punkt $u^1 = 0$, $u^2 = 0$ und durch ihn die Richtung von $u^2 = 0$ noch beliebig wählbar sind, erkennt man: *Jede Fläche festen Krümmungsmaßes gestattet eine Gruppe längentreuer Abbildungen auf sich selbst; und zwar kann man dabei einem Punkt und einer hindurchgehenden Richtung einen beliebigen anderen Punkt und eine beliebige Richtung durch ihn zuordnen.*

Da die „Spiegelung" $u^{1*} = -u^1$, $u^{2*} = u^2$ nach (43) bzw. (45) bzw. (46) ebenfalls isometrisch ist, wird durch die Zuordnung der zwei „Linienelemente" (Punkt + hindurchgehende Richtung) die Abbildung zweideutig bestimmt.

Läßt man bei der Zuordnung der Linienelemente den Punkt fest und ändert nur ihre Richtung, so wird jeder Entfernungskreis um diesen Punkt längentreu in sich abgebildet und hat deshalb konstante geodätische Krümmung. Aber umgekehrt ist nicht jeder Krümmungskreis mit der gegebenen geodätischen Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ Entfernungskreis mit geeignetem Radius r, da in diesem Fall wegen (26), (23) und (39)

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{1}{r} \quad (K = 0) \text{ bzw. } \frac{1}{\varrho_g} = -\sqrt[+]{K}\cot\left(\sqrt[+]{K}r\right) \quad (K > 0)$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{\varrho_g} = -\sqrt[+]{-K}\coth\left(\sqrt[+]{-K}\,r\right) \quad (K < 0)$$

$\left(\coth\psi = \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{e^{\psi} - e^{-\psi}}!\right)$ gelten müßte und die Lösung r dieser Gleichungen (falls sie überhaupt existiert) die Größe des Flächenstücks übersteigen kann. *Die Bedingung* $K = \text{const}$ *ist also für die Übereinstimmung von Entfernungskreisen und Krümmungskreisen nur bedingt hinreichend.*

§ 83. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf Poincarés Halbebene

Als einfachen Typus für die Flächen $K = 0$ haben wir die Ebenen, für $K > 0$ die Kugeln. Für $K < 0$ könnten wir Kugeln mit rein imaginärem Radius einführen. Doch wird eine reelle Darstellung wünschenswert sein. Dazu könnte man etwa alle Drehflächen mit festem K ermitteln, was sich mittels elliptischer Integrale leicht ausführen läßt[1]. Aber das anschaulichste Bild der Maßbestimmung auf einer Fläche (etwa) mit $K = -1$ bekommt man auf folgende Weise:

[1] Vgl. etwa Scheffers, G.: Theorie der Flächen, 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 139ff. bzw. die Figur S. 141.

Es wird für eine solche Fläche mit dem Gaußschen Bogenelement des § 78

$$\frac{\partial^2 \overset{+}{\sqrt{g_{22}}}}{(\partial u^1)^2} = \overset{+}{\sqrt{g_{22}}}\,.$$

Ein Typus der Metrik der betrachteten Fläche wird also erhalten, wenn wir setzen

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{2u^1}(du^2)^2. \tag{48}$$

Es seien nun x, y rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene. Wir bilden eine beliebige Fläche mit der Metrik (48)[1] in diese Ebene ab, indem wir setzen

$$x = u^2, \quad y = e^{-u^1}. \tag{49}$$

Das Abbild der Fläche liegt dann jedenfalls in der oberen Halbebene $y > 0$. Weiter wird

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{50}$$

das „Bild" der Metrik (48) bei der Abbildung (49). Was sind die ebenen Bilder der geodätischen Linien unserer Fläche? Dazu brauchen wir nach § 78 etwa nur die Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{\overset{+}{\sqrt{1 + y'^2}}}{y}\, dx = 0 \tag{51}$$

der Metrik (50) zu ermitteln $\left(y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$.

Hat man ein Variationsproblem von der Form

$$\delta J = \delta \int f(x, y, y')\, dx = 0 \qquad (f = \text{zweimal stetig differenzierbar}), \tag{52}$$

und betrachtet man zweimal stetig differenzierbare Variationen von der Gestalt

$$y = \bar{y}(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon \eta(x), \tag{53}$$

so findet man für δJ

$$\delta J = \varepsilon \frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \varepsilon \int (f_y \eta + f_{y'} \eta')\, dx. \tag{54}$$

Ist an den Enden der Integrationsstrecke $\eta = 0$, so folgt durch partielle Integration

$$\delta J = \varepsilon \int \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \eta\, dx. \tag{55}$$

[1] Die Existenz einer Fläche mit vorgegebener viermal stetig differenzierbarer erster Grundform negativer Gaußscher Krümmung hat Joachim Nitsche gezeigt: Archiv d. Math. 3, 50—59 (1952), Satz 3.

Soll also für beliebiges η stets $\delta J = 0$ sein, so muß die Kurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung von Euler und Lagrange genügen:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad \text{(vgl. § 26)}, \tag{56}$$

oder ausführlich

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0. \tag{57}$$

In unserem Fall (51) hängt f von x nicht ab. Es ist daher

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = y' \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) = 0. \tag{58}$$

Die Differentialgleichung von Euler und Lagrange hat also hier ein „erstes Integral"

$$f - y' f_{y'} = \text{const} = c. \tag{59}$$

Setzt man für f seinen Wert ein

$$f = \frac{\overset{+}{\sqrt{1 + y'^2}}}{y}, \tag{60}$$

so erhält man

$$\frac{1}{y \overset{+}{\sqrt{1 + y'^2}}} = c \neq 0$$

und daraus durch eine weitere Integration

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} \tag{61}$$

als Gleichung der Extremalen.

Die Abbilder der geodätischen Linien sind also Halbkreise, die auf der Achse $y = 0$ senkrecht aufsitzen. Dazu sind auch die Halbgeraden $x = \text{const}$ zu rechnen, die sich der Darstellung $y = y(x)$ entziehen.

Von der Abbildung unserer Fläche in die Euklidische Halbebene kann man leicht einsehen, daß sie *winkeltreu* ist. Der Winkel φ zweier stetig differenzierbarer Kurven

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1(t), u^2(t)), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1(\tau), u^2(\tau))$$

auf einer Fläche in ihrem Schnittpunkt ist durch die Formel bestimmt (vgl. § 1 (14) und § 49!):

$$\cos\varphi = \frac{\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau}}{\overset{+}{\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d\mathfrak{x}}{d\tau}\right)^2}}} = \frac{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{d\tau}}{\overset{+}{\sqrt{\left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}\right)\left(g_{ij} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau}\right)}}}. \tag{62}$$

Für die Form (48) des Bogenelementes ergibt sich also wegen (49)

$$\cos\varphi = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\tau} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\tau}}{+\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)\left(\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right)}}.$$

Das ist genau der gewöhnliche Winkel φ in der x, y-Ebene.

§ 84. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K = -1$ auf sich selbst

Es soll jetzt untersucht werden, was den längentreuen Abbildungen unserer Fläche auf sich selbst in der Halbebene $y > 0$ entspricht. Nach den Ergebnissen von § 83 sehen wir: Die längentreuen Abbildungen der Fläche auf sich selbst sowie die entsprechenden Abbildungen der Halbebene auf sich selbst sind winkeltreu. Wir setzen nach Gauß

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

und behaupten: Jeder Abbildung

$$\tilde{z} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{63}$$

wo α, β, γ, δ vier reelle Zahlen mit positiver Determinante sind ($\alpha\delta - \beta\gamma > 0$), entspricht eine isometrische Abbildung der Fläche.

Dazu braucht man nur zu zeigen, daß das Bogenelement (50) bei der Abbildung (63) erhalten bleibt. Man findet

$$d\tilde{z} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{dz}{(\gamma z + \delta)^2},$$

und aus

$$\tilde{z} = \frac{\{\alpha(x + iy) + \beta\} \cdot \{\gamma(x - iy) + \delta\}}{|\gamma z + \delta|^2}$$

ergibt sich

$$\tilde{y} = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{y}{|\gamma z + \delta|^2}.$$

Daraus folgt

$$d\tilde{s} = \frac{|d\tilde{z}|}{\tilde{y}} = \frac{|dz|}{y} = ds, \tag{63a}$$

wie behauptet wurde. Nimmt man zu den Transformationen (63) noch die Abbildung

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{y} = y$$

hinzu, so bekommt man durch Zusammensetzung alle Abbildungen unserer Halbebene $y > 0$, die den längentreuen Abbildungen der Fläche in sich entsprechen. Dazu braucht man nur zu zeigen, daß man durch eine

Abbildung (63) jedes Linienelement in $y > 0$ in jedes andere Element derselben Halbebene überführen kann. Jeden Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ mit $y_0 > 0$ kann man überführen in den Punkt $\tilde{z} = i$ durch die Substitution

$$\tilde{z} = \frac{1}{y_0}(z - x_0). \tag{63b}$$

Außerdem läßt sich unsere Halbebene $y > 0$ um den Punkt $z = i$ mit einem beliebigen Winkel ω „drehen", was durch die Substitution

$$\tilde{z} = \frac{\tan\frac{\omega}{2} + z}{1 - z\tan\frac{\omega}{2}} \tag{64}$$

gelingt. Man findet nämlich aus (64) durch Differenzieren für $z = i$

$$d\tilde{z} = e^{i\omega}\, dz.$$

Damit haben wir also die Gesamtheit der längentreuen Abbildungen unserer Fläche auf sich selbst in den Parametern x, y oder deren komplexe Verbindung $x + iy = z$ analytisch dargestellt.

Man kann jetzt leicht einsehen, was das Integral

$$S = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \tag{65}$$

genommen zwischen zwei Punkten z_1, z_2 ($y_k > 0$) längs des Abbildes der geodätischen Linie, also längs des sie verbindenden auf $y = 0$ senkrechten Halbkreises, für eine Bedeutung hat. Die Schnittpunkte dieses Halbkreises mit $y = 0$ seien mit z_0, z_∞ bezeichnet ($z_0 < z_\infty$, Fig. 13). Durch die Substitution

$$\tilde{z} = \frac{z_0 - z}{z - z_\infty}, \tag{66}$$

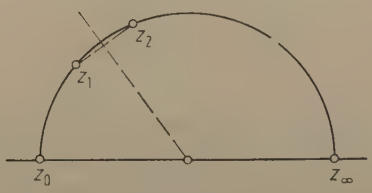


Fig. 13.

die das Integral (65) ungeändert läßt (vgl. (63a)), werfen wir unseren Halbkreis auf die Halbgerade $x = 0$. Jetzt wird

$$S = \left| \int_{\tilde{y}_1}^{\tilde{y}_2} \frac{dy}{y} \right| = \left| \ln \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{y}_1} \right|.$$

Das läßt sich auch durch ein Doppelverhältnis ausdrücken:

$$S = |\ln D(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_0, \tilde{z}_\infty)|,$$

welches durch

$$D(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_0, \tilde{z}_\infty) = \frac{\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2}{\tilde{z}_0 - \tilde{z}_1} : \frac{\tilde{z}_\infty - \tilde{z}_2}{\tilde{z}_\infty - \tilde{z}_1}$$

definiert ist. Da aber das Doppelverhältnis bei linearen Substitutionen ungeändert bleibt, haben wir schließlich

$$S = |\ln D(z_1, z_2, z_0, z_\infty)|. \tag{66a}$$

Darin ist die gewünschte Deutung von S enthalten.

Was ist das Abbild der „Entfernungskreise" in unserer Halbebene? Nach § 78 schneiden die Entfernungskreise ihre geodätischen Radien senkrecht. Da die Abbildung auf die Euklidische Halbebene winkeltreu ist, können wir das Abbild der Entfernungskreise um den Punkt mit dem Abbild z_0 so konstruieren: Wir zeichnen alle Halbkreise durch z_0 senkrecht zu $y = 0$ (Fig. 14). Die orthogonalen Trajektorien dieses Halbkreisbüschels sind bekanntlich wieder Kreise. Das Abbild der Entfernungskreise sind also gewöhnliche Kreise, die ganz in der Halbebene $y > 0$ verlaufen.

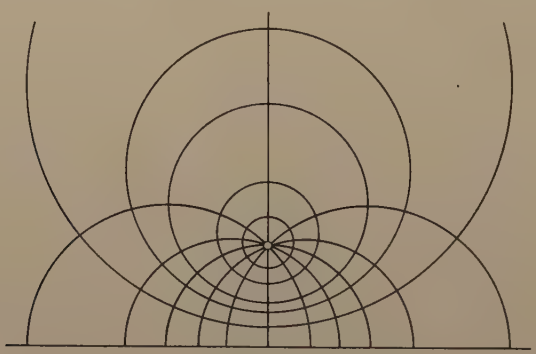


Fig. 14.

Um festzustellen daß alle diese Entfernungskreise auch gleichzeitig Krümmungskreise sind, kann man so verfahren: Man schafft durch (63b) z_0 nach i. Dann bemerkt man, daß durch die Transformationsgruppe (64) die Kreise um den „Mittelpunkt" i (im geodätischen Sinne gemeint!) in sich abgebildet werden, also wegen der Invarianz von $\frac{1}{\varrho_g}$ gegen längentreue Abbildungen feste geodätische Krümmung besitzen, w.z.b.w.

Es gibt aber auch Krümmungskreise, die keinen „Mittelpunkt" haben und die sich auf die Halbebene $y > 0$ in Kreisbogen abbilden, die auf der Achse $y = 0$ in reellen Punkten z_0, z_∞ aufsitzen. Daß diese Kurven

Abbilder von Krümmungskreisen sind, kann man etwa so einsehen: Man schafft durch (66) die Schnittpunkte z_0, z_∞ nach $0, \infty$, wodurch der Kreisbogen in eine vom Ursprung ausgehende Halbgerade übergeht. Die hat aber festes $\frac{1}{\varrho_g}$, da sie durch die Abbildungen

$$\tilde{z} = \alpha z; \quad \alpha > 0 \tag{67}$$

in sich abgebildet wird. Eine besondere Stellung nehmen noch die Krümmungskreise ein, die in $y > 0$ durch Kreise dargestellt werden, die die x-Achse in Punkten z_∞ berühren. Schafft man durch eine Substitution (66) den Berührungspunkt ins Unendliche, so erhält man die Geraden $y = \text{const}$, welche durch $z^* = z + \beta$ in sich abgebildet werden und damit konstantes $\frac{1}{\varrho_g}$ besitzen.

Die beiden Kreisfamilien, einerseits die Entfernungskreise und andererseits die Krümmungskreise, decken sich also nicht, sondern es ist die erste Familie ein Teil der zweiten (vgl. § 82!).

Die Maßbestimmung in der Halbebene $y > 0$ durch das Bogenelement

$$ds = \frac{+\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

spielt eine Rolle in berühmten funktionentheoretischen Untersuchungen von H. Poincaré (1854—1912) aus dem Beginn der achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts[1]. Wir haben hier eine Verwirklichung der auf Gauß, den Russen Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij (1793—1856) und den Ungarn Johann Bolyai (1802—1860) zurückgehenden sogenannten hyperbolischen Geometrie vor uns, einen Zweig der „Nichteuklidischen" Geometrie. „Nichteuklidische" Untersuchungen von Gauß beginnen 1792; Bolyai und Lobatschefskij haben etwa 1826 ihre Untersuchungen durchgeführt.

„Nichteuklidisch nennt's die Geometrie,
spottet ihrer selbst und weiß nicht wie",

hat sich in Anlehnung an Faust Kurd Laszwitz über diese Bezeichnung lustig gemacht.

Man kann sich die hyperbolische Geometrie der Ebene an unserer Maßbestimmung der Halbebene $y > 0$ leicht klarmachen. In dieser Geometrie spielen die Halbkreise über $y = 0$ und die Halbgeraden $x = \text{const}$ die Rolle von „Geraden", während durch (66a) der „Abstand" zweier Punkte z_1, z_2 gegeben wird. Die Winkelmessung stimmt mit der gewöhnlichen Winkelmessung überein.

---

[1] Poincaré, H.: Acta mathematica **1**, 1—62 (1882).

§ 85. Das Integral der geodätischen Krümmung

Wir wollen jetzt wieder zur inneren Geometrie einer beliebigen krummen Fläche zurückkehren und den Sonderfall $K = \text{const}$ verlassen.

Wir betrachten mit Gauß das längs einer zweimal stetig differenzierbaren Flächenkurve genommene Integral ihrer geodätischen Krümmung

$$\int \frac{ds}{\varrho_g}. \tag{68}$$

Von der Kurve wollen wir weiter annehmen, daß sie geschlossen sei, keine mehrfachen Punkte habe und sich (bezüglich der Parameterebene) durch ihr „Inneres" hindurch auf der Fläche stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen soll. Ihr Inneres ist dann *„einfach zusammenhängend"*. Eine Kurve z.B., die um einen Ring herumgeschlungen ist, begrenzt in diesem Sinne keinen einfach zusammenhängenden Teil der Fläche. Dagegen umschließt jede doppelpunktsfreie, geschlossene Kurve auf der Kugelfläche zwei solche Flächenstücke.

Wir wollen einen Zusammenhang herleiten zwischen dem Integral der geodätischen Krümmung längs einer solchen Kurve C und dem Oberflächenintegral

$$\iint K\, do = \iint \frac{W}{R_1 R_2}\, du^1\, du^2 \qquad \left(W = \sqrt{\|g_{ij}\|}\right), \tag{69}$$

erstreckt über das „Innere" von C. Dieses Oberflächenintegral hat ebenfalls Gauß eingeführt und als *„Gesamtkrümmung"* (*curvatura integra*) bezeichnet.

Zu diesem Zweck benutzen wir den im 5. Kapitel entwickelten Kalkül der Differentialformen von É. Cartan. Hierbei drückt sich auf Grund von § 71 (70) und (72) die Gesamtkrümmung in der folgenden Weise aus

$$\iint K\, do = \iint_B \omega_3^2 \wedge \omega_1^3. \tag{70}$$

Die Anwendung der Integrierbarkeitsbedingung § 71 (68b)

$$\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = -d\omega_2^1 \tag{71}$$

liefert nach dem Satz von Stokes (§ 71 (22)!):

$$\iint K\, do = -\iint_B d\omega_2^1 = -\int_{\partial B} \omega_2^1, \tag{72}$$

und es gilt nur noch den Zusammenhang des Linienintegrals $\int_{\partial B} \omega_2^1$ (bei welchem $C = \partial B$ im „positiven Sinne", d. h. so, daß das „Innere" B zur Linken bleibt, zu durchlaufen ist) mit dem Integral der geodätischen Krümmung (68) aufzufinden.

Wir erinnern dazu an die Definition § 71 (65) der Pfaffschen Formen ω_ν^μ:

$$\omega_\nu^\mu = \mathfrak{a}^{(\nu)}\, d\mathfrak{a}^{(\mu)} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \tag{73}$$

wobei $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$ ein zweimal stetig differenzierbares, orthonormiertes Feld von Tangentialvektoren unserer Fläche und $\mathfrak{a}^{(3)}$ den (ebenfalls zweimal stetig differenzierbaren) Flächennormaleneinheitsvektor darstellt. O.B.d.A. kann hierbei durch geeignete Drehung von $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ um $\mathfrak{a}^{(3)}$ erreicht werden, daß $\mathfrak{a}^{(1)}$ überall in Richtung der u^1-Parameterlinien weist. Drehen wir nun längs ∂B $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ überall um $\mathfrak{a}^{(3)}$ mit dem Winkel τ zwischen der u^1-Richtung und der Tangentenrichtung von C, so geht $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ in $\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}$ und $\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}$ über, und es gilt nach § 71 (67b):

$$\tilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + d\tau. \tag{74}$$

Nun ist aber nach (73) und (6)

$$\frac{\tilde{\omega}_2^1}{ds} = \tilde{\mathfrak{a}}^{(2)} \frac{d\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}}{ds} = \left(\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}, \frac{d\tilde{\mathfrak{a}}^{(1)}}{ds}, \tilde{\mathfrak{a}}^{(3)}\right) = \frac{1}{\varrho_g},$$

($\mathfrak{a}^{(1)}$ = Tangenteneinheitsvektor von C!)

und damit wird nach (74)

$$\int_{\partial B} \omega_2^1 = \int_{\partial B} \frac{1}{\varrho_g} ds - \int_{\partial B} d\tau. \tag{75}$$

Hierbei stellt $\int_{\partial B} d\tau$ die Änderung von τ bei Durchlaufung von ∂B (im positiven Sinne) dar. Sie hat (unabhängig von der Gestalt von C!) nach einem Satz der Topologie[1] immer den Wert 2π, so daß also

$$\int_{\partial B} \omega_2^1 = \int_{\partial B} \frac{1}{\varrho_g} ds - 2\pi \tag{76}$$

gilt. (72) und (76) ergeben schließlich die wichtige Integralformel, die O. Bonnet (1819—1892) im Jahr 1848 entdeckt hat[2]

$$\boxed{\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \iint K\, do = 2\pi}. \tag{77}$$

Darin ist das Randintegral links über den Rand des einfach zusammenhängenden Flächenstücks zu erstrecken, auf den sich das Flächenintegral bezieht, und zwar in dem Sinne, daß das Flächenstück zur Linken bleibt.

Die Formel (77) ist eine der wichtigsten der Flächentheorie. Vermutlich hat schon Gauß sie besessen. Daher sprechen manche (auch französische) Geometer von der „Formel von Gauß-Bonnet".

[1] Siehe Hopf, H.: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, Compositio Math. **2**, 50—62 (1935). Der betreffende Satz gilt auch für den Parameterbereich mit der Flächenmetrik.

[2] Bonnet, O.: Journal de l'Ecole Polytechnique **19**, 131 (1848).

§ 86. Folgerungen aus der Integralformel von Gauß und Bonnet[1]

Die Formel (77) gilt zunächst nur für den Fall, daß die Randkurve des einfach zusammenhängenden Flächenstücks eine einfach geschlossene zweimal stetig differenzierbare Kurve ist. Doch bleibt, wie man sofort sieht, die Formel gültig, wenn sich der Rand aus endlich vielen derartigen Bogen glatt, d.h. mit gleicher Tangente an den Enden, zusammensetzt. Schließen die Bogen hingegen nicht gleichsinnig tangentiell aneinander, treten also n Ecken auf mit den Außenwinkeln ω_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), so kann man wegen (75) leicht einsehen, daß an die Stelle von (77) die allgemeinere Formel

$$\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu + \int\int K\, do = 2\pi \tag{78}$$

tritt.

Wenden wir die Formel (78) auf den Fall an, daß es sich um ein dreieckiges Flächenstück handelt, das von einem Kurvenbogen mit von Null verschiedener geodätischer Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ von der Länge Δs und den zwei geodätischen Tangenten in den Endpunkten des Bogens begrenzt wird; dann ist (Fig. 15)

$$-\int \frac{ds}{\varrho_g} + 2\pi + \Delta\tau + \int\int K\, do = 2\pi. \tag{79}$$

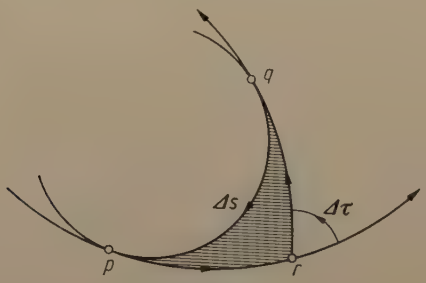


Fig. 15.

Der Beitrag 2π linker Hand stammt von den Spitzen. $\Delta\tau$ bezeichnet den Winkel zwischen den geodätischen Tangenten. Die geodätischen Linien dagegen liefern wegen $1 : \varrho_g = 0$ keinen Beitrag zum Randintegral.

---

[1] Ansätze zu einer Methode, wie man die Sätze dieses Abschnitts und überhaupt die wichtigsten Sätze der Biegungsgeometrie der Flächen mittels Approximation der Fläche durch Vielflache beweisen könnte, finden sich in der Arbeit von J. C. Maxwell: Transformation of surfaces by bending. Scientific papers of J. C. Maxwell, Vol. I, p. 80. Vgl. auch R. Sauer: Münchner Sitzungsberichte 1928, S. 97–104, sowie Jahresber. d. deutsch. Math. Vgg. Bd. 38, 2. Abt., S. 9. 1929.

Macht man in (79) nach Division durch Δs den Grenzübergang $\Delta s \to 0$ und beachtet man die sich unter Verwendung geodätischer Parallelkoordinaten u^1, u^2 mit der Tangente in P als Orthogonaltrajektorie $u^1 = 0$ unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung) ergebende Abschätzung

$$\frac{1}{\Delta s}\left|\int\int K\,do\right| \leqq \frac{1}{\Delta s}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\left(\left|\int_0^{u^1(s)} |K|\,\sqrt[+]{g_{22}}\,du^1\right|\left|\frac{du^2}{ds}\right|\right)ds$$

(80)

$$= \left|\int_0^{u^1(\sigma)} |K(u^1, u^2(\sigma))|\cdot\sqrt[+]{g_{22}}\,(u^1, u^2(\sigma))\,du^1\right|\left|\frac{du^2}{ds}\,(\sigma)\right|$$

($u^i = u^i(s)$, ($i = 1, 2$ sei die Darstellung des Kurvenbogens; $s_0 < \sigma < s_0 + \Delta s$), so findet sich wegen

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{1}{\Delta s}\int\int K\,do = 0 \tag{81}$$

$$\frac{1}{\varrho_g} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}. \tag{82}$$

Dabei wird der Ausdruck (82) positiv, wenn die Kurve (wie in der Figur) „links" von ihren geodätischen Tangenten liegt (vgl. § 85), während er im entgegengesetzten Fall negativ ist. Die Eigenschaft (82) der geodätischen Krümmung entspricht völlig der Grundeigenschaft § 7 (32) der gewöhnlichen Krümmung einer ebenen Kurve.

Wenden wir die verallgemeinerte Formel von Gauß-Bonnet auf ein „geodätisches Dreieck" an, das von drei geodätischen Linien begrenzt ist und die Außenwinkel ω_ν, also die Innenwinkel $\alpha_\nu = \pi - \omega_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) hat, unter der Annahme, daß K konstant ist, so finden wir, wenn F den Inhalt des Dreiecks bedeutet,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + FK = 2\pi$$

oder

$$FK = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi. \tag{83}$$

Diese Formel von Gauß lehrt, daß die Winkelsumme im Dreieck, die für $K = 0$ bekanntlich gleich π ist, für $K > 0$ größer und für $K < 0$ kleiner als π ausfällt.

Es hängt das aufs innigste mit den beiden Arten der Nichteuklidischen Geometrie zusammen, die wenigstens im Kleinen auf den Flächen festen, von Null verschiedenen Krümmungsmaßes verwirklicht werden, wie insbesondere E. Beltrami gezeigt hat[1].

---

[1] Beltrami, E.: Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Werke I, 1868, S. 374–405.

§ 87. Über Hüllkurven von geodätischen Linien

Im § 37 (41) haben wir für die erste Variation der Bogenlänge einer gegebenen zweimal stetig differenzierbaren Flächenkurve die Formel gefunden:

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{\delta n}{\varrho_g}\, ds + [\delta t]_{s_1}^{s_2}. \tag{84}$$

Dabei bedeuten δn und δt die Komponenten der Variation unserer Kurve bezüglich des Normaleneinheitsvektors $\mathfrak{f}$ (in der Tangentialebene) und bezüglich des Tangenteneinheitsvektors $\mathfrak{x}'$. Ist insbesondere die Ausgangskurve geodätisch ($1 : \varrho_g = 0$), so vereinfacht sich die Formel zu

$$\delta s = [\delta t]_{s_1}^{s_2}. \tag{85}$$

Betrachten wir jetzt eine Schar geodätischer Linien, die eine Kurve C senkrecht durchschneiden und eine Kurve $\mathfrak{H}$ einhüllen (Fig. 16), so gibt

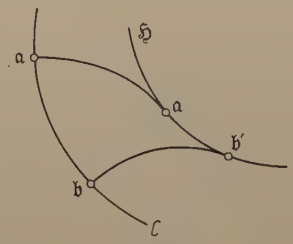


Fig. 16.

die Integration von (85), angewandt auf die geodätischen Bogen zwischen C und $\mathfrak{H}$, da im Schnittpunkt mit C $\delta t = 0$ und im Berührungspunkt mit $\mathfrak{H}$ δt gleich dem Bogenelement von $\mathfrak{H}$ ist, den *„Hüllkurvensatz"*

$$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\} + \{\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'\} = \{\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\} \quad ^{((1))}. \tag{86}$$

In Worten: der Zuwachs der geodätischen Entfernung $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\}$ ist gleich der Länge des entsprechenden Bogens der Einhüllenden. Dabei sind natürlich gewisse Vorzeichenfestsetzungen zu beachten.

Das gilt insbesondere auch dann, wenn alle geodätischen Bogen durch denselben Punkt $\mathfrak{a}$ laufen, wenn sich also gewissermaßen die Kurve C auf den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ zusammenzieht. Dann wird (vgl. Fig. 17)

$$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'\} + \{\mathfrak{b}', \mathfrak{a}'\} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\} \quad ^{((2))}.$$

((1)) Für den Fall der ebenen Geometrie ist das ja die bekannte Beziehung zwischen Evolute und Evolvente von § 21 (Fadenkonstruktion).

((2)) Nach G. Darboux stammen diese Sätze von Jacobi. Vgl. Darboux: Surfaces III, S. 87.

Es sei noch eine Bemerkung von H. Poincaré über die geodätische Krümmung der Einhüllenden $\mathfrak{H}$ hinzugefügt. Nimmt man $\mathfrak{a}$ zum Ursprung eines Systems geodätischer Polarkoordinaten auf der Fläche, so bekommt die erste Grundform auf Grund von (16) die Form

$$ds^2 = dr^2 + B^2\, d\varphi^2.$$

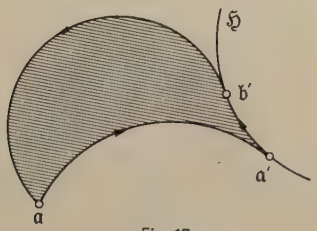


Fig. 17.

Hierin werde $B \geqq 0$ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. In den Punkten von $\mathfrak{H}$ verschwindet die Normalkomponente δn der Variation eines „geodätischen Radius" durch $\mathfrak{a}$, so daß wegen

$$\delta n = \left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \varphi}\right| \cdot \varepsilon = B \cdot \varepsilon$$

(vgl. § 37) längs $\mathfrak{H}$ $B(r, \varphi) = 0$ gilt. Wir stellen nun $\mathfrak{H}$ in der Form $r = r(\varphi)$ ($r(\varphi)$ = geodätische Entfernung von $\mathfrak{a}$ bis zum ersten Berührungspunkt mit $\mathfrak{H}$) dar. Da B bei konstant gehaltenem φ nach (26) und (23) nicht identisch verschwindende Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung $f'' + Kf = 0$ mit den Anfangsbedingungen $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist, gilt an der Stelle $r = r(\varphi)$ neben $B = 0$ auch $\frac{\partial B}{\partial r} \neq 0$, da im Falle $\frac{\partial B}{\partial r} = 0$ B mit der Nullösung dieser Differentialgleichung übereinstimmen müßte. Damit ist aber bekanntlich die explizite Funktion $r = r(\varphi)$ als Lösung der impliziten Gleichung $B(r, \varphi) = 0$ wie B zweimal stetig differenzierbar, und man findet durch Ableitung dieser Gleichung nach φ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\partial B}{\partial \varphi} : \frac{\partial B}{\partial r}. \tag{87}$$

Damit $\mathfrak{H}$ nicht entartet, werde noch längs $\mathfrak{H}$ $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} > 0$, d.h. nach (87) $\frac{\partial B}{\partial \varphi} \neq 0$ vorausgesetzt. Jetzt liefert die Verallgemeinerung (78) des Satzes von Gauß-Bonnet, angewandt auf das schraffierte Flächenstück in

Fig.19, unter Benutzung von (26) und (23) die Beziehung

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\varrho_g}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi + \pi + (\pi - (\varphi - \varphi_0)) - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\int_{0}^{r(\varphi)} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\varrho_g}\frac{dr}{d\varphi}d\varphi + 2\pi - (\varphi - \varphi_0) - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(\frac{\partial B}{\partial r}(r(\varphi), \varphi) - 1\right)d\varphi = 2\pi$$

oder nach Differentiation nach φ in Verbindung mit (87) die gewünschte einfache Formel

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\partial B}{\partial r} : \frac{dr}{d\varphi} = -\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^2 : \frac{\partial B}{\partial \varphi}. \tag{88}$$

§ 88. Beltramis erster Differentiator

Um die geodätische Krümmung einer Flächenkurve bei beliebiger Wahl der Flächenparameter u^1, u^2 darstellen zu können, ist es zweckmäßig, gewisse Differentiationsprozesse abzuleiten, die gegenüber längentreuen Abbildungen invariant sind und die gestatten, aus einer auf der Fläche gegebenen Funktion eine zweite zu bestimmen, die mit ihr invariant verknüpft ist.

Ein solches Differentiationsverfahren, das aus einer stetig differenzierbaren Funktion φ auf unserer Fläche mit dem Bogenelement

$$ds^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j$$

ein Maß für die Steilheit des Anstieges der Funktion φ an einer Stelle liefert, bekommen wir folgendermaßen: Wir suchen an dieser Stelle den Größtwert von $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$ für alle durch diesen Punkt gehenden stetig differenzierbaren Kurven $u^i = u^i(s)$ $(i = 1, 2)$. Es soll also

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \left(\varphi_i \frac{du^i}{ds}\right)^2 = \text{Maximum} \tag{89}$$

werden unter der Nebenbedingung

$$\Phi = g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 1. \tag{90}$$

Nach der bekannten Multiplikatorregel von Euler und Lagrange bildet man

$$\Omega = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \lambda\Phi \tag{91}$$

und sucht die freien Extreme von Ω. Die Gleichungen $\frac{\partial\Omega}{\partial\left(\frac{du^i}{ds}\right)} = 0$ $(i = 1, 2)$ geben

$$(\varphi_i\varphi_j - \lambda g_{ij})\frac{du^j}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{92}$$

Multipliziert man beide Gleichungen mit $\frac{du^i}{ds}$ und addiert, so erhält man wegen (89), (90)

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\text{Extremum}} = \lambda. \tag{93}$$

Andererseits muß wegen (90) die Determinante des linearen homogenen Gleichungssystems (92) verschwinden, d.h. λ ist Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\|\varphi_i\varphi_j - z g_{ij}\| \cdot \|g^{jk}\| = \|g^{jk}\varphi_i\varphi_j - z\,\delta^k_i\| = z^2 - g^{ij}\varphi_i\varphi_j\, z = 0$$

(vgl. § 44!). Somit ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\text{Maximum}} = g^{ij}\varphi_i\varphi_j. \tag{94}$$

Wir wollen für diesen *„ersten Differentiator von Beltrami"*, der schon bei Gauß vorkommt,

$$\boxed{\nabla(\varphi, \varphi) = \nabla\varphi = g^{ij}\varphi_i\varphi_j} \tag{95}$$

schreiben. ∇ kann man etwa „Nabla" lesen. Die Benennung „Differentiator" stammt von F. Engel. Es ist auch

$$\nabla\varphi = -\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \varphi_1 \\ g_{12} & g_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{96}$$

Setzen wir an Stelle von φ ein: $\varphi + \mu\psi$, wo μ konstant und ψ wie φ stetig differenzierbar ist, so wird

$$\nabla(\varphi + \mu\psi, \varphi + \mu\psi) = \nabla(\varphi, \varphi) + 2\mu\,\nabla(\varphi, \psi) + \mu^2\nabla(\psi, \psi), \tag{96a}$$

worin

$$\boxed{\nabla(\varphi, \psi) = g^{ij}\varphi_i\psi_j} \tag{97}$$

ist, oder auch

$$\nabla(\varphi, \psi) = -\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \varphi_1 \\ g_{12} & g_{22} & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{98}$$

Nach seiner Herleitung ist $\nabla(\varphi, \psi)$ ebenfalls ein vom Parametersystem u^1, u^2 unabhängiger Differentialausdruck. Übrigens wird durch die lineare Zuordnung von $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_i \frac{du^i}{dt}$ zum Tangentenvektor $\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{x}_i \frac{du^i}{dt}$ nach Kap. 4 (190) ein Kovektorfeld auf der Fläche definiert mit den

Komponenten φ_i, welches „Gradientenfeld" heißt und mit $\operatorname{grad}\varphi$ bezeichnet wird. $\nabla(\varphi, \psi)$ ist wegen (97) das „innere Produkt" von $\operatorname{grad}\varphi$ und $\operatorname{grad}\psi$, d.h. es gilt:

$$\nabla(\varphi, \psi) = (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi). \tag{99}$$

§ 89. Eine geometrische Anwendung des ersten Differentiators von Beltrami

Wir denken uns eine Kurvenschar auf unserer Fläche durch eine Gleichung

$$\Phi(u^1, u^2) = \text{const} \quad (\Phi \text{ stetig differenzierbar, } \operatorname{grad}\Phi \neq 0) \tag{100}$$

gegeben. Wir wollen sehen, welche geometrische Bedeutung dem Differentiator $\nabla\Phi$ für diese Kurvenschar zukommt. Zu diesem Zweck denken wir uns durch

$$u^{1*} = \Phi(u^1, u^2) \tag{101}$$

statt u^1 einen neuen Parameter u^{1*} auf der Fläche eingeführt. $u^{1*} = \text{const}$ liefert dann die Kurven (100) als Parameterkurven. Zu diesen Kurven wollen wir als zweite Schar $u^{2*} = \text{const}$ des Parameternetzes die orthogonalen Trajektorien der Kurven (100) einführen. Bezeichnen wir die auf die neuen Parameter u^{1*}, u^{2*} bezüglichen Flächengrößen durch Sterne, so haben wir $g_{12}^* = 0$. Da jetzt Φ längs der Kurven $u^{1*} = \text{const}$ konstant ist, gilt $\partial\Phi : \partial u^{2*} = 0$. Wir haben dann wegen der Invarianz von $\nabla\Phi$ auch in den u^{1*}, u^{2*} wegen (96) die Formel

$$\nabla\Phi = -\frac{1}{g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2}} \begin{vmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^{1*}} \\ g_{12}^* & g_{22}^* & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^{2*}} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^{1*}} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^{2*}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{g_{11}^*}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u^{1*}}\right)^2. \tag{102}$$

Es ist also $\sqrt{\nabla\Phi}$ einfach gleich der längs der orthogonalen Trajektorien von (100) genommenen Ableitung von Φ nach der Bogenlänge dieser Kurven. Aus § 88 ergibt sich somit, daß die Funktion Φ in Richtung dieser Kurven das größte Gefälle besitzt. Wir können $\overset{+}{\sqrt{\nabla\Phi}} = |\operatorname{grad}\Phi|$ (vgl. (99)!) schlechthin als das *Gefälle der Funktion Φ oder der Kurvenschar* (100) bezeichnen.

Nimmt man in der Darstellung (100) einer Kurvenschar auf der Fläche eine solche Funktion Φ, die eine Lösung der Gleichung

$$\nabla\Phi = 1 \tag{103}$$

ist, so haben wir eine Schar von Kurven, die überall das Gefälle 1 hat. Solche Kurvenscharen nennen wir *Parallelkurvenscharen*, da je zwei

Kurven $\Phi = c_1$ und $\Phi = c_2$ $(c_2 > c_1)$ längs ihrer Orthogonaltrajektorie die feste Entfernung $c_2 - c_1$ voneinander haben. Nehmen wir nun an, wir hätten eine Lösung der Gleichung (103) für die Familie der Parallelkurvenscharen gefunden, die noch einen willkürlichen Parameter λ enthält. Wir wollen also annehmen, daß wir eine einparametrige Familie $\Phi(u^1, u^2, \lambda) = \text{const}$ von Parallelkurvenscharen gefunden hätten. Wir setzen dabei grad $\Phi_\lambda \neq 0$ $\left(\Phi_\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \text{zweimal stetig differenzierbar}\right)$ voraus und behaupten jetzt:

$$\Phi_\lambda(u^1, u^2, \lambda) = c \tag{104}$$

stellt eine geodätische Linie dar, und man kann durch Abänderung der beiden konstanten Parameter λ und c alle genügend benachbarten geodätischen Linien der Fläche erhalten.

Wir haben also zu zeigen, daß die Kurven, die die Gleichung $\Phi_\lambda(u^1, u^2, \lambda) = \text{const}$ befriedigen, geodätisch sind. Greifen wir einen festen Wert von λ heraus und zeigen wir zunächst, daß die Kurven $\Phi_\lambda = \text{const}$ die Schar der Parallelkurven $\Phi = \text{const}$, die zu demselben Wert von λ gehört, senkrecht durchschneiden. Nach Voraussetzung (103) ist

$$\nabla \Phi = g^{ij} \Phi_i \Phi_j = 1,$$

und daraus folgt durch Ableitung nach λ

$$g^{ij} \Phi_i \Phi_{j\lambda} = \nabla(\Phi, \Phi_\lambda) = 0. \tag{105}$$

Die Bedeutung dieser invarianten Beziehung ist aber gerade die Orthogonalität der Kurvenscharen $\Phi = \text{const}$ und $\Phi_\lambda = \text{const}$. Führt man nämlich wie zu Anfang dieses Abschnitts durch (101) einen neuen Parameter u^{1*} ein und nimmt zu den Parameterkurven (100) dann noch als Kurven $u^{2*} = \text{const}$ wieder die orthogonalen Trajektorien hinzu, so sind diese letzteren jetzt als orthogonale Trajektorien einer Parallelkurvenschar, die auf ihnen gleiche Bogenlängen ausschneidet, nach § 78 *geodätische Linien*.

Wegen der Invarianz von $\nabla(\Phi, \Phi_\lambda)$ gilt die Gleichung (105) jetzt auch in den neuen Parametern, für die $g^*_{12} = 0$ und $\partial \Phi : \partial u^{2*} = 0$ wird. Wir haben also nach (98)

$$\begin{vmatrix} g^*_{11} & 0 & \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u^{1*}} \\ 0 & g^*_{22} & \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u^{2*}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u^{1*}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial \Phi}{\partial u^{1*}} \cdot g^*_{22} \cdot \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u^{1*}} = 0, \tag{106}$$

d.h. wegen $\frac{\partial \Phi}{\partial u^{1*}} \neq 0$, $g_{22}^{*} \neq 0$

$$\partial \Phi_\lambda : \partial u^{1*} = 0 \text{ oder } \Phi_\lambda = \text{const.} \tag{107}$$

längs der Kurven $u^{2*} = \text{const}$. Die Kurven $\Phi_\lambda = \text{const}$ fallen mit den Kurven $u^{2*} = \text{const}$ zusammen, sind also wirklich zu den Kurven $\Phi = \text{const}$ senkrecht und damit geodätische Linien.

Die Gleichungen (104) ergeben somit eine zweiparametrige Schar, also in einer gewissen Nachbarschaft „alle" geodätischen Linien. *Kennt man daher auf einer Fläche eine Schar von Parallelkurven, die noch von einem Parameter λ abhängt, so kann man durch* (104) *die geodätischen Linien dieser Fläche bestimmen.*

§ 90. Beltramis zweiter Differentiator

Um zu einem weiteren invarianten Differentiationsverfahren zu kommen, gehen wir von einem Variationsproblem auf einer Fläche aus, das die naturgemäße Verallgemeinerung der sogenannten ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie ist. Es soll nämlich auf einem glatt berandeten einfach zusammenhängenden Flächenstück eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ mit vorgeschriebenen Randwerten so bestimmt werden, daß das Dirichletsche Integral

$$D_\varphi = \int\int \nabla(\varphi, \varphi)\, W\, du^1\, du^2 \tag{108}$$

möglichst klein ausfällt. Darin bedeutet $W\, du^1\, du^2 = do$ das Oberflächenelement. Es sei $\varphi + \varepsilon\psi$ ($\varepsilon = \text{const}$) eine Vergleichsfunktion, also ψ zweimal stetig differenzierbar und auf dem Rande Null. Dann ist nach (96a)

$$D_{\varphi+\varepsilon\psi} = D_\varphi + 2\varepsilon \int\int \nabla(\varphi, \psi)\, W\, du^1\, du^2 + \varepsilon^2 D_\psi. \tag{109}$$

Für das Minimum ist notwendig und wegen $D_\psi \geqq 0$ auch hinreichend, daß das mittlere Integral für jedes zulässige ψ verschwindet. Man erhält aus (97) durch partielle Integration unter Berücksichtigung der verschwindenden Randwerte von ψ

$$\begin{aligned} &\int\int \nabla(\varphi, \psi)\, W\, du^1\, du^2 = \int\int (W g^{ij}\varphi_i)\psi_j\, du^1\, du^2 \\ &= -\int\int \frac{\psi}{W} (W g^{ij}\varphi_i)_j\, W\, du^1\, du^2. \end{aligned} \tag{110}$$

Hierbei ist nach Kap. 4 (75a), (132), (193) und einer Bemerkung nach (212):

$$\begin{aligned} \frac{1}{W}(W g^{ij}\varphi_i)_j &= (g^{ij}\varphi_i)_j + (\ln W)_j\, g^{ij}\varphi_i = (g^{ij}\varphi_i)_j \\ &\quad + \Gamma^k_{jk} g^{ij}\varphi_i = (g^{ij}\varphi_i)_{;j} = g^{ij}\varphi_{i;j}. \end{aligned} \tag{111}$$

Setzen wir in (110)

$$\boxed{\Delta\varphi = g^{ij}\varphi_{i;j}}, \tag{112}$$

so haben wir also gefunden

$$\int\int \nabla(\varphi, \psi)\, W\, du^1\, du^2 = -\int\int \psi \cdot \Delta\varphi \cdot W\, du^1\, du^2 \tag{113}$$

und damit als Differentialgleichung für φ

$$\Delta\varphi = 0, \tag{114}$$

die Verallgemeinerung der Laplaceschen Differentialgleichung für die euklidische Ebene

$$\frac{\partial^2\varphi}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial u^2)^2} = 0. \tag{115}$$

Da die Gleichung (113) identisch in φ und ψ gilt, da ferner $W\, du^1\, du^2 = do$ und die linke Seite der Gleichung invariante Bedeutung haben, so muß auch $\Delta\varphi$ parameterinvariant sein. (Dies folgt auch aus der Tatsache, daß $\varphi_{i;j}$ nach Kap. 4 (194) die Komponenten eines zweifach kovarianten Tensors darstellen!). Man nennt $\Delta\varphi$ Beltramis *zweiten Differentiator der Funktion* φ.

E. Beltrami hat im Anschluß an Untersuchungen von G. Lamé seine Differentiatoren in einer hervorragenden Abhandlung aus den Jahren 1864 und 1865 eingeführt[1].

Definieren wir übrigens in Verallgemeinerung einer bekannten Bildung der Vektoranalysis der euklidischen Ebene die „Divergenz" eines Vektorfeldes $\mathfrak{v} = v^i\mathfrak{x}_i$ bzw. eines Kovektorfeldes $\mathfrak{V} = v_i\mathfrak{x}^{(i)}$ der Fläche (parameterinvariant) durch

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = v^j_{;j} \text{ bzw. } \operatorname{div}\mathfrak{V} = g^{ij}v_{i;j}, \tag{116}$$

so läßt sich $\Delta\varphi$ nach (112) folgendermaßen schreiben:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi. \tag{117}$$

§ 91. Integralformeln von Gauß und Green

Wir sind nun in der Lage, bekannte Integralsätze der ebenen Vektoranalysis auf die Flächentheorie zu übertragen. Wir betrachten dazu wieder wie im letzten Paragraphen ein einfach zusammenhängendes, glatt berandetes Flächenstück $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ $((u^1, u^2) \in$ Parameterbereich $B)$, darauf ein (in seinen Komponenten) stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathfrak{v} = v^j\mathfrak{x}_j$ und versuchen, das Flächenintegral

$$\int\int_B \operatorname{div}\mathfrak{v}\, do = \int\int_B \operatorname{div}\mathfrak{v}\, W\, du^1\, du^2 \tag{118}$$

[1] Beltrami, E.: Ricerche di analisi applicata alla geometria. Opere I, S. 107–198. Besonders Nr. XIV und XV.

in ein Linienintegral zu verwandeln. Zu diesem Zweck beachten wir, daß der Integrand in (118) eine Differentialform vom Grade zwei darstellt, die sich nach (116), (111) und Kap. 4 (75a), (202), sowie Kap. 5 (20) auch in der Form

$$v^j_{;j} W\, du^1 \wedge du^2 = (W v^j)_j\, du^1 \wedge du^2 = d(\varepsilon_{ji} v^j\, du^i) \tag{119}$$

darstellen läßt. Damit ergibt die Anwendung des Integralsatzes von Stokkes in Kap. 5 (22):

$$\iint_B \operatorname{div} \mathfrak{v}\, do = \int_{\partial B} \varepsilon_{ji} v^j\, du^i = \oint \varepsilon_{ji} v^j \frac{du^i}{ds}\, ds, \tag{120}$$

und wir haben nur noch das Linienintegral auf der rechten Seite von (120) mit dem Bogenlängenparameter s der (stetig differenzierbaren) Randkurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ des Flächenstücks in eine geometrisch leicht zu deutende Form zu bringen. Zu diesem Zweck beachten wir, daß nach Kap. 4 (202)

$$\varepsilon_{ji} v^j \frac{du^i}{ds} = \left(v^j \mathfrak{x}_j, \frac{du^i}{ds} \mathfrak{x}_i, \mathfrak{n}\right) = (\mathfrak{v}, \mathfrak{x}', \mathfrak{n}) = -(\mathfrak{f}, \mathfrak{v}) \tag{121}$$

ist ($\mathfrak{f} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{x}' =$ ins Innere des Flächenstücks weisender Normaleneinheitsvektor der Randkurve!), womit (120) die Form des Gaußschen Integralsatzes

$$\boxed{\iint_B \operatorname{div} \mathfrak{v}\, do = -\oint (\mathfrak{f}, \mathfrak{v})\, ds} \tag{122}$$

annimmt. Wir bemerken noch, daß sich auf Grund von (116) der Gaußsche Integralsatz (122) für das dem Vektorfeld $\mathfrak{v} = v^j \mathfrak{x}_j$ nach § 62 „zugeordnete" Kovektorfeld $\mathfrak{V} = v_i \mathfrak{X}^{(i)} = g_{ij} v^j \mathfrak{X}^{(i)}$ folgendermaßen formulieren läßt:

$$\iint_B \operatorname{div} \mathfrak{V}\, do = -\oint \mathfrak{V}(\mathfrak{f})\, ds. \tag{123}$$

Besonders interessant wird nun die Formel (123) bei der Spezialisierung $\mathfrak{V} = \psi \operatorname{grad} \varphi$, wobei φ, ψ zwei beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Flächenparameter sind. In diesem Fall haben wir wegen Kap. 4 (200) und (99), (112)

$$\operatorname{div} \mathfrak{V} = g^{ij}(\psi \varphi_i)_{;j} = g^{ij} \varphi_i \psi_j + \psi g^{ij} \varphi_{i;j} = \nabla(\varphi, \psi) + \psi\, \Delta\varphi \tag{124}$$

und

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{f}) = \psi \operatorname{grad} \varphi(\mathfrak{f}) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \tag{125}$$

wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ die Ableitung von φ in Richtung des *inneren* Normaleneinheitsvektors $\mathfrak{f}$ bedeutet, so daß (123) die Gestalt der *ersten Formel von Green*

annimmt:

$$\boxed{\iint_B \psi\, \Delta\varphi\, do = -\oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds - \iint_B \nabla(\varphi, \psi)\, do} \tag{126}$$

Vertauscht man in (126) φ und ψ, so folgt durch Abziehen unter Beachtung der Symmetrie von $\nabla(\varphi, \psi)$ in φ, ψ die *zweite Formel* Greens:

$$\boxed{\iint_B (\psi\, \Delta\varphi - \varphi\, \Delta\psi)\, do + \oint \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) ds = 0} \tag{127}$$

§ 92. Zwei neue Formeln für die geodätische Krümmung

Auf unserer zweimal stetig differenzierbaren Fläche sei eine Kurve implizit durch die Gleichung

$$\varphi(u^1, u^2) = 0 \tag{128}$$

mit zweimal stetig differenzierbarem φ und $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$ gegeben, deren geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ wir bestimmen wollen. Dazu ist es zweckmäßig, die Kurvenschar $\varphi(u^1, u^2) = \text{const}$ und die dazu orthogonale (ebenfalls zweimal stetig differenzierbare) Schar $\psi(u^1, u^2) = \text{const}$ ($\operatorname{grad} \psi \neq 0$) zu betrachten und durch

$$u^{1*} = \psi(u^1, u^2),\ u^{2*} = \varphi(u^1, u^2) \tag{129}$$

neue Flächenparameter einzuführen. Die erste Grundform der Fläche nimmt damit die spezielle Gestalt

$$ds^2 = g^*_{11}(du^{1*})^2 + g^*_{22}(du^{2*})^2 \tag{130}$$

mit stetig differenzierbaren Koeffizienten g^*_{11}, g^*_{22} an, und für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ der vorgegebenen Kurve $u^{2*} = 0$ gilt nach (12)

$$\frac{1}{\varrho_g} = \mp \frac{1}{2} \frac{g^*_{11,2}}{g^*_{11} \sqrt{g^*_{22}}} = \mp \frac{(\sqrt{g^*_{11}})_2}{\sqrt{g^*_{11}\, g^*_{22}}}. \tag{131}$$

Nun kann man sich mittels der Beltramischen Differentiatoren leicht von der speziellen Koordinatenwahl (131) befreien. Auf Grund der Definition (112) in Verbindung mit (111) und (95), (97) wird nämlich

$$\Delta(u^{2*}) = \frac{1}{\sqrt{g^*_{11}\, g^*_{22}}} (\sqrt{g^*_{11} g^*_{22}}\, g^{22*})_2 = \frac{(\sqrt{g^*_{11}})_2}{\sqrt{g^*_{11}\, g^*_{22}}} - \frac{(\sqrt{g^*_{22}})_2}{(\sqrt{g^*_{22}})^3} \tag{132}$$

und

$$\nabla(u^{2*}) = g^{22*} = \frac{1}{g^*_{22}}, \tag{133}$$

$$\nabla(u^{2*}, \overset{+}{\sqrt{g^*_{22}}}) = g^{22*}(\overset{+}{\sqrt{g^*_{22}}})_2 = \frac{(\overset{+}{\sqrt{g^*_{22}}})_2}{g^*_{22}}. \tag{134}$$

Damit ergibt sich zusammen mit (131):

$$\frac{1}{\varrho_g} = \mp \frac{\Delta(u^{2*})}{\overset{+}{\sqrt{\nabla(u^{2*})}}} \mp \nabla\left(u^{2*}, \frac{1}{\overset{+}{\sqrt{\nabla(u^{2*})}}}\right) \tag{135}$$

oder wegen (129) in den ursprünglichen Flächenparametern der von Beltrami (Werke I, S. 176) angegebene Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_g} = \mp \frac{\Delta\varphi}{\overset{+}{\sqrt{\nabla\varphi}}} \mp \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\overset{+}{\sqrt{\nabla\varphi}}}\right). \tag{136}$$

Ist dagegen die Flächenkurve in der Parameterdarstellung

$$u^i = u^i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

gegeben, so erhält man für die geodätische Krümmung nach (6) und § 57 (131), § 63 (202)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_g} &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \cdot \left(\mathfrak{x}_i \frac{du^i}{dt}, \mathfrak{x}_j \frac{d^2u^j}{dt^2} + \mathfrak{x}_{kl} \frac{du^k}{dt} \frac{du^l}{dt}, \mathfrak{n}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_{ij} \frac{du^i}{dt}\left(\frac{d^2u^j}{dt^2} + \Gamma^j_{kl} \frac{du^k}{dt} \frac{du^l}{dt}\right)}{\left(g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{137}$$

Diese Formel findet sich ebenfalls bei Beltrami (Werke I, S. 178). Sie hat vor der Formel (136) den Vorteil, daß keine weitere Verabredung wegen des Vorzeichens nötig ist. Nach § 78 schreiben sich jetzt die beiden Differentialgleichungen für eine geodätische Linie $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{n}) = 0$ und $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = 0$ auch in der Form

$$\varepsilon_{ij} \frac{du^i}{ds}\left(\frac{d^2u^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds}\right) = 0, \quad g_{ij} \frac{du^i}{ds}\left(\frac{d^2u^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds}\right) = 0 \tag{138}$$

oder — damit offensichtlich gleichbedeutend —

$$\frac{d^2u^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{139}$$

§ 93. Isotherme Parameter

Es liegt die Frage nahe, ob man jedes Bogenelement

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$$

durch Einführung neuer Parameter p^1, p^2 auf die sogenannte „isotherme" Form

$$ds^2 = \lambda(p^1, p^2) \cdot \left((dp^1)^2 + (dp^2)^2\right) \quad (\lambda > 0) \tag{140}$$

bringen kann. In diesem Fall nimmt der zweite Beltramische Differentiator nach (112) und (111) die besonders einfache Form an:

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{\lambda}, \tag{141}$$

so daß also

$$\Delta p^1 = \Delta p^2 = 0 \tag{142}$$

ist. Die isothermen Parameter p^1, p^2 genügen also beide als Funktionen von u^1, u^2 derselben linearen, homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der Verallgemeinerung der Differentialgleichung von Laplace.

Um den Zusammenhang zwischen p^1 und p^2 zu bekommen, berechnen wir uns auch noch die ersten Beltramischen Differentiatoren nach (95) und (97)

$$\nabla\varphi = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{\lambda},$$

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2}{\lambda},$$

also

$$\nabla p^1 = \nabla p^2 = \frac{1}{\lambda} > 0, \tag{143}$$

$$\nabla(p^1, p^2) = 0. \tag{144}$$

Die letzte Gleichung lautet ausführlich in den Veränderlichen u^1, u^2 (vgl. (97)!):

$$g^{ij}(p^1)_i\,(p^2)_j = 0. \tag{145}$$

Daraus ist zunächst

$$(p^2)_k = \mu\varepsilon_{jk}g^{ij}(p^1)_i \quad (k = 1, 2).$$

Bildet man linker Hand ∇p^2, so folgt wegen der aus Kap. 4 (202) folgenden Beziehung $\varepsilon_{jl}\varepsilon_{km} = g_{jk}g_{lm} - g_{lk}g_{jm}$ (vgl. Kap. 4 (75a)!):

$$\nabla p^2 = \mu^2 g^{lm}\left(\varepsilon_{jl}g^{ij}(p^1)_i\right)\left(\varepsilon_{km}g^{hk}(p^1)_h\right) = \mu^2 g^{hi}(p^1)_i\,(p^1)_h = \mu^2\nabla p^1, \tag{145a}$$

d.h. in Verbindung mit (143):

$$\mu^2 = 1. \tag{146}$$

Somit haben wir

$$(p^2)_k = \pm\,\varepsilon_{jk}g^{ij}(p^1)_i \quad (k = 1, 2) \tag{147}$$

und umgekehrt

$$(\mathfrak{p}^1)_i = \mp\, \varepsilon_{ji} g^{kj} (\mathfrak{p}^2)_k \quad (i = 1, 2). \tag{148}$$

Ist insbesondere schon das System u^1, u^2 isotherm, so vereinfachen sich unsere Formeln zu

$$(\mathfrak{p}^1)_1 = (\mathfrak{p}^2)_2, \quad (\mathfrak{p}^1)_2 = -(\mathfrak{p}^2)_1, \tag{149}$$

wenn man etwa $\mu = +1$ oder $\frac{\partial(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{p}^2)}{\partial(u^1, u^2)} = W g^{ij} g^{kl} \varepsilon_{jl} (\mathfrak{p}^1)_i (\mathfrak{p}^2)_k =$ $W \cdot \nabla \mathfrak{p}^1 > 0$ (vgl. (147)) nimmt. Diese Gleichungen sind das System der Differentialgleichungen von Cauchy und Riemann aus der Funktionentheorie; die Formeln (147) oder (148) sind als die Verallgemeinerung dieses Gleichungssystems anzusehen.

Ist eine Lösung $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p}^1(u^1, u^2)$ von $\Delta \mathfrak{p}^1 = 0$ mit $\nabla \mathfrak{p}^1 > 0$ bekannt, so bekommt man nach (147) das dazugehörige $\mathfrak{p}^2$ durch das Linienintegral

$$\mathfrak{p}^2 = \pm \int \varepsilon_{jk} g^{ij} (\mathfrak{p}^1)_i \, du^k. \tag{150}$$

Es ist ja gerade der Inhalt der Voraussetzung $\Delta \mathfrak{p}^1 = 0$ oder

$$\left(W g^{ij} (\mathfrak{p}^1)_i\right)_j = 0 \tag{151}$$

(vgl. (111)), daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (150) ein äußeres Differential bedeutet, so daß das Linienintegral (150) vom Wege unabhängig ist (§ 67). Nach Konstruktion von $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$ gilt jetzt für die erste Grundform $h_{ij}\, du^i\, du^j$

$$h^{12} = \nabla(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{p}^2) = 0,$$

$$h^{11} = \nabla(\mathfrak{p}^1) = \nabla(\mathfrak{p}^2) = h^{22} > 0$$

(vgl. (145a) und (146)), d.h. $\mathfrak{p}^1$, $\mathfrak{p}^2$ sind in der Tat isotherme Parameter.

Die komplexe Verbindung $z = u^1 + iu^2$ zweier zusammengehöriger isothermer Parameter u^1, u^2 bezeichnet man als komplexen Parameter auf unserer Fläche. Ist $w = f(z) = \mathfrak{p}^1 + i\mathfrak{p}^2$ eine analytische Funktion des komplexen Parameters z mit $f'(z) \neq 0$, so wird

$$dw = f'(z)\, dz,$$

$$|dw| = |f'(z)| \frac{ds}{+\sqrt{\lambda}},$$

also

$$ds^2 = \frac{\lambda}{|f'(z)|^2} \left((d\mathfrak{p}^1)^2 + (d\mathfrak{p}^2)^2\right). \tag{152}$$

Das Bogenelement hat wieder die isotherme Form, d.h. durch Zerspaltung von w in Real- und Imaginärteil erhält man wieder isotherme Parameter auf unserer Fläche. Jeder Übergang von isothermen zu isothermen Parametern wird auf Grund von (149) auf diese Weise erhalten.

Die Gleichung $dw = dp^1 + i\,dp^2 = 0$ oder $w = \text{const}$ liefert wegen $ds^2 = \lambda(dp^1 + i\,dp^2)\,(dp^1 - i\,dp^2) = 0$ auf unserer Fläche eine Schar von komplexen Kurven mit der Länge Null, die wir in § 22 als isotrope Kurven bezeichnet haben. So kann man nach Gauß die Bestimmung der isothermen Funktionen p^1, p^2 auf einer Fläche auf die Ermittlung der isotropen Kurven der Fläche zurückführen, wenn man die Fläche von vornherein als analytisch voraussetzt.

Ist dieselbe nur zweimal stetig differenzierbar, so ist die Existenz isothermer Parameter ebenfalls gesichert[1].

§ 94. Winkeltreue Abbildung

Sind u^1 und u^2 zwei zusammengehörige isotherme Parameter auf einer Fläche, hat also die erste Grundform die Form

$$ds^2 = \lambda\big((du^1)^2 + (du^2)^2\big),$$

so bekommt man eine winkeltreue Abbildung unserer Fläche in die euklidische Ebene, wenn man u^1 und u^2 als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deutet. Der Winkel φ zweier Kurven auf der Fläche bestimmt sich nämlich durch die Gleichung (62). Bei Einführung unserer isothermen Parameter ist φ gleich dem gewöhnlichen Winkel der entsprechenden Kurven in der u^1, u^2-Ebene (vgl. die Ableitung am Schluß von § 83).

Um jetzt *alle* winkeltreuen Abbildungen unserer Fläche in die Ebene aufzustellen, genügt es — wegen der Zusammensetzbarkeit der winkeltreuen Abbildungen zu winkeltreuen Abbildungen — alle (stetig differenzierbaren) winkeltreuen Abbildungen des Parametergebiets U der u^1, u^2-Ebene in die u^1, u^2-Ebene zu ermitteln. Es seien u^1, u^2 und p^1, p^2 die Koordinaten zweier sich in einer winkeltreuen Abbildung mit Erhaltung des Umlaufsinnes („eigentlich" winkeltreuen Abbildung) entsprechenden Punkte. Dann muß die Matrix der zugehörigen linearen Abbildung der Tangentenvektoren aller durch einen Punkt gehenden, stetig differenzierbaren Kurven

$$\begin{pmatrix} (p^1)_1 & (p^1)_2 \\ (p^2)_1 & (p^2)_2 \end{pmatrix}$$

nach einem Satz der analytischen Geometrie einer eigentlich orthogonalen Matrix proportional sein. Das gibt die Gleichungen

$$(153) \qquad (p^1)_1 = (p^2)_2, \quad (p^1)_2 = -(p^2)_1$$

[1] Wegen der Literatur über diesen Gegenstand vgl. man Lichtenstein L.: Zur Theorie der konformen Abbildung ... Bull. Acad. Cracovie 1916, 192—217 und Chern, S., Hartman, P., Wintner, A.: On isothermic coordinates, Comm. Math. Helvetici 28, 301—309 (1954).

von Cauchy und Riemann, die aussagen, daß $w = p^1 + ip^2$ analytisch von $z = u^1 + iu^2$ abhängt. Bezeichnet man mit $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl, so werden durch die Beziehungen

$$w = f(z) \tag{154}$$

bzw.

$$w = f(\bar{z}) \tag{155}$$

mit analytischer Funktion f ($f' \neq 0$) die allgemeinsten „eigentlich" bzw. „uneigentlich" winkeltreuen Abbildungen von U dargestellt.

Ist allgemeiner $z = u^1 + iu^2$ ein komplexer Parameter auf einer krummen Fläche und $w = p^1 + ip^2$ ein komplexer Parameter auf einer zweiten Fläche, so wird durch die Beziehungen (154) bzw. (155) die allgemeinste winkeltreue Abbildung der beiden Flächen aufeinander vermittelt.

Die Aufgabe, die winkeltreuen Abbildungen, die man nach einem Vorschlag von Gauß (1843) auch „*konform*" nennt, zu bestimmen, entstand bei der Herstellung ebener „Landkarten" von krummen Flächen. So haben schon die alten Griechen die „stereographische Projektion" der Kugel besessen, bei der die Kugel (vgl. Fig. 32)

$$x_1 = \sin\vartheta\cos\varphi,\quad x_2 = \sin\vartheta\sin\varphi,\quad x_3 = \cos\vartheta \tag{156}$$

mit

$$ds^2 = d\vartheta^2 + (\sin^2\vartheta)\,d\varphi^2 \tag{157}$$

(vgl. Kap. 4 (11)!) durch

$$p^1 = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1-\cos\vartheta},\qquad p^2 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1-\cos\vartheta} \tag{158}$$

winkeltreu auf die p^1, p^2-Ebene abgebildet wird, so daß gilt:

$$ds^2 = \frac{4}{(1+(p^1)^2+(p^2)^2)^2}\left((dp^1)^2 + (dp^2)^2\right). \tag{159}$$

Nach besonderen Untersuchungen von G. Mercator (1512—1594) und J. H. Lambert (1728—1777) haben dann Lagrange, Euler und Gauß die allgemeine Theorie entwickelt.

§ 95. Die Förderung der Flächentheorie durch Gauß

Von Gauß gibt es zwei bedeutende Abhandlungen zur Flächentheorie. Die erste hat Gauß 1822 als Preisschrift der Kopenhagener Akademie eingereicht. Sie ist 1825 erschienen unter dem Titel: „Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird" (Werke Bd. 4, S. 189—216). Ungleich wichtiger als diese

Abhandlung über die winkeltreue Abbildung ist die zweite Gaußsche Schrift zur Flächentheorie, die 1827 erschienen ist, die „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (Werke Bd. 4, S. 220—258). Beide Abhandlungen sind nicht aus reinem Denken entstanden, sondern Ergebnisse seiner geodätischen Arbeiten bei der von ihm geleiteten Vermessung von Hannover (1821—1841).

Das Hauptergebnis des „Disquisitiones", nämlich die Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes, hat Gauß schon 1816 gekannt und 1822 an der isothermen Verformung des Bogenelementes hergeleitet.

Die Verbiegung von Flächen ist schon vor Gauß von Euler und Monge untersucht worden, und zwar haben beide nach den krummen Flächen gefragt, die auf die Ebene längentreu abbildbar sind. Die geodätische Krümmung („Seitenkrümmung") und ihr Integral ist zuerst von Gauß behandelt worden (Werke Bd. 8, S. 386). Vielleicht hat er auch die Integralformel (77) von Bonnet besessen, die den Zusammenhang zwischen der Flächentheorie und der Nichteuklidischen Geometrie herstellt, zu der ebenfalls Gauß den Grund gelegt hat.

Die „Disquisitiones" haben als erster großer Fortschritt in der Flächentheorie seit Monge einen bedeutenden Einfluß auf die Entwicklung der Geometrie gehabt. So haben sich Arbeiten von Minding, Mainardi, Codazzi, Bonnet und Jacobi angeschlossen. Die wichtigste Weiterbildung der Gedanken von Gauß hat aber B. Riemann in seinem Habilitationsvortrag von 1854 gegeben, auf den wir später eingehend zurückkommen werden.

Eine geschichtliche Würdigung der geometrischen Leistungen des „Princeps mathematicorum" findet man in der Schrift von P. Stäckel: C. F. Gauß als Geometer. Leipzig 1918. Siehe ferner die Beiträge von W. Blaschke: „C. F. Gauß und die Differentialgeometrie", sowie von W. Klingenberg: „Grundlagen der Geometrie" im Gedenkband zum 100. Todestag von Gauß am 23. 2. 1955, Leipzig 1957.

§ 96. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 77). Es seien $\frac{1}{\varrho_g^{(1)}}$ bzw. $\frac{1}{\varrho_g^{(2)}}$ die geodätischen Krümmungen eines orthogonalen Parameternetzes $u^2 = \text{const}$ bzw. $u^1 = \text{const}$ einer zweimal stetig differenzierbaren Fläche. Man zeige: Für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ einer (zweimal stetig differenzierbaren) Flächenkurve, die die Parameterlinien $u^2 = \text{const}$ unter dem Winkel τ schneidet, gilt

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\cos\tau}{\varrho_g^{(1)}} + \frac{\sin\tau}{\varrho_g^{(2)}} + \frac{d\tau}{ds}$$

(s = Bogenlängenparameter der Flächenkurve).

2. (Zu § 77). Es seien $\frac{1}{\varrho_g^{(1)}}$ bzw. $\frac{1}{\varrho_g^{(2)}}$ die geodätischen Krümmungen des Parameternetzes $u^2 = \text{const}$ bzw. $u^1 = \text{const}$ einer dreimal stetig differenzierbaren Fläche und ω der Winkel der Parameterkurven. Man beweise: Für die Gaußsche Krümmung K der Fläche gilt:

$$K = \frac{1}{\|g_{ij}\|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\varrho_g^{(2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\varrho_g^{(1)}} \right) \right).$$

3. (Zu § 78). Eine dreimal stetig differenzierbare Fläche F sei auf die „geodätischen Parallelkurven" (d.h., die nichtgeodätischen Parameterkurven von geodätischen Parallelkoordinatensystemen) $u^2 = \text{const}$ und $u^1 = \text{const}$ der vorgegebenen Kurven k_1: $u^2 = 0$ und k_2: $u^1 = 0$ als Parameterkurven bezogen. Man beweise: Die Kurven $\alpha = \frac{1}{2}(u^1 + u^2) = \text{const}$ und $\beta = \frac{1}{2}(u^1 - u^2) = \text{const}$ bilden ein orthogonales Parametersystem für F, und die erste Grundform von F besitzt die Gestalt:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{d\beta^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

(ω = Winkel der Parameterlinien $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$!).

4. (Zu § 78). Es sei $s = s(u^1, u^2)$ die Bogenlänge der von einem festen Punkt $(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$ zu einem beliebigen Punkt (u^1, u^2) verlaufenden geodätischen Linie eines hinreichend kleinen, dreimal stetig differenzierbaren Flächenstücks $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$. Dann soll bewiesen werden: Für den Betrag $(\nabla s)^{\frac{1}{2}}$ des „Gradienten" der Funktion s (vgl. Kap. 6 (99)) gilt die Beziehung

$$(\nabla s)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

5. (Zu § 78). Zwei dreimal stetig differenzierbare Flächen F und $\overline{F}$ des euklidischen Raumes seien durch gleiche Parameter u^i $(i = 1, 2)$ so aufeinander abgebildet, daß dabei die geodätischen Linien von F und $\overline{F}$ einander entsprechen. Man zeige: Für die Differenzen der Christoffelsymbole zweiter Art von F und $\overline{F}$ gilt die Beziehung

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j a_k + \delta^i_k a_j \quad (i, j, k = 1,2),$$

wobei a_i die Komponenten des kovarianten Gradientenvektors

$$a_i = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial u^i} \log \left(\frac{\|\overline{g}_{jk}\|}{\|g_{jk}\|} \right)$$

sind.

6. (Zu § 78). Man beweise unter Benützung von Übungsaufgabe 5: Läßt sich die dreimal stetig differenzierbare Fläche F: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ durch gleiche Parameter auf die Ebene E: $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + u^1 \mathfrak{v}_1 + u^2 \mathfrak{v}_2$ ($\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ = orthonormiert) so abbilden, daß hierbei den geodätischen Linien von F die Geraden von E entsprechen, so besitzt F konstante Gaußsche Krümmung. Man gebe Beispiele solcher Abbildungen an.

7. (Zu § 78). Zwei dreimal stetig differenzierbaren Flächen F und $\overline{F}$ des euklidischen Raumes seien durch gleiche Parameter u^i so aufeinander abgebildet, daß sich hierbei die geodätischen Linien von F und $\overline{F}$ entsprechen (vgl. Übungsaufgabe 5), aber daß F und $\overline{F}$ nicht „homothetisch" sind, d.h. daß keine Konstante c mit $\overline{g}_{ij} = cg_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ existiert. Man beweise: F und $\overline{F}$ sind Liouvillesche Flächen (vgl. die folgende Aufgabe!), und es gilt nach geeigneter Normierung der Parameter

$$g_{11} = U_1(u^1) - U_2(u^2),\ g_{12} = 0,\ g_{22} = U_1(u^1) - U_2(u^2),$$

$$\overline{g}_{11} = \left(\frac{1}{U_2(u^2)} - \frac{1}{U_1(u^1)}\right)\frac{1}{U_1(u^1)},\quad \overline{g}_{12} = 0,\ \overline{g}_{22} = \left(\frac{1}{U_2(u^2)} - \frac{1}{U_1(u^1)}\right)\frac{1}{U_2(u^2)}.$$

[Anleitung: Man wähle ein gemeinsames orthogonales Parametersystem auf beiden Flächen, das durch eine „Skalentransformation" noch geeignet zu normieren ist, und benutze das Resultat von Übungsaufgabe 5.!].

8. Eine zweimal stetig differenzierbare Fläche heißt „Liouvillesche Fläche", wenn ihre erste Grundform die Gestalt

$$ds_2 = (U_1(u^1) + U_2(u)^2))\,((du^1)^2 + (du^2)^2)$$

besitzt. Man zeige: Alle (zweimal stetig differenzierbaren) Rotationsflächen und alle nichtausgearteten Mittelpunktsquadriken sind Liouvillesche Flächen mit den Krümmungslinien als Parameterkurven.

9. (Zu § 78). Man beweise: Bei einer Liouvilleschen Fläche (vgl. Übungsaufgabe 8.) sind die geodätischen Linien durch die Gleichung gegeben

$$\int \frac{du^1}{\sqrt{U_1(u^1) + a}} - \int \frac{du^2}{\sqrt{U_2(u^2) - a}} = b$$

$(a, b =$ Integrationskonstante), und leite daraus die Tatsache her, daß die geodätischen „Diagonalen" jedes „Parametervierecks" (vgl. Übungsaufgabe 10.) bei einer Liouvilleschen Fläche gleich lang sind.

10. (Zu § 107). Man beweise: Bei einer zweimal stetig differenzierbaren Fläche F: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ sind genau dann die Gegeneiten jedes „Parametervierecks" mit den Ecken $(u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$, $(u^1_{(0)} + h, u^2_{(0)})$, $(u^1_{(0)}, u^2_{(0)} + k)$, $(u^1_{(0)} + h, u^2_{(0)} + k)$ gleich lang, wenn (nach geeigneter Skalentransformation) $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = \cos 2\vartheta$ (2ϑ = Winkel der Parameterkurven) gilt (Parameternetz von Tschebyscheff!).

b) Bemerkungen

1. K. Zwirner bewies, daß jede analytische Fläche, bei welcher die geodätischen „Diagonalen" jedes „Parameternetzvierecks" (vgl. Übungsaufgabe 9.) gleich lang sind, eine Liouvillesche Fläche ist (Hamb. Abh. **5** (1927) 313—336).

2. (Zu § 78). W. Wunderlich untersuchte in mehreren Arbeiten die sogenannten „pseudogeodätischen Linien" einer Fläche, die dadurch gekennzeichnet sind, daß bei ihnen der Winkel zwischen Schmiegebene der Kurve und Tangentialebene der Fläche konstanten, von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Wert besitzt.

3. Verschiebt man alle Tangentenvektoren einer Fläche F in einem Punkt p längs einer von p ausgehenden und in p wieder endenden, stückweise stetig differenzierbaren Kurve parallel im Sinne von Levi-Civita (vgl. § 38), so erhält man eine Bewegung der Tangentialebene von F in p, da sich bei dieser Parallelverschiebung das innere Produkt zweier Tangentenvektoren nicht ändert. Alle so erhaltenen Bewegungen bilden eine Gruppe, die sogenannte „Holonomiegruppe" von F in p, die für die Untersuchung der „inneren Geometrie" von F von wesentlicher Bedeutung ist.

4. R. Sauer bemüht sich um eine Veranschaulichung differentialgeometrischer Sachverhalte an Hand finiter „differenzengeometrischer" Modelle (z. B. Approximation einer krummen Fläche durch ein Dreieckspolyeder und seine „Verknickungen"!) Siehe dazu etwa Elem. Math. **9** (1954) 121—131.

7. Kapitel

Fragen der Flächentheorie im Großen

§ 97. Begriff einer differentialgeometrischen Fläche

Bisher haben wir in der Flächentheorie stets nur solche Flächen betrachtet, welche eine (mindestens einmal stetig differenzierbare) Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2) \quad (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \neq 0) \tag{1}$$

mit Parametern u^1, u^2 *aus einem Parametergebiet U der u^1, u^2-Ebene* zulassen (vgl. § 41). Bei vielen Flächen ist aber eine derartige Darstellung nicht möglich, wie z.B. bei der Kugel. Wir werden nämlich im übernächsten Paragraphen sehen, daß auf der Kugel kein stetiges Feld von überall von Null verschiedenen Tangentenvektoren — wie es etwa das Feld der Tangentialvektoren $\mathfrak{x}_1$ im Falle der Darstellbarkeit (1) wäre — existieren kann. Tatsächlich besitzt die Darstellung der Kugel durch die sphärischen Koordinaten ϑ, φ, von Kap. 4 (10) auch die zwei singulären Stellen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, in welchen die Bedingung $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \neq 0$ verletzt ist.

Aus diesem Grund werden wir jetzt den Begriff „Fläche" allgemeiner fassen, indem wir eine solche, grob gesagt, *mittels mehrerer Parametergebiete, die sich im allgemeinen überlappen werden, „lokal" in der Form* (1) *darstellen.* Wir unterscheiden daher im folgenden zwischen den „Punkten" einer „Parametermannigfaltigkeit" M und den Punkten der Fläche, welche durch Abbildung von M in den dreidimensionalen euklidischen Raum entsteht. M sei dabei ein „bogenweise zusammenhängender, Hausdorffscher topologischer Raum"[1], der von einer abzählbaren Familie von „offenen" Teilmengen $O_{(\alpha)}$ $(\alpha \in A)$, den „Parametergebieten", überdeckt werde, welche alle mittels „topologischer", d.h. in beiden Richtungen eindeutiger und stetiger Abbildungen auf geeignete, einfach

---

[1] Die Grundzüge der allgemeinen Topologie finden sich etwa in Schubert, H.: Topologie, Stuttgart: Teubner 1964.

zusammenhängende Gebiete $U_{(\alpha)}$ des α-ten Exemplars der u^1, u^2-Ebene mit „Parametern" $u^1_{(\alpha)}$, $u^2_{(\alpha)}$ versehen werden können. Hierbei werde vorausgesetzt, daß für die gemeinsamen Punkte zweier Parametergebiete $O_{(\alpha_1)}$ und $O_{(\alpha_2)}$ (falls vorhanden) der Übergang von den Parametern $u^1_{(\alpha_1)}$, $u^2_{(\alpha_1)}$ zu den Parametern $u^1_{(\alpha_2)}$, $u^2_{(\alpha_2)}$ durch die k-mal stetig differenzierbare „Parametertransformation"

$$u^i_{(\alpha_2)} = f_i(u^1_{(\alpha_1)}, u^2_{(\alpha_1)}) \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

mit

$$\frac{\partial(u^1_{(\alpha_2)}, u^2_{(\alpha_2)})}{\partial(u^1_{(\alpha_1)}, u^2_{(\alpha_1)})} \neq 0 \tag{3}$$

geschieht ($k \geqq 1$). Wir nennen einen derartigen topologischen Raum M *„zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C_k"* bzw., falls die f_i in (2) sogar analytisch sind, *„zweidimensionale analytische Mannigfaltigkeit"*. M heißt *„orientierbar"*, falls die $O_{(\alpha)}$ so gewählt werden können, daß an Stelle von (3) sogar

$$\frac{\partial(u^1_{(\alpha_2)}, u^2_{(\alpha_2)})}{\partial(u^1_{(\alpha_1)}, u^2_{(\alpha_1)})} > 0 \tag{4}$$

gilt, anderenfalls nennen wir M *„nichtorientierbar"*. Für manche Überlegungen ist es wichtig, daß M ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch eine geeignete Menge von Punkten und zwischen diesen Punkten verlaufende (in bezug auf irgendwelche Parameter $u^i_{(\alpha)}$!) k-mal stetig differenzierbare Kurvenbogen so in die topologischen Bilder von Dreiecken aufgeteilt, d.h. *kurz gesagt „trianguliert" werden kann*[1], daß jeder dieser Punkte Ecke von nur endlich vielen (krummen) Dreiecken ist. Durch diese „Triangulation" wird M ein sogenannter „simplizialer Komplex". M ist genau dann orientierbar, falls sich für die drei Randbogen jedes Dreiecks ein solcher Durchlaufungssinn angeben läßt, daß dieselben für jeden gemeinsamen Randbogen zweier angrenzender Dreiecke entgegengesetzt sind. Weiter ist M genau dann *„kompakt"* oder *„geschlossen"*, d.h. genau dann besitzt jede unendliche Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt, falls die Triangulation von M aus endlich vielen Dreiecken besteht.

Bei gegebener zweidimensionaler differenzierbarer Parametermannigfaltigkeit der Klasse C_k bzw. analytischer Parametermannigfaltigkeit M mit den Parametergebieten $O_{(\alpha)}$ ($\alpha \in A$) heißt jetzt eine Abbildung von M in den dreidimensionalen euklidischen Raum mit den kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 „k-mal stetig differenzierbar" bzw.„analytisch", falls dabei jedes x_ν ($\nu = 1, 2, 3$) k-mal stetig differenzierbar bzw. analy-

[1] Vgl. Munkres, J.: Elementary differential topology, Princeton Univ. 1963, S. 101.

tisch von den Parametern $u^1_{(\alpha)}, u^2_{(\alpha)}$ eines beliebigen $O_{(\alpha)}$ abhängt. Diese Abbildung läßt sich explizit in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{(\alpha)}(u^1_{(\alpha)}, u^2_{(\alpha)}) \quad (\alpha \in A) \tag{5}$$

schreiben. Sie heißt „*differentialgeometrische Fläche der Klasse* C_k" bzw. „*analytische Fläche*" F, wenn überall zusätzlich

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^1_{(\alpha)}} \times \frac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^2_{(\alpha)}} \neq 0 \tag{6}$$

gilt. Diese Bedingung bedeutet geometrisch, daß die Abbildung F lokal umkehrbar ist, da nach (6) mindestens eine der drei Komponenten des linksstehenden Vektorprodukts, eine Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_{(\alpha)\nu_1}, x_{(\alpha)\nu_2})}{\partial(u^1_{(\alpha)}, u^2_{(\alpha)})} \quad (1 \leqq \nu_1 < \nu_2 \leqq 3)$$

von Null verschieden ist. Dagegen ist es durchaus möglich, daß die Abbildung F als Ganzes nicht umkehrbar ist, d.h. daß verschiedene Punkte von M dasselbe Bild besitzen. Die Fläche F besitzt dann eine „Selbstdurchdringung", und diese mehrfach angenommenen Bildpunkte werden entsprechend mehrfach gezählt. F heißt genau dann „*orientierbar*", falls M orientierbar ist. In diesem Fall ist nämlich wegen (4) die Richtung des Vektorprodukts in (6) parameterunabhängig, desgleichen der Einheitsnormalenvektor

$$\mathfrak{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^1_{(\alpha)}} \times \dfrac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^2_{(\alpha)}}}{\left| \dfrac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^1_{(\alpha)}} \times \dfrac{\partial \mathfrak{x}_{(\alpha)}}{\partial u^2_{(\alpha)}} \right|}. \tag{7}$$

In der Flächentheorie „im Großen" beschäftigt man sich speziell mit zwei Arten von differentialgeometrischen Flächen der Klasse C_k $(k \geqq 3)$, nämlich den „*geschlossenen Flächen*", d.h. den Flächen mit kompakter Parametermannigfaltigkeit M, und den „*vollständigen Flächen*". Letztere können dadurch definiert werden, daß die durch

$$d(p, q) = \inf L(C) \tag{8}$$

$(p,q \in M; L(C) =$ Länge eines beliebigen stetig differenzierbaren, $F(p)$ und $F(q)$ verbindenden Flächenkurvenbogens $C)$

auf M definierte „innere Flächenmetrik" vollständig ist, d.h. daß jede „Cauchyfolge" $\{p_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ mit $d(p_i, p_j) < \varepsilon$ für alle $i, j > N(\varepsilon)$ $(\varepsilon =$ bel. $> 0)$ konvergiert. Die vollständigen Flächen haben die kennzeichnende Eigenschaft, daß jede geodätische Linie unendlich lang ist[1].

[1] Siehe hierzu Hopf, H., Rinow, W.: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Commentarii Mat. Helv. 3, 209–225 (1931).

Nach ihrer Definition sind die geschlossenen Flächen immer vollständig. Es gibt aber auch nicht geschlossene, vollständige Flächen wie etwa die euklidische Ebene, bei welcher die innere Flächenmetrik mit der euklidischen Metrik übereinstimmt, so daß ihre Vollständigkeit aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen resultiert. Vollständige Flächen können nicht „Teil" einer anderen Fläche sein, da es anderenfalls auf ihnen geodätische Linien gäbe, die sich über die größere Fläche hinaus verlängern lassen und somit innerhalb der kleineren Fläche nur endliche Länge besitzen[1]. *Da es sich aus diesem Grunde bei den vollständigen (und damit insbesondere bei den geschlossenen) Flächen immer um nicht fortsetzbare Flächen, d.h. Flächen in ihrer Gesamterstreckung handelt, nennt man die Theorie dieser Flächen „Flächentheorie im Großen" im Gegensatz zur sonstigen „Flächentheorie im Kleinen".* Zum Schluß dieses Paragraphen geben wir zwei Beispiele für geschlossene analytische Flächen an.

1. *Kugel vom Radius R (und Mittelpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).* Als Parametergebiete wähle man zwei Gebiete, die die abgeschlossene „obere" bzw. „untere" Halbkugel $x_3 \geqq 0$ und $x_3 \leqq 0$ enthalten, aber nur wenig überragen. Diese können durch „stereographische Projektion" vom „Südpol" $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -R$ bzw. vom „Nordpol" $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = +R$ auf die „Äquatorebene" $x_3 = 0$ mit den kartesischen Koordinaten $u^1 = x_1$, $u^2 = x_2$ parametrisiert werden, woraus die explizite analytische Parameterdarstellung der Kugel

$$x_1 = \frac{2u^1_{(\alpha)} R^2}{R^2 + (u^1_{(\alpha)})^2 + (u^2_{(\alpha)})^2}, \qquad x_2 = \frac{2u^2_{(\alpha)} R^2}{R^2 + (u^1_{(\alpha)})^2 + (u^2_{(\alpha)})^2},$$

$$x_3 = (-1)^{\alpha-1} \, R \frac{R^2 - (u^1_{(\alpha)})^2 - (u^2_{(\alpha)})^2}{R^2 + (u^1_{(\alpha)})^2 + (u^2_{(\alpha)})^2}$$

$$\left((u^1_{(\alpha)})^2 + (u^2_{(\alpha)})^2 < R^2 + \varepsilon, \, (\varepsilon > 0), \alpha = 1, 2\right)$$

folgt. Die Parametertransformationsformel lautet hierbei

$$u^i_{(2)} = \frac{R^2}{(u^1_{(1)})^2 + (u^2_{(1)})^2} u^i_{(1)} \qquad (i = 1, 2)$$

$$\left(\frac{R^4}{R^2 + \varepsilon} < (u^1_{(1)})^2 + (u^2_{(1)})^2 < R^2 + \varepsilon\right).$$

2. *(Horizontal gelegener) Torus mit den Radien R und r, $R > r$ (und Mittelpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).* Hier findet man durch elementare Rechnung unmittelbar die analytische Parameterdarstellung

$$x_1 = (R + r \cos u^1_{(\alpha)}) \cos u^2_{(\alpha)}, \qquad x_2 = (R + r \cos u^1_{(\alpha)}) \sin u^2_{(\alpha)},$$

$$x_3 = r \sin u^1_{(\alpha)},$$

[1] Siehe Fußnote 1 auf S. 239.

wobei etwa vier (jede sich selbst nicht überlappende) Parametergebiete durch die Ungleichungen

$$-\varepsilon < u^1_{(1)} < \pi + \varepsilon,\ -\varepsilon < u^2_{(1)} < \pi + \varepsilon;$$
$$\pi - \varepsilon < u^1_{(2)} < 2\pi + \varepsilon,\ -\varepsilon < u^2_{(2)} < \pi + \varepsilon;$$
$$-\varepsilon < u^1_{(3)} < \pi + \varepsilon,\ \pi - \varepsilon < u^2_{(3)} < 2\pi + \varepsilon;$$
$$\pi - \varepsilon < u^1_{(4)} < 2\pi + \varepsilon,\ \pi - \varepsilon < u^2_{(4)} < 2\pi + \varepsilon$$

ausgezeichnet werden können. Die Parametertransformationsformeln haben hierbei die Form

$$u^i_{(\alpha)} \equiv u^i_{(\beta)} \bmod 2\pi \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \alpha \neq \beta, i = 1, 2)$$

in den Überlappungsgebieten der Parametergebiete.

§ 98. Gesamtkrümmung geschlossener Flächen

Auf Grund von § 7 (32) und eines Satzes der Topologie[1] gilt für die „*Gesamtkrümmung*" $\oint k\, ds$ einer „im positiven Sinne" durchlaufenen (vgl. § 85), geschlossenen ebenen Kurve C ohne mehrfache Punkte

$$\oint k\, ds = \oint \frac{d\tau}{ds}\, ds = 2\pi \tag{9}$$

(τ = Winkel zwischen x_1-Achse und Tangentenrichtung von C!).

Dieselbe hängt also gar nicht von der Gestalt der Kurve selbst ab. Wir wollen ein Analogon dieser Formel für geschlossene Flächen F (der Klasse C_3) des euklidischen Raums aufstellen, welche wir zunächst zusätzlich noch als orientierbar voraussetzen. Dabei soll an die Stelle der ebenen Kurvenkrümmung k die Gaußsche Flächenkrümmung K und an die Stelle des Bogenelements ds das Oberflächenelement do treten. Es handelt sich daher um Gewinnung einer Formel für die „*Gesamtkrümmung*" $\iint_M K\, do$ von F.

Zu diesem Zweck denken wir uns M und damit auch F nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen „trianguliert". Dabei läßt sich durch geeignete fortgesetzte „Normalunterteilung" der Triangulation (s. Fig. 18!) stets erreichen, daß jedes „Dreieck" Δ_l ($l = 1, \ldots, f$) auf M ganz innerhalb eines geeigneten (einfach zusammenhängenden) Parametergebietes $U_{(\alpha)}$ von M zu liegen kommt[2]. Jetzt läßt sich nach § 86 auf dieses Dreieck die verallgemeinerte Formel (78) von Gauß-Bonnet anwenden, nach welcher

$$\iint_{\Delta_l} K\, do = 2\pi - \int_{\partial \Delta_l} \frac{ds}{\varrho_g} - \sum_{\nu_l=1}^{3} \omega_{\nu_l} \tag{10}$$

[1] Siehe Fußnote 1 auf S. 215.

[2] Vgl. Franz, W.: Topologie I, Sammlung Göschen, 1960, Satz 24.2.

ist. Ersetzt man hierbei die „Außenwinkel" ω_{ν_l} von Δ_l durch die „Innenwinkel" $\alpha_{\nu_l} = \pi - \omega_{\nu_l}$ $(\nu_l = 1, 2, 3)$, so haben wir

$$\iint_{\Delta_l} K\, do = 2\pi - \int_{\partial\Delta_l} \frac{ds}{\varrho_g} - 3\pi + \sum_{\nu_l=1}^{3} \alpha_{\nu_l}. \tag{11}$$

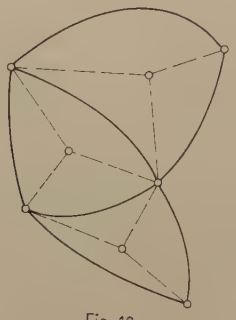


Fig. 18.

Addition dieser Formeln für alle f-Dreiecke auf M liefert, da sich hierbei wegen der Orientierbarkeit von M die Randintegrale paarweise wegheben (die geodätische Krümmung wechselt nämlich nach § 33 bei Änderung des Durchlaufungssinnes ihr Vorzeichen) und die Außenwinkel zu e-mal 2π aufaddieren (e = Eckenzahl der Triangulation):

$$\iint_M K\, do = 2\pi f - 3\pi f + 2\pi e. \tag{12}$$

Berücksichtigen wir noch die Tatsache, daß die doppelte Kantenzahl k der Triangulation offenbar gleich der dreifachen Dreiecksanzahl ist

$$2k = 3f, \tag{13}$$

so finden wir schließlich das gesuchte Analogon von (9):

$$\boxed{\iint_M K\, do = 2\pi(f - k + e) = 2\pi\chi}, \tag{14}$$

worin wir die Wechselsumme von Ecken-, Kanten- und Flächenanzahl der Triangulation von M mit χ abgekürzt haben:

$$\chi = e - k + f. \tag{15}$$

Die Gleichung (14) hat die eigentümliche Konsequenz, daß diese Wechselsumme für jede Triangulation von M dieselbe ist, weil sie sich bei Normalunterteilung der Triangulation offensichtlich nicht ändert (Beweis rekursiv) und schließlich durch (14) berechnet werden kann. *Sie ist also eine „topologische Invariante" der Parametermannigfaltigkeit, die sogenannte „Eulersche Charakteristik" von M*, welche nicht von der Gestalt

der Abbildung F abhängt. Im Falle einer Kugel als Parametermannigfaltigkeit (Dreiecksnetz s. Fig.19!) bzw. eines Torus als Parametermannigfaltigkeit (Dreiecksnetz s. Fig.20!) wird $\chi = 5 - 9 + 6 = 2$ bzw.

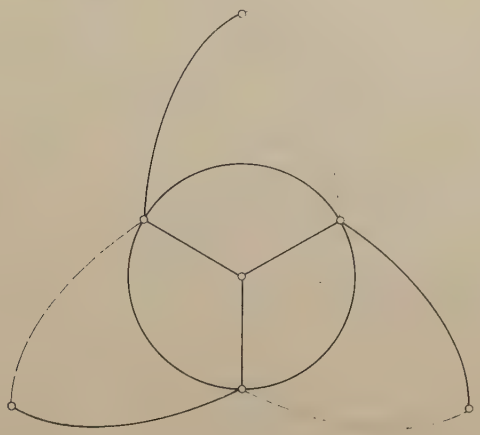


Fig. 19.

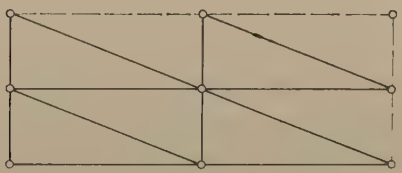


Fig. 20.

$\chi = 4 - 12 + 8 = 0$. Allgemeiner gilt nach einem bekannten Satz der Flächentopologie, daß jede geschlossene zweidimensionale orientierbare Parametermannigfaltigkeit M auf eine Kugel mit h aufgesetzten „Henkeln" (Fig. 21 für $h = 2$) topologisch abgebildet werden kann

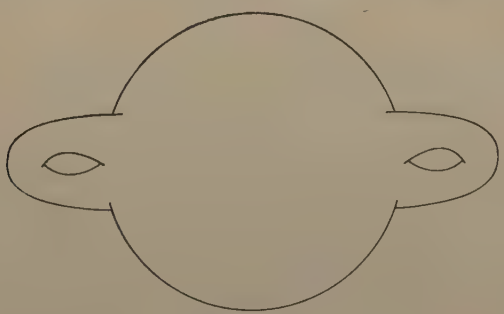


Fig. 21.

($h \geqq 0$), wobei die Charakteristik von M mit dem „Geschlecht" h von M durch die Beziehung

$$\chi = 2 - 2h \tag{16}$$

verknüpft ist[1]. Die als Beispiele genannten Mannigfaltigkeiten Kugel und Torus sind also vom Geschlecht 0 bzw. 1. Die Formel (16) kann man sich etwa dadurch veranschaulichen, daß man jeden der h Henkel auf der Kugel durch eine geschlossene Kurve aufschneidet. Dadurch entsteht topologisch eine Kugel mit $2h$ „Löchern", welche durch $2h - 1$, je zwei Löcher verbindende „Querschnitte" zu einem einfach zusammenhängenden Flächenstück aufgeschnitten werden kann (vgl. Fig. 22), auf welches

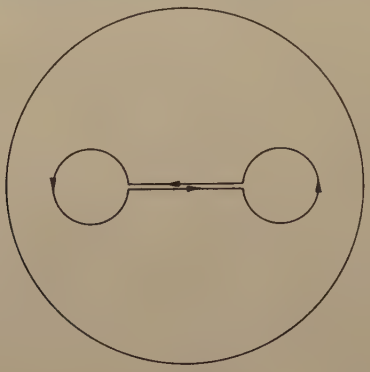


Fig. 22.

die verallgemeinerte Gauß-Bonnetsche Integralformel Kap. 6 (78) anwendbar ist. Hierbei heben sich alle Randintegrale paarweise weg, und jeder Querschnitt ergibt zur Außenwinkelsumme den Beitrag 2π, so daß in Übereinstimmung mit (14) und (16)

$$\iint_M K\, do = 2\pi - (2h - 1)\, 2\pi = 2\pi(2 - 2h) \tag{17}$$

ist.

Es sei nun M eine nichtorientierbare, geschlossene, zweidimensionale Parametermannigfaltigkeit mit einer Triangulation unserer Art und der Charakteristik χ. Wir nehmen jedes Dreieck davon doppelt mit verschiedenem Durchlaufssinn seines Randes und denken uns jeweils zwei verschiedene Dreiecke genau dann aneinandergeheftet, wenn sie an einer Seite mit verschiedenem Durchlaufungssinn aneinandergrenzen. Dadurch ergibt sich eine triangulierte, zusammenhängende, orientierbare und geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\hat{M}$, welche jedes Dreieck

[1] Siehe dazu Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie, Leipzig: Teubner 1934, S. 141.

von M genau zweimal mit verschiedenem Durchlaufungssinn enthält, d.h. eine sogenannte „zweifache Überlagerung" von M darstellt. Trivialerweise gilt jetzt für die Charakteristik $\hat{\chi}$ von $\hat{M}$

$$\hat{\chi} = 2\chi. \tag{18}$$

Außerdem haben wir, weil K nach § 44 nicht von der Orientierung von F oder der Richtung von $\mathfrak{n}$ abhängt:

$$\iint_{\hat{M}} K\, do = 2 \iint_{M} K\, do. \tag{19}$$

Aus der Gültigkeit von (14) *für* $\hat{M}$ *folgt wegen* (18) *und* (19) *also auch die Gültigkeit von* (14) *für eine nichtorientierbare geschlossene Fläche.* Nach einem Satz der Flächentopologie kann jedes zweidimensionale, nichtorientierbare, geschlossene M auf eine Kugel mit k aufgesetzten „Kreuzhauben" (s. Fig. 23) topologisch abgebildet werden ($k \geqq 1$), und dies

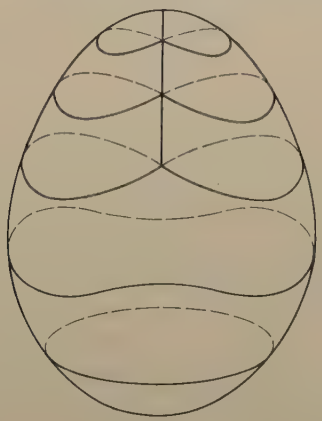


Fig. 23.

„Geschlecht" k von M errechnet sich durch die Formel[1]

$$\chi = 2 - k. \tag{20}$$

Für ein nichtorientierbares M gilt daher an Stelle von (17)

$$\iint_{M} K\, do = 2\pi(2 - k). \tag{21}$$

Ein Beispiel einer solchen Mannigfaltigkeit mit $k = 1$ stellt die Einheitshalbkugel dar, bei der die zum Mittelpunkt diametral liegenden Punkte des Randäquators miteinander verheftet sind. Sie wird von der Einheitskugel selbst zweifach überlagert (Identifikation der Diametralpunkte!)

[1] Siehe dazu Fußnote 1 auf S. 244.

und stellt ein Modell der projektiven Ebene (deren Punkten bekanntlich die durch einen festen Punkt gehenden Geraden des Raums entsprechen) dar. Die innere Flächenmetrik (8) stimmt hier mit der Winkelmetrik der elliptischen bzw. sphärischen Geometrie überein, und wir haben in dieser „elliptischen Ebene" und der Einheitssphäre zwei Mannigfaltigkeiten derselben konstanten Krümmung $K = 1$ gefunden, die zwar lokal, aber wegen ihrer topologischen Verschiedenheit nicht global isometrisch sind (vgl. § 82!).

§ 99. Die Indexsummenformel Poincarés

Die Eulersche Charakteristik χ der Parametermannigfaltigkeit M einer geschlossenen, orientierbaren Fläche F hängt nicht nur nach (14) mit der Gesamtkrümmung von F, sondern auch, wie H. Poincaré zuerst bemerkt hat[1], mit den Singularitäten von stetigen „Richtungsfeldern" auf F zusammen. Besitzt F die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)^{((2))},$$

so kann ein derartiges Richtungsfeld durch ein Feld von Tangenteneinheitsvektoren

$$\mathfrak{v} = v^i \mathfrak{x}_i, \quad \mathfrak{v}^2 = g_{ij} v^i v^j = 1 \tag{22}$$

von F mit stetig von den Flächenparametern abhängenden Komponenten v^i $(i = 1, 2)$ definiert werden.

Ist die Darstellung (22) eines Richtungsfeldes $\mathfrak{v}$ zwar in allen Punkten einer Umgebung O eines festen Flächenpunktes p, aber nicht im Punkt p selbst möglich, so spricht man von einer *„isolierten Singularität" von $\mathfrak{v}$ im Punkt p*.

Wir wollen nun einer solchen isolierten Singularität des Richtungsfeldes eine ganze Zahl j als „Index" zuordnen. Zu diesem Zweck betrachten wir eine einfach geschlossene, stetige Flächenkurve C in der betrachteten, o.B.d.A. als einfach zusammenhängend vorausgesetzten Umgebung O von p, welche p (bezüglich der Parameterebene) in ihrem „Inneren" enthält, welches sie im „positiven Sinne" (vgl. § 85!) durchläuft. In jedem Punkt von C bildet $\mathfrak{v}$ einen (bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmten) Winkel ϑ mit der $u^1_{(\alpha)}$-Richtung, falls wir noch o.B.d.A. die betrachtete Umgebung O von p ganz durch die zu einem geeigneten $O_{(\alpha)}$ gehörenden Parameter $u^1_{(\alpha)}$, $u^2_{(\alpha)}$ parametrisiert denken. Setzen wir nun längs C diesen Winkel ϑ stetig fort, so erfährt er bei einer einmaligen Durchlaufung von C eine eindeutig bestimmte Änderung um das ganzzahlige Vielfache $j^O_{(\alpha)}(C) \cdot 2\pi$ von 2π.

[1] Siehe Poincaré, H.: Journ. Math. Pure Appliqué **4**, Ser. I, 203–208 (1885).

((2)) Der Einfachheit halber wird im folgenden der Index α der Parametergebiete im allgemeinen weggelassen.

Die hierbei auftretende ganze Zahl $j^O_{(\alpha)}(C)$ *hängt nicht von der Wahl von* C *ab.* Sind nämlich C_j $(j = 0, 1)$ zwei derartige in O verlaufende Kurven mit der durch eine orientierungserhaltende topologische Hilfsabbildung von O auf die ganze v^1, v^2-Ebene entstehenden Parameterdarstellung[1]

$$(23) \quad v^1 = v^1_{(0)} + r_j(t)\cos\varphi_j(t),\ v^2 = v^2_{(0)} + r_j(t)\sin\varphi_j(t) \quad (j = 0, 1)$$

$$(r_j > 0,\ r_j(t+T) = r_j(t)\ (T > 0),\ v^1_{(0)}, v^2_{(0)} = \text{Parameter von } \mathfrak{p})$$

mit stetigen Funktionen r_j und φ_j, so besitzen sie bekanntlich bezüglich $\mathfrak{p}$ die „Windungszahl" 1, d.h. es gilt

$$(24) \qquad \varphi_j(t+T) = \varphi_j(t) + 2\pi \quad (j = 0, 1)\ ^{((2))}.$$

Aus diesem Grund läßt sich C_0 mit C_1 durch die folgende, von einem reellen Parameter τ stetig abhängige Schar von stetigen, in O verlaufenden Kurven C_τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ verbinden:

$$(25) \quad \begin{aligned} v^1 &= v^1_{(0)} + \big((1-\tau)\,r_0(t) + \tau r_1(t)\big)\cos\big((1-\tau)\varphi_0(t) + \tau\varphi_1(t)\big) \\ v^2 &= v^2_{(0)} + \big((1-\tau)\,r_0(t) + \tau r_1(t)\big)\sin\big((1-\tau)\,\varphi_0(t) + \tau\varphi_1(t)\big), \end{aligned}$$

welche wegen

$$(1-\tau)\,r_0(t+T) + \tau r_1(t+T) = (1-\tau)\,r_0(t) + \tau r_1(t) > 0$$

$$(1-\tau)\,\varphi_0(t+T) + \tau\varphi_1(t+T) = (1-\tau)\,\varphi_0(t) + \tau\varphi_1(t) + 2\pi,$$

alle (nicht notwendig einfach) geschlossen sind und den Punkt $\mathfrak{p}$ nicht enthalten. Für alle diese Kurven läßt sich nun $j^O_{(\alpha)}(C_\tau)$ analog wie für C_0 und C_1 definieren und hängt daher offensichtlich wie C_τ von τ stetig ab. Andererseits stellt $j^O_{(\alpha)}(C_\tau)$ immer eine ganze Zahl dar, so daß es also eine konstante Funktion von τ sein muß:

$$(26) \qquad j^O_{(\alpha)}(C_\tau) = \text{const} = j^O_{(\alpha)}(C_0) = j^O_{(\alpha)}(C_1).$$

Damit können wir in Zukunft der Einfachheit halber $j^O_{(\alpha)}(C) = j^O_{(\alpha)}$ schreiben.

Wir zeigen jetzt weiter, *daß* $j^O_{(\alpha)}$ *auch nicht von der Wahl der Umgebung* O *von* $\mathfrak{p}$ *abhängt.* Sind nämlich O_1 und O_2 zwei derartige (in $O_{(\alpha)}$ gelegene) Umgebungen mit einem in ihrer Vereinigung $O_1 \cup O_2$ mit Ausnahme von $\mathfrak{p}$ stetigen Richtungsfeld $\mathfrak{v}$, so wähle man im Durchschnitt $O_1 \cap O_2$ dieser Umgebungen eine einfach zusammenhängende Umgebung O_3 von $\mathfrak{p}$ sowie darin wie im vorigen Absatz eine Kurve C und findet unmittelbar

$$(27) \qquad j^{O_1}_{(\alpha)} = j^{O_1}_{(\alpha)}(C) = j^{O_3}_{(\alpha)}(C) = j^{O_2}_{(\alpha)}(C) = j^{O_2}_{(\alpha)}.$$

Wir schreiben daher in Zukunft $j^O_{(\alpha)} = j_{(\alpha)}(\mathfrak{p})$.

---

[1] Zur Existenz einer solchen Hilfsabbildung siehe M. Newman: Topology of plane sets of points, Cambridge Univ. Press 1951, S. 149.

((2)) Vgl. Fußnote 1 von S. 215.

Schließlich läßt sich beweisen, *daß $j_{(\alpha)}(p)$ auch von der Wahl des Parametersystems $(u^1_{(\alpha)}, u^2_{(\alpha)})$ unabhängig ist.* Zu diesem Zweck nehmen wir eine einfach geschlossene, *stetig differenzierbare* Kurve C in einer in $O_{(\alpha_1)} \cap O_{(\alpha_2)}$ gelegenen Umgebung O von p zu Hilfe und beachten, daß sich nach dem in § 85 Gesagten der Winkel, den die (gerichtete) Tangente von C mit der $u^1_{(\alpha_1)}$-Richtung bzw. mit der $u^1_{(\alpha_2)}$-Richtung bildet, bei einer positiven Durchlaufung von C genau um 2π ändert. Aus diesem Grunde ergibt sich für die Änderung des Winkels ψ zwischen der Tangente von C und $\mathfrak{v}$ bei einem positiven Umlauf von C der Wert

$$\psi(t+T) - \psi(t) = j_{(\alpha_1)}(p) \cdot 2\pi - 2\pi = j_{(\alpha_2)}(p) \cdot 2\pi - 2\pi, \tag{28}$$

d.h. $j_{(\alpha)}(p)$ ist in der Tat auch von α unabhängig: $j_{(\alpha)}(p) = j(p)$. *Wir nennen die ganze Zahl $j(p)$ im folgenden „Index" der isolierten Singularität p von $\mathfrak{v}$.* Nach Definition von $j(p)$ ist klar, daß dieser Index verschwindet, wenn p nur eine „uneigentliche" Singularität von $\mathfrak{v}$ ist, d.h., wenn sich $\mathfrak{v}$ stetig in den Punkt p hinein fortsetzen läßt.

Sei nun durch (22) auf unserer geschlossenen, orientierbaren Fläche F ein stetiges Vektorfeld $\mathfrak{v}$ mit nur endlich vielen Singularitäten $p_1, \ldots, p_n$ gegeben. Wir wollen die Indexsumme $\sum_{\nu=1}^{n} j(p_\nu)$ berechnen. Dazu denken wir uns M nach § 97 so trianguliert, daß jedes Dreieck Δ_l $(l = 1, \ldots, f)$ in einer Parameterumgebung $O_{(\alpha)}$ liegt und alle p_ν jeweils ins Innere genau eines Dreiecks der Triangulation zu liegen kommen[1]. Wegen der Orientierbarkeit von M kann jedes Δ_l mit einem „positiven" Umlaufsinn versehen werden derart, daß diese Durchlaufungssinne auf gemeinsamen Seiten zweier Dreiecke entgegengesetzt sind. Wir wissen wegen (28), daß für die Änderung des Winkels ψ zwischen Tangentenrichtung der (orientierten) Randkurve von Δ_l und $\mathfrak{v}$ bei einem positiven Umlauf dieser Randkurve

$$\Delta\psi \Big|_{\partial\Delta_l} = \begin{cases} (j(p_\nu) - 1)\, 2\pi, & \text{falls } p_\nu \in \Delta_l \\ -2\pi, & \text{falls kein } p_\nu \in \Delta_l \end{cases} \tag{29}$$

gilt. Addition dieser Beziehung für alle Dreiecke der Triangulation ergibt:

$$\sum_{l=1}^{f} \Delta\psi \Big|_{\partial\Delta_l} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} j(p_\nu) - f \right) 2\pi. \tag{30}$$

Bei der linksstehenden Summe (30) heben sich alle von der Durchlaufung der (stetig differenzierbaren) Randseiten herrührenden Anteile der $\Delta\psi \Big|_{\partial\Delta_l}$ paarweise weg, und es bleibt infolgedessen bei jedem Summanden nur der von den Außenwinkeln $\omega_{\nu_l} = \pi - \alpha_{\nu_l} (\nu_l = 1, 2, 3)$ von Δ_l herrüh-

[1] Dies läßt sich durch eine kleine Abänderung der Triangulation stets erreichen!

rende Anteil $-\sum_{\nu_l=1}^{3} \omega_{\nu_l}$ übrig. Daher haben wir wegen der schon im vorigen Paragraphen benützten Beziehung $\sum_{l=1}^{f}\left(\sum_{\nu_l=1}^{3} \alpha_{\nu_l}\right) = e \cdot 2\pi$ und (13):

(31)

$$\sum_{l=1}^{f} \Delta\psi \Big|_{\partial\Delta_l} = \sum_{l=1}^{f}\left(\sum_{\nu_l=1}^{3} - \omega_{\nu_l}\right) = -3f \cdot \pi + \sum_{l=1}^{f}\left(\sum_{\nu_l=1}^{3} \alpha_{\nu_l}\right) = -2k \cdot \pi + 2 \cdot e\pi,$$

und der Vergleich von (30) mit (31) ergibt zusammen mit (15) und (16) die wichtige „Indexformel" Poincarés:

(32) $$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} j(p_\nu) = \chi = 2 - 2h}.$$

Diese sagt also aus, *daß die Indexsumme eines punktweise singulären stetigen Richtungsfeldes* $\mathfrak{v}$ *auf einer orientierbaren geschlossenen Fläche gar nicht von dem Richtungsfeld* $\mathfrak{v}$ *abhängt, sondern wie die (mit ihr übereinstimmende) Eulersche Charakteristik* χ *eine topologische Invariante der Parametermannigfaltigkeit der Fläche ist.*

Hat man auf F kein stetiges „Richtungsfeld" sondern ein stetiges „Linienelementfeld", d.h., ein stetiges Feld „ungerichteter" Tangenten von F, so kann dafür beim Vorliegen einer isolierten Singularität p auf die gleiche Weise wie bei einem Richtungsfeld ein „Index" $j(p)$ definiert werden, indem man wieder die Winkeländerung der Tangenten des Feldes mit der $u^1_{(\alpha)}$-Richtung längs einer einfach geschlossenen, stetigen und p in ihrem Inneren enthaltenden Flächenkurve C betrachtet. Da ein Winkel ungerichteter Graden aber nur mod π eindeutig bestimmt ist, *kann* $j(p)$ *jetzt „halbzahlig", d.h., ein Bruch mit dem Nenner* 2 *werden. Gleichwohl läßt sich durch stetige Fortsetzung künstlicher „Orientierungen" der Tangenten eines solchen Feldes die Gültigkeit der Poincaréschen Indexformel* (32) *für ein Linienelementfeld mit den gleichen Methoden wie bei einem Richtungsfeld einsehen.* In der Praxis hat man es häufig mit den Tangentenfeldern von ein oder zwei einparametrigen stetig differenzierbaren Flächenkurvenscharen als Linienelementfeldern zu tun; man spricht daher beim Vorliegen einer Singularität in einem Punkt auch vom „Index" einer derartigen Flächenkurvenschar. In Fig. 24a, b, c sind solche Kurvenscharen mit den Indizes ihrer Singularitäten angegeben.

Ein wichtiges Korollar der Poincaréschen Indexsummenformel ist der Satz, *daß durchweg stetige Richtungs- bzw. Linienelementfelder nur auf orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht* 1, *d.h., Flächen „vom Typ des Torus" auftreten können.* So bilden z.B. die u^1- und u^2-Richtungen des Torus in § 97 je ein stetiges Richtungsfeld, während das Tangenten-

feld der Meridiane der Kugel in § 97 im Nord- und Südpol der Kugel in Übereinstimmung mit (32) eine Singularität vom Index 1 besitzt. Eine wichtige Folgerung des eben angegebenen Korollars ist die Tatsache, *daß jede geschlossene, orientierbare Fläche F (der Klasse C_3) mit einem von 1 verschiedenen Geschlecht h mindestens einen Nabelpunkt besitzt.* Andernfalls bildeten nämlich etwa die zur größeren Hauptkrümmung gehörenden Krümmungslinien eine singularitätenfreie Kurvenschar auf F (vgl. § 46). H. Hamburger und G. Bol konnten unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen für Flächen mit $K > 0$, d.h. insbesondere nach (17) $h = 0$ sogar die Existenz zweier verschiedener Nabelpunkte nachweisen[1]. Dies ist optimal, wie das Beispiel des Rotationsellipsoids mit genau zwei Nabelpunkten zeigt. Der Torus $h = 1$ von § 97 ist dagegen nabelpunktfrei.

Fig. 24.

§ 100. Geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung

Wie wir im nächsten Kapitel dieses Buches sehen werden, sind die Lösungen des „isoperimetrischen Problems" des Raumes, nämlich die Flächen (der Klasse C_2), welche bei gegebener Oberfläche den größten Rauminhalt begrenzen, geschlossene orientierbare Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung. Mit anderen Methoden werden wir finden, daß die Lösungen des isoperimetrischen Problems Kugeln sind. Es erhebt sich daher das folgende Problem: *Sind die Kugeln die einzigen geschlossenen orientierbaren Flächen der Klasse C_2 mit konstanter mittlerer Krümmung?* Dieses Problem ist bis heute ungelöst. Dagegen konnte A. D. Aleksandrow diese Frage unter der zusätzlichen Voraussetzung des Fehlens von Selbstdurchdringungen der Fläche positiv beantworten[2], nachdem dies schon 1900 H. Liebmann unter der weit einschränkenderen Vorausset-

[1] Siehe Hamburger, H.: Annals of math. **II**, 41 u. 63—86 (1940), Acta math. **73**, 174—332 (1941) und Bol, G.: Math. Zeitschrift **49**, 389—410 (1943).

[2] Siehe Aleksandrow, A. D.: Vestnik Leningrad, Univ. **13**, 5—8 (1958) und Amer. Math. Soc. Translation **II 21**, 412—416 (1962).

zung (s. § 102!) $K > 0$ (sowie stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) getan hatte[1]. Wir beweisen hier den folgenden „H-Satz" nach H. Hopf, der das Liebmannsche Resultat als Spezialfall enthält:

Die einzigen geschlossenen, orientierbaren Flächen der Klasse C_3 vom Geschlecht 0 mit konstanter mittlerer Krümmung sind die Kugeln[2]. Wir zeigen zunächst, daß es genügt, den folgenden „*lokalen Satz*" zu beweisen:

Es sei F' ein Flächenstück der Klasse C_3 mit konstanter mittlerer Krümmung H, das nicht aus lauter Nabelpunkten besteht. Dann ist ein etwaiger Nabelpunkt p von F' stets „isoliert" (d.h. p besitzt eine Umgebung O mit p als einzigem Nabelpunkt), und der Index $j(p)$ der (etwa zur größeren Hauptkrümmung $\frac{1}{R_1}$ von F' gehörenden) Krümmungslinienschar (vgl. § 46) in p ist negativ.

Wäre nämlich F eine von einer Kugel verschiedene, geschlossene, orientierbare Fläche der Klasse C_3 vom Geschlecht Null und mit konstantem H, so könnte diese auf Grund von § 47 nicht aus lauter Nabelpunkten bestehen. Andererseits ist nach dem am Schluß des vorigen Paragraphen Gesagten die Nabelpunktmenge N von F auch nicht leer. N kann keine inneren Punkte besitzen, da sonst eine stetige Verbindungskurve von einem solchen Punkt zu einem nicht zu N gehörenden Punkt im Widerspruch zum lokalen Satz einen nicht isolierten Randpunkt von N enthielte. Nach dem lokalen Satz kann also N nur aus isolierten Punkten bestehen, und zwar nur aus endlich vielen Punkten p_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), da diese sonst wegen der Kompaktheit der Fläche einen Punkt von N als Häufungspunkt besäßen. Damit läßt sich die Poincarésche Indexsummenformel anwenden, nach welcher auf Grund des lokalen Satzes

$$2 - 2h = \sum_{\nu=1}^{n} j(p_\nu) < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $h = 0$ sein müßte.

Um jetzt den lokalen Satz zu beweisen, denken wir uns F' durch isotherme Parameter u^1, u^2 parametrisiert:

$$g_{11} = g_{22} = \lambda > 0, \quad g_{12} = 0, \tag{33}$$

was o.B.d A. stets möglich ist (vgl. § 93!). Damit nehmen die Integrierbarkeitsbedingungen von Mainardi-Codazzi § 58 (146) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} L_{11,2} - L_{12,1} - \frac{\lambda_2}{2\lambda}(L_{11} + L_{22}) &= 0, \\ L_{22,1} - L_{12,2} - \frac{\lambda_1}{2\lambda}(L_{22} + L_{11}) &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

[1] Siehe Liebmann, H.: Math. Annalen **53**, 91—112 (1900) S. 107.

[2] Siehe Hopf, H.: Math. Nachr. **4**, 232—249 (1950) S. 240—241.

Daraus ergibt sich nach Subtraktion der aus der Voraussetzung

$$H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2\lambda} = \text{const} \tag{35}$$

(vgl. § 44 (35) und (36)!) durch Differentiation folgenden Beziehungen

$$\lambda H_2 = \frac{1}{2} L_{11,2} + \frac{1}{2} L_{22,2} - \frac{\lambda_2}{2\lambda} (L_{11} + L_{22}) = 0,$$

$$\lambda H_1 = \frac{1}{2} L_{22,1} + \frac{1}{2} L_{11,1} - \frac{\lambda_1}{2\lambda} (L_{22} + L_{11}) = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (L_{11} - L_{22})_2 - L_{12,1} &= 0, \\ -\frac{1}{2} (L_{11} - L_{22})_1 - L_{12,2} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Dies ist aber gerade d s Differentialgleichungssystem von Cauchy und Riemann für die komplexe Funktion

$$\Phi = \frac{1}{2} (L_{11} - L_{22}) - i L_{12} \tag{37}$$

des komplexen Parameters

$$z = u^1 + i u^2 \tag{38}$$

und hat damit zur Folge, *daß Φ eine analytische Funktion von z ist*!

Es sei nun der Punkt p mit den Parametern $u^1_{(0)}$, $u^2_{(0)}$ Nabelpunkt von F'. Dann besitzt auf Grund von

$$K = \frac{L_{11} L_{22} - (L_{12})^2}{\lambda^2} \tag{39}$$

(vgl. § 44 (35), (36)!) die Funktion

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 = H^2 - K = \frac{\left(\frac{1}{2} (L_{11} - L_{22}) \right)^2 + (L_{12})^2}{\lambda^2} = \frac{|\Phi|^2}{\lambda^2} \tag{40}$$

und damit auch Φ die Nullstelle $z_0 = u^1_{(0)} + i u^2_{(0)}$. Da nach Voraussetzung aber wegen (40) Φ nicht identisch Null sein kann, besitzt unsere analytische Funktion Φ die Potenzreihenentwicklung

(41)

$$\Phi(z) = \sum_{\mu=m}^{\infty} a_\mu (z - z_0)^\mu = (z - z_0)^m \left(\sum_{\mu=m}^{\infty} a_\mu (z - z_0)^{\mu - m} \right) = (z - z_0)^m \psi(z)$$

$$(m > 0, a_m \neq 0)$$

mit

$$\psi(z_0) = a_m \neq 0. \tag{42}$$

Somit ist z_0 wegen der Stetigkeit von ψ isolierte Nullstelle von Φ und daher p isolierter Nabelpunkt von F'. Um noch $j(p)$ zu berechnen, beachten wir, daß nach § 46 (45) die beiden Krümmungslinienscharen von F' Lösungen der quadratischen Differentialgleichung

$$(43) \qquad -L_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + (L_{11} - L_{22})\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + L_{12}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2$$

$$= Im\left(\left(\frac{1}{2}(L_{11} - L_{22}) - iL_{12}\right)\left(\frac{du^1}{dt} + i\frac{du^2}{dt}\right)^2\right) = Im\left(\Phi\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = 0$$

sind. Daraus folgt für ihr Tangentenfeld wegen

$$\arg\left(\Phi\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \arg\Phi + 2\arg\frac{dz}{dt} = l\pi$$

in Verbindung mit (41):

$$(44) \qquad \begin{aligned} \arg\frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{2}\arg\Phi + \frac{l}{2}\pi \\ &= -\frac{m}{2}\arg(z - z_0) - \frac{1}{2}\arg\psi + \frac{l}{2}\pi \ (l \text{ ganz}). \end{aligned}$$

Ist dann C eine geeignete Kurve um p in einer nabelpunktfreien Umgebung O von p, so errechnet sich nach dem vorigen Paragraphen $j(p)$ wegen (44) zu

$$(45) \qquad j(p) = \frac{1}{2\pi}\Delta\arg\frac{dz}{dt}\Big|_C = -\frac{m}{4\pi}\Delta\arg(z - z_0)\Big|_C - \frac{1}{4\pi}\Delta\arg\psi\Big|_C = -\frac{m}{2} < 0.$$

Damit ist auch der Beweis des lokalen Satzes beendet.

Die in diesem Paragraphen benutzte Beweismethode wird „Indexmethode" genannt. Wir werden später auf sie zurückkommen.

§ 101. Geschlossene Flächen mit konstanter Gaußscher Krümmung

Nachdem im vorigen Paragraphen das Problem der Existenz nichttrivialer geschlossener Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung behandelt wurde, fragt es sich, ob man ähnliche Aussagen über geschlossene Flächen konstanter Gaußscher Krümmung machen kann. Dies geht in der Tat; so konnte schon H. Liebmann 1899 (allerdings unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) zeigen:

Die einzigen geschlossenen, orientierbaren Flächen der Klasse C_4 mit konstanter Gaußscher Krümmung sind die Kugeln[1]. Auch hier genügt es nach einer Idee von P. Hilbert[2], einen „lokalen Satz" zu beweisen, den wir wie folgt formulieren können:

[1] Liebmann, H.: Nachr. Gött. Akad. (1899) S. 44–55.

[2] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl. Stuttgart: Teubner 1956, Anhang V.

Es sei F' ein nabelpunktfreies Flächenstück der Klasse C_4 mit durchwegs positiver Gaußscher Krümmung K. Dann existiert kein Punkt p von F' mit maximaler größerer Hauptkrümmung $\frac{1}{R_1} = r$ und gleichzeitig minimaler kleinerer Hauptkrümmung $\frac{1}{R_2} = \bar{r}$.

Wäre nämlich F eine von einer Kugel verschiedene, geschlossene, orientierbare Fläche der Klasse C_4 mit konstantem K, so müßte zunächst $K > 0$ gelten, wie man sieht, wenn man F in eine kleinstmögliche Kugel des euklidischen Raums einschließt und einen Berührpunkt derselben mit F betrachtet. Dann ist der wegen der Kompaktheit von F stets existierende Punkt p mit maximalem r wegen $r\bar{r} = K = \text{const} > 0$ auch gleichzeitig ein Punkt mit minimalem $\bar{r}$, jedoch nicht Nabelpunkt von F, da andernfalls wegen $r(p) \geqq r(q) \geqq \bar{r}(q) \geqq \bar{r}(p) = r(p)$, d.h. $r(q) = \bar{r}(q)$ alle Punkte q von F Nabelpunkte sind und somit F eine Kugel wäre. Schränkt man jetzt F auf eine geeignete Umgebung von p ein, so ergibt sich ein Widerspruch zum lokalen Satz.

Um jetzt den letzteren zu beweisen, denken wir uns F' durch Krümmungslinienparameter u^1, u^2 parametrisiert:

$$g_{12} = 0, \; L_{12} = 0 \tag{46}$$

(vgl. § 46 (50)!), was wegen der Nabelpunktfreiheit von F' durch eine zweimal stetig differenzierbare Parametertransformation möglich ist[1]. Damit nehmen jetzt die Integrierbarkeitsbedingungen von Mainardi-Codazzi § 58 (146) die Form:

$$\begin{aligned} L_{11,2} - \frac{1}{2g_{11}} g_{11,2} L_{11} - \frac{1}{2g_{22}} g_{11,2} L_{22} &= 0 , \\ L_{22,1} - \frac{1}{2g_{22}} g_{22,1} L_{22} - \frac{1}{2g_{11}} g_{22,1} L_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{47}$$

an. Daraus ergibt sich durch Einsetzen von

$$L_{11} = g_{11} r, \quad L_{22} = g_{22} \bar{r} \tag{48}$$

(vgl. Def. § 44 (27) von $r = \frac{1}{R_1}$, $\bar{r} = \frac{1}{R_2}$!):

$$g_{11,2} = \frac{-2g_{11} r_2}{r - \bar{r}} , \quad g_{22,1} = \frac{2g_{22} \bar{r}_1}{r - \bar{r}} . \tag{49}$$

Setzt man die so erhaltenen Beziehungen in die Integrierbarkeitsbedingung von Gauß § 58 (145) und (143):

$$L_{11} L_{22} = R_{2112} = -\frac{1}{2} (g_{11,22} + g_{22,11}) + A g_{11,2} + B g_{22,1} \tag{50}$$

[1] Vgl. Kamke, E.: Math. Zeitschr. **42**, 287–300 (1937) S. 294–295.

(A, B = Funktionen von g_{11}, g_{22} und ihren ersten partiellen Ableitungen!) ein und vergleicht dies mit Folgerung

$$L_{11}L_{22} = g_{11}g_{22}\,r\bar{r} = g_{11}g_{22}\,K$$

von (48), so resultiert schließlich:

$$K = \frac{g_{11}\,r_{22} - g_{22}\,\bar{r}_{11}}{g_{11}\,g_{22}(r - \bar{r})} + Cr_2 + D\bar{r}_1 \tag{51}$$

mit geeigneten Funktionen C, D der Flächenparameter.

Wäre jetzt $\mathfrak{p}$ ein Punkt von F' mit maximalem r und gleichzeitig minimalem $\bar{r}$, so hätten wir

$$r_2(\mathfrak{p}) = \bar{r}_1(\mathfrak{p}) = 0, \quad r_{22}(\mathfrak{p}) \leqq 0, \ \bar{r}_{11}(\mathfrak{p}) \geqq 0.$$

Damit wäre aber nach (51) wegen $g_{11}(\mathfrak{p}) > 0$, $g_{22}(\mathfrak{p}) > 0$ und $(r - \bar{r})\,(\mathfrak{p}) > 0$ $K(\mathfrak{p}) \leqq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $K > 0$ für F'. Hiermit ist der Beweis des lokalen Satzes erbracht. *Die benutzte Beweismethode wird „Maximummethode" genannt.*

Eine interessante Folgerung aus unserem Satz ist die von 1838 von Minding vermutete Tatsache, *daß eine Kugel „starr" ist, d.h. daß jede auf eine Kugel längentreu abbildbare Fläche (als geschlossene, orientierbare, Fläche konstanter Gaußscher Krümmung) zu dieser Kugel kongruent ist.* Dieser Sachverhalt wird später stark verallgemeinert werden.

S. S. Chern hat übrigens bemerkt, daß sich unser Satz mit derselben Beweismethode in der folgenden Weise verallgemeinern läßt[1]:

Die einzigen geschlossenen, orientierbaren Flächen der Klasse C_4 mit positiver Gaußscher Krümmung, deren Hauptkrümmungen $r, \bar{r}$ einer Relation $\bar{r} = f(r)$ mit einer monoton fallenden Funktion f genügen, sind die Kugeln. In der Tat ist nämlich jeder Punkt einer solchen Fläche mit maximalem r ein Punkt mit minimalem $\bar{r}$. Aus dieser Verallgemeinerung folgt im Spezialfall $f(r) = -r + \text{const}$, d.h. $r + \bar{r} = 2H = \text{const}$ wieder der im letzten Paragraph bewiesene Satz, allerdings unter stärkeren Voraussetzungen, als sie dort gemacht wurden. Außerdem ist die Verallgemeinerung noch im Spezialfall

$$f(r) = \frac{1}{\text{const} - \frac{1}{r}}, \text{ d.h. } \frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} = R_1 + R_2 = \frac{2H}{K} = \text{const}$$

interessant.

§ 102. Die Integralformeln Minkowskis

Wir wollen in diesem Paragraphen eine dritte Beweismethode der Flächentheorie im Großen, die sogenannte „Integralformelmethode", kennenlernen und mit ihrer Hilfe die Sätze von § 100 und § 101 (mit der

[1] Siehe Chern, S. S.: Duke Math. Journ. **12**, 279–290 (1945) und Aleksandrow, A. D.: C. R. Acad. Sci. URSS (2) **19**, 227–229 (1938).

Einschränkung $K > 0$) erneut verifizieren. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst den Satz von Hadamard[1], *daß die Punkte jeder geschlossenen, orientierbaren Fläche F (der Klasse C_3) mit überall positiver Gaußscher Krümmung die Randpunkte eines „konvexen Körpers", d.h. einer abgeschlossenen, beschränkten Punktmenge des euklidischen Raums mit Innenpunkten sind, welche mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält*[2].

Zunächst besitzt nämlich ein derartiges (durch die wegen

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} > 0$$

sinnvolle Forderung $\frac{1}{R_1} > 0$, $\frac{1}{R_2} > 0$ orientiertes) F jeden vorgegebenen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ als Einheitsnormalenvektor $\mathfrak{n}$ in einem geeigneten Punkt, wie man einsieht, wenn man senkrecht zu $\mathfrak{e}$ (in Richtung von $\mathfrak{e}$) eine Ebene von außen bis zur ersten Berührung an (die wegen ihrer Geschlossenheit beschränkte Fläche) F heranrücken läßt, so daß diese Ebene „Stützebene" von F wird. Das Bild der Parametermannigfaltigkeit M von F bei der „sphärischen" Abbildung, durch die jedem Punkt von M mit den Parametern u^1, u^2 der Endpunkt des am Koordinatenursprung angetragenen Einheitsnormalenvektors $\mathfrak{n}(u^1, u^2)$ zugeordnet wird, umfaßt daher die ganze Einheitssphäre. Nun ist diese sphärische Abbildung sicher eineindeutig, denn sonst würde wegen $K > 0$ die Gesamtkrümmung $\iint_M K\, do$ von F auf Grund von § 50 (81) einen größeren Wert als die Oberfläche 4π der Einheitssphäre besitzen, was mit (17) einen Widerspruch bildet. Dies bedeutet nach dem vorhin Gesagten, daß jede Tangentialebene von F „Stützebene" von F ist, d.h. daß die Punkte von F in demjenigen von dieser Ebene begrenzten, abgeschlossenen Halbraum liegen, in den der zugehörige Normaleneinheitsvektor hinweist. Die Punkte von F liegen also gleichzeitig in allen diesen Halbräumen, d.h. in deren Durchschnitt D, welcher offensichtlich eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge mit der (schon jedem einzelnen Halbraum zukommenden) Eigenschaft darstellt, mit zwei Punkten auch die ganze Verbindungsstrecke zu enthalten. D enthält auch Innenpunkte und ist damit konvexer Körper, da es sonst Stück einer Ebene wäre und somit wegen $K > 0$ nicht die Punkte von F enthalten könnte.

Nach Konstruktion von D ist jetzt jeder Punkt von F als Berührpunkt einer Stützebene von F Randpunkt von D, und die zugehörige Tangentialebene ist Stützebene von D, welche D wegen $K > 0$ nur in diesem Punkt

[1] Hadamard, J.: Liouvilles Journ. (5) **3**, 352 (1897).

[2] Chern und Lashof konnten zeigen, daß dieser Satz auch unter den schwächeren Voraussetzungen F von Klasse C_2 und $K \geq 0$ gültig ist. Siehe Amer. Journ. of Math. **79**, 306–318 (1957).

allein berührt. Damit ist aber umgekehrt auch jeder Randpunkt von D als Punkt einer Stützebene und damit Tangentialebene von F gerade der Berührpunkt dieser Tangentialebene mit F und so ein Punkt von F. Damit haben wir in der Tat gezeigt, daß die Punkte von F gerade die Randpunkte des konvexen Körpers D darstellen, d.h. daß F, kurz gesagt, eine „konvexe Fläche" ist. *Wir werden im folgenden speziell die konvexen Flächen mit $K > 0$ „Eiflächen" nennen.*

Eine für später wichtige Folgerung des Satzes von Hadamard ist die Tatsache, *daß für einen beliebigen „Innenpunkt" O einer derartigen konvexen Fläche F, d.h. für einen Innenpunkt O des zugehörigen konvexen Körpers D als Koordinatenursprung die durch*

$$h = \mathfrak{x}\mathfrak{n} \tag{52}$$

definierte „Stützfunktion" von F ihr Vorzeichen nicht wechselt, und zwar bei unserer Orientierung von F (mit nach innerhalb D weisenden Normaleneinheitsvektoren) negativ ist:

$$h < 0. \tag{53}$$

Die Werte der Stützfunktion sind nämlich nach (52) bis auf das Vorzeichen gerade die Abstände von O von den Stützebenen von F.

Wir beweisen nun zwei Integralformeln Minkowskis, die uns für das Folgende nützlich sein werden. Dazu gehen wir ähnlich wie in § 70 von den zu einer geschlossenen, orientierbaren Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ der Klasse C_3 gehörenden „Vektoren" $d\mathfrak{x} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n}$, $d\mathfrak{n} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n}$[1] aus, deren Komponenten Differentialformen vom Grade zwei sind und die sich wegen § 50 (75), § 55 (120), § 44 (35) folgendermaßen darstellen lassen:

(54a)

$$d\mathfrak{x} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{x}_j)\, du^i \wedge du^j = 2(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)\, du^1\, du^2 = 2W\mathfrak{n}\, du^1\, du^2 = 2\mathfrak{n}\, do,$$

(54b)

$$d\mathfrak{x} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n} = d\mathfrak{n} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{n}_j)\, du^i \wedge du^j = -L_{jh} g^{kl} (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{x}_l)\, du^i \wedge du^j =$$
$$-(L_{2h} g^{k2} + L_{1h} g^{k1})\, (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)\, du^1\, du^2 = -2H\mathfrak{n}\, do,$$

(54c)

$$d\mathfrak{n} \overset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_i \times \mathfrak{n}_j)\, du^i \wedge du^j = L_{ih} g^{kl} L_{jh} g^{hm} (\mathfrak{x}_l \times \mathfrak{x}_m)\, du^i \wedge du^j =$$
$$2(L_{1h}\, g^{k1} L_{2h} g^{h2} - L_{1h} g^{k2} L_{2h} g^{h1})\, (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)\, du^1\, du^2 = 2K\mathfrak{n}\, do.$$

[1] Hierbei sind die Differentialformen ersten Grades in beiden Faktoren nach den Regeln des alternierenden Produkts zu multiplizieren, so daß diese Produktbildung im Gegensatz zum gewöhnlichen Vektorprodukt kommutativ ist!

Innere Multiplikation von (54a) mit $\frac{1}{2}\,\mathfrak{n}$ bzw. von (54b) mit $-\frac{1}{2}\,\mathfrak{x}$ und Addition ergibt dann unter Benutzung von (52) und § 68 (31), (32), (33):

$$(55a)\qquad do + Hh\,do = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}) - \frac{1}{2}\,(\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}) = \frac{1}{2}\,d(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}),$$
$$(\wedge)\qquad\qquad (\wedge)\qquad\qquad (\wedge)$$

und analog folgt durch innere Multiplikation von (54b) mit $-\frac{1}{2}\,\mathfrak{n}$ bzw. (54c) mit $\frac{1}{2}\,\mathfrak{x}$ und Addition

$$(55b)\ H\,do + Kh\,do = -\frac{1}{2}\,(\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}) + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}) = \frac{1}{2}\,d(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}, d\mathfrak{n}).$$
$$(\wedge)\qquad\qquad (\wedge)\qquad\qquad (\wedge)$$

Integrieren wir jetzt diese Gleichungen über die Parametermannigfaltigkeit M von F, so erhalten wir schließlich wegen der aus dem Satz von Stokes (Kap. 5 (22)!) folgenden Beziehungen $\iint\limits_M d(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}) = 0$ und $\iint\limits_M d(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}, d\mathfrak{n}) = 0$ [((1))] die Integralformeln Minkowskis:

$$(56a)\qquad \iint\limits_M do + \iint\limits_M Hh\,do = 0$$

$$(56b)\qquad \iint\limits_M Hdo + \iint\limits_M Kh\,do = 0.$$

Die Integralformelmethode beruht nun auf dem einfachen Prinzip, daß der nichtnegative stetige Integrand eines nichtpositiven (Riemannschen) Integrals notwendigerweise identisch gleich Null ist. Um diese Methode zum Beweis der (aus § 100 und § 101 bekannten) Tatsache anzuwenden, daß eine Eifläche F mit konstantem H oder K eine Kugel ist, müssen wir zunächst von einer auf der Parametermannigfaltigkeit M gegebenen stetigen Funktion ausgehen, die für jedes F nichtnegativ ist und nur für die Kugel identisch verschwindet. Als eine solche Funktion bietet sich auf Grund von § 47 die Funktion

$$(57)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \cdot \varphi = (H^2 - K)\,\varphi$$

(vgl. (40)!) mit einem geeigneten positiven Faktor φ an. Wir werden deshalb versuchen, bei einer Eifläche der Klasse C_3 etwa mit konstantem H φ so zu wählen, daß das Integral $\iint\limits_M (H^2 - K)\,\varphi\,do$ nichtpositiv ist. Dies gelingt nach Ideen von U. Simon[2] und K. P. Grotemeyer[3] bereits mit der

[((1))] Wegen der Orientierbarkeit von M heben sich wie beim Beweis von (12) die auftretenden Randintegrale paarweise weg!

[2] Siehe Simon, U.: Math. Annal. **173**, 307–321 (1967).

[3] Siehe Efimov, N. W.: Flächenverbiegung im Großen. Berlin: Akademie-Verlag 1957, § 61.

(nach (52) positiven) Funktion $\varphi = -h$ ($h =$ Stützfunktion von F!), wenn der Koordinatenursprung O ins Innere von F gelegt wird, weil dann auf Grund der beiden Minkowskischen Integralformeln (56)

$$\iint_M (H^2 - K)\,(-h)\,do = \iint_M \left(-H(1 + Hh) + (H + Kh)\right)\,do$$

$$= (-H) \iint_M (1 + Hh)\,do + \iint_M H + Kh)\,do = 0$$

gilt. Desgleichen ist bei einer Eifläche F der Klasse C_3 mit konstantem K das Integral über den nichtnegativen Integranden $\left(H - \sqrt[+]{K}\right) \cdot \psi$ mit $\psi = \left(1 + \sqrt[+]{K}\,(-h)\right) > 0$ wegen der aus (56) folgenden Beziehung

$$\iint_M \left(H - \sqrt[+]{K}\right)\left(1 + \sqrt[+]{K}(-h)\right) do = \iint_M \left((H + Kh) - \sqrt[+]{K}(1 + Hh)\right) do$$

$$= \iint_M (H + Kh)\,do - \sqrt[+]{K} \iint_M (1 + Hh)\,do = 0$$

nichtpositiv und deshalb $H - \sqrt[+]{K} \equiv 0$, d.h. $H^2 - K \equiv 0$, so daß auch in diesem Fall F nur eine Kugel sein kann. *Damit ist tatsächlich noch einmal mit Hilfe der Integralformelmethode bewiesen, daß die einzigen Eiflächen der Klasse C_3 mit konstantem H oder K die Kugeln sind.*

§ 103. Kongruenzsätze bzw. Ähnlichkeitssätze für zwei durch Parallelprojektion bzw. Zentralprojektion aufeinander bezogene geschlossene Flächen

Wir wollen nun den im vorigen Paragraphen zuletzt erwähnten Satz nach H. Hopf und K. Voss[1] in einer bemerkenswerten Weise verallgemeinern, indem wir zeigen werden: *Stimmen in den beiden (evtl. zusammenfallenden) Schnittpunkten einer Eifläche F (der Klasse C_3) mit einer beliebigen Geraden von fester (durch den Einheitsvektor e vorgegebenen) Richtung die Werte der mittleren Krümmung bzw. der Gaußschen Krümmung jeweils überein, so ist F bezüglich einer zu e senkrechten Ebene symmetrisch.* Hieraus folgt nämlich, daß speziell eine Eifläche F mit konstantem H bzw. K in jeder Richtung eine Symmetrieebene besitzt. Drei paarweise senkrechte von diesen Symmetrieebenen schneiden sich in einem Punkt z, in bezug auf welchen F zentralsymmetrisch ist. Fällt man von diesem Symmetriezentrum z das Lot auf eine beliebige Symmetrieebene von F, so erkennt man, daß z auf dieser Ebene liegt, so daß alle Punkte von F von z den gleichen Abstand besitzen, was nur in dem Fall, daß F eine Kugel darstellt, möglich ist.

[1] Siehe Hopf, H., Voss, K.: Archiv d. Math. 3, 187–192 (1952), u. Voss, K.: Math. Ann. 131, 180–218 (1956).

Der eben angegebene „Symmetriesatz" gestattet mittels einer Spiegelung von F an einer zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene die Interpretation als Folgerung aus dem nachstehenden „Translationssatz": *Sind die Parametermannigfaltigkeiten M und $\tilde{M}$ zweier Eiflächen F und $\tilde{F}$ der Klasse C_3 so aufeinander „durch Parallelprojektion" unter Erhaltung der Orientierung abgebildet, daß entsprechende Flächenpunkte jeweils eine zur Richtung (des festen Einheitsvektors) $\mathfrak{e}$ parallele Verbindungsgerade besitzen und die mittleren Krümmungen bzw. die Gaußschen Krümmungen von F und $\tilde{F}$ dort gleich sind, so geht $\tilde{F}$ aus F durch eine Translation in Richtung $\mathfrak{e}$ hervor (d.h. $\tilde{F}$ und F sind „translationsgleich").*

Die Beweisidee zu diesem Translationssatz gründet sich auf das Steinersche Verfahren der „kontinuierlichen Symmetrisierung" der Eifläche F beim Symmetriesatz. Bei dem letzteren wird F mit der Darstellung

$$\mathfrak{x} = \begin{cases} \mathfrak{x}^{(1)} \\ \mathfrak{x}^{(2)} = \mathfrak{x}^{(1)} + \alpha\mathfrak{e} \quad (\alpha \geqq 0) \end{cases} \tag{58}$$

durch die stetig vom reellen Parameter c abhängende Flächenschar F_τ:

$$\mathfrak{x} = \begin{cases} \mathfrak{x}^{(1)}(\tau) = \mathfrak{x}^{(1)} - 2\tau(\mathfrak{x}^{(1)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} - \tau\alpha\mathfrak{e} \\ \mathfrak{x}^{(2)}(\tau) = \mathfrak{x}^{(2)} - 2\tau(\mathfrak{x}^{(2)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} + \tau\alpha\mathfrak{e} \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}\right) \tag{59}$$

in die Fläche $F_{1/2}$:

$$\mathfrak{x} = \begin{cases} \mathfrak{x}^{(1)} - (\mathfrak{x}^{(1)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} - \dfrac{\alpha}{2}\mathfrak{e} \\ \mathfrak{x}^{(2)} - (\mathfrak{x}^{(2)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} + \dfrac{\alpha}{2}\mathfrak{e} \end{cases} \tag{60}$$

mit der durch den Koordinatenursprung gehenden und zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Ebene E als Symmetrieebene übergeführt. (Innere Multiplikation der Darstellung (60) von F mit $\mathfrak{e}$!). Setzt man die Definition (59) der Flächenschar F_τ durch dieselben Formeln für die Parameter τ mit $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ fort, so findet man bemerkenswerterweise, *daß die Fläche F_τ durch Spiegelung der Fläche $F_{1-\tau}$ an E entsteht,* denn wir haben wegen (58) und (59):

$$\mathfrak{x}^{(2)}(1-\tau) - 2\big(\mathfrak{x}^{(2)}(1-\tau)\,\mathfrak{e}\big)\,\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{(2)} - 2\tau(\mathfrak{x}^{(2)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} - \alpha\mathfrak{e} + \tau\alpha\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{(1)}(\tau),$$

$$\mathfrak{x}^{(1)}(1-\tau) - 2\big(\mathfrak{x}^{(1)}(1-\tau)\,\mathfrak{e}\big)\,\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{(1)} - 2\tau(\mathfrak{x}^{(1)}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} + \alpha\mathfrak{e} - \tau\alpha\mathfrak{e} = \mathfrak{x}^{(2)}(\tau).$$

Insbesondere ist also $F = F_0$ durch die Flächenschar F_τ mit der durch Spiegelung von F an E entstehenden Eifläche $\tilde{F} = F_1$ verbunden (Fig. 25). Unsere Flächenschar F_τ hat weiter die Eigenschaft, *Körper konstanten Volumens $V(\tau) = V$ zu begrenzen,* da eine ein beliebiges F_τ treffende Gerade in Richtung $\mathfrak{e}$ aus F_τ eine Strecke mit der von τ unab-

hängigen Länge α ausschneidet, während man für die Oberfläche $O(\tau)$ von F_τ auf Grund der angeführten Spiegelungseigenschaft zunächst nur

$$O(\tau) = O(1-\tau) \tag{61}$$

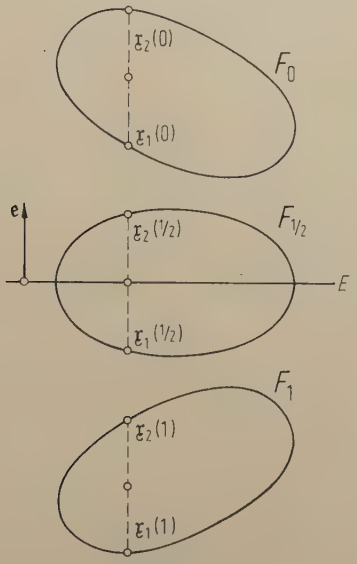


Fig. 25.

konstatiert. Um ein evtl. monotones Verhalten von $O(\tau)$ in bezug auf τ zu untersuchen, empfiehlt es sich daher, den Wert von

$$\frac{dO}{d\tau}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{dO}{d\tau}(0) - \frac{dO}{d\tau}(1)\right) \tag{62}$$

zu bestimmen; und der eine Teil des Symmetriesatzes läßt sich nun in der Tat einfach dadurch beweisen, daß man zeigt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen für die mittlere Krümmung von F einerseits $\frac{dO}{d\tau}(0) = 0$ gelten muß und andererseits ganz allgemein immer $\frac{dO}{d\tau}(0) < 0$ wird, falls F und $\tilde{F}$ nicht „translationsgleich" sind, d.h. falls F nicht schon in bezug auf eine zu e senkrechte Ebene symmetrisch ist.

Wir führen diesen Beweis nicht weiter aus, sondern verallgemeinern ihn gleich für den Translationssatz, bei welchem $\tilde{F}$ nicht notwendig durch eine Spiegelung an einer zu e senkrechten Ebene aus F hervorgeht, sondern lediglich M durch eine Parallelprojektion unter Erhaltung der Orientierung auf $\tilde{M}$ abgebildet werden kann. Eine derartige Abbildung ist von der Klasse C_2, d.h. sie drückt sich durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante in den

Parametern von M und $\tilde{M}$ aus, weil F und $\tilde{F}$ nach Voraussetzung von der Klasse C_3 waren[1]. Durch geeignete Parametertransformationen in M und $\tilde{M}$ erreicht man, daß entsprechende Punkte bei dieser Parallelprojektion gleiche Parameterwerte haben. Hat dann F die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2),$$

so kann $\tilde{F}$ durch

$$\mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}(u^1, u^2) = \mathfrak{x}(u^1, u^2) + w(u^1, u^2)\,\mathfrak{e} \tag{63}$$

(w = zweimal stetig differenzierbar)

dargestellt werden. Wir betrachten nun die F und $\tilde{F}$ verbindende, vom reellen Parameter τ linear abhängende, analog (59) durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\tau; u^1, u^2) = \mathfrak{x}(u^1, u^2) + \tau w(u^1, u^2)\,\mathfrak{e} \quad (0 \leqq \tau \leqq 1) \tag{64}$$

definierte Flächenschar F_τ mit $F_0 = F$, $F_1 = \tilde{F}$. *Alle Flächen F_τ sind Eiflächen der Klasse C_2 mit singularitätenfreien Parametern u^1, u^2,* weil wegen

$$\begin{aligned} L_{ij}(\tau)\, W(\tau) &= \big(\mathfrak{x}_{ij}(\tau), \mathfrak{x}_1(\tau), \mathfrak{x}_2(\tau)\big) = (\mathfrak{x}_{ij} + \tau w_{ij}\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_1 + \tau w_1 \mathfrak{e}, \mathfrak{x}_2 + \tau w_2 \mathfrak{e}) \\ &= (\mathfrak{x}_{ij}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + \tau(w_{ij}\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) + \tau(\mathfrak{x}_{ij}, w_1\mathfrak{e}, \mathfrak{x}_2) + \tau(\mathfrak{x}_{ij}, \mathfrak{x}_1, w_2\mathfrak{e}) \end{aligned}$$

$L_{ij}(\tau)\, W(\tau)$ linear von τ abhängt, so daß

$$L_{ij}(\tau)\, W(\tau) = (1-\tau)\, L_{ij}(0)\, W(0) + \tau L_{ij}(1)\, W(1) \qquad (0 \leqq \tau \leqq 1) \tag{65}$$

gilt. Nun sind aber F_0 und F_1 Eiflächen mit positiven Hauptkrümmungen, d.h. die quadratischen Formen $L_{ij}(0)\, v^i v^j$ und $L_{ij}(1)\, v^i v^j$ sind positiv definit (vgl. § 43!). Dann sind aber wegen $W(0) > 0$, $W(1) > 0$ und $W(\tau) > 0$ nach (65) auch $L_{ij}(\tau)\, v^i v^j$ mit $0 < \tau < 1$ positiv definit, d.h. F_τ stellt in der Tat eine Eifläche mit positiven Hauptkrümmungen dar, deren Flächenparameter u^1, u^2 wegen

$$L_{11}(\tau)\, W(\tau) = \big(\mathfrak{x}_{11}(\tau), \mathfrak{x}_1(\tau), \mathfrak{x}_2(\tau)\big) = \mathfrak{x}_{11}(\tau)\big(\mathfrak{x}_1(\tau) \times \mathfrak{x}_2(\tau)\big) > 0,$$

d.h. $\mathfrak{x}_1(\tau) \times \mathfrak{x}_2(\tau) \neq 0$ keine Singularität besitzen.

Wir beweisen nun zunächst den Translationssatz unter der Voraussetzung

$$H(u^1, u^2) = \tilde{H}(u^1, u^2) \tag{66}$$

für F und $\tilde{F}$. Zu diesem Zweck berechnen wir nach dem Vorbild der kontinuierlichen Symmetrisierung den Ausdruck

$$\frac{dO}{d\tau}(1) - \frac{dO}{d\tau}(0) \tag{67}$$

[1] An der „Schattengrenze" von F mit $\mathfrak{e}_n = 0$ erniedrigt sich nämlich die Differenzierbarkeitsklasse der Parallelprojektion um Eins, vgl. Voss, K.: Math. Ann. **131**, 180–218 (1956), Lemma 1.

(vgl. (62)!), wobei mit $O(\tau)$ wieder die Oberfläche von F_τ bezeichnet sei:

$$O(\tau) = \frac{1}{2}\iint_M (\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau))_{(\wedge)} \quad (68)$$

((1))

(vgl. (54a)!). Damit wird in Verbindung mit (64) wegen $d\mathfrak{x}(\tau) = d\mathfrak{x} + \tau\, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}$ und (54a) sowie $\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\,\mathfrak{n}(\tau) = 0$:

$$\frac{dO}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{2}\iint_M \left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau)\right)_{(\wedge)} + \frac{1}{2}\iint_M (\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x}(\tau))_{(\wedge)}$$
$$+ \frac{1}{2}\iint_M (\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau), d\mathfrak{w}\mathfrak{e})_{(\wedge)} = \iint_M (\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)},$$

also

$$\frac{dO}{d\tau}(1) - \frac{dO}{d\tau}(0) = \iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}. \quad (69)$$

Nun gilt einerseits wegen

$$d\mathfrak{x}(1) = d\tilde{\mathfrak{x}} = d\mathfrak{x} + d\mathfrak{w}\mathfrak{e} \quad (70)$$

und (54a):

$$d\mathfrak{w}\mathfrak{e} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\,(d\mathfrak{w}\mathfrak{e} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x}) + \frac{1}{2}\,(d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{w}\mathfrak{e}) = \frac{1}{2}\,(d\tilde{\mathfrak{x}} \underset{(\wedge)}{\times} d\tilde{\mathfrak{x}}) - \frac{1}{2}\,(d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x})$$
$$= \tilde{\mathfrak{n}}\, d\tilde{o} - \mathfrak{n}\, do \quad (71)$$

und damit

$$\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{=} \iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})\,(\tilde{\mathfrak{n}}\, d\tilde{o} - \mathfrak{n}\, do) = \iint_M (1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}})\,(do + d\tilde{o}). \quad (72)$$

Andererseits haben wir wegen $d(\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = (d\tilde{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, \mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} + (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ unter Benutzung des Stokesschen Satzes und der Orientierbarkeit von M sowie unter Benutzung von (70), (54b) und (71):

$$\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{=} -\iint_M (d\tilde{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, \mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{=} \iint_M (\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\tilde{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{}$$

$$= \iint_M (\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{x}}) \underset{(\wedge)}{} - \iint_M (\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{} = -2\iint_M \{\tilde{wH}(\mathfrak{e}\tilde{\mathfrak{n}})\, d\tilde{o} - wH(\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do\}$$

(73)

$$= -2\iint_M w(\tilde{H} - H)\,(\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do - 2\iint_M w\tilde{H}\,\{(\mathfrak{e}\tilde{\mathfrak{n}})\, d\tilde{o} - (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do\}$$

$$= -2\iint_M w(\tilde{H} - H)\,(\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do.$$

((1)) Die Bildung des äußeren Differentials $d\mathfrak{x}(\tau)$ bezieht sich hierbei nur auf die Parameter u^1, u^2 von M, dagegen nicht auf τ!

Aus (72) und (73) folgt für F und $\tilde{F}$ die bemerkenswerte Integralformel

$$(74) \qquad \iint_M (1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}})\,(do + d\tilde{o}) + 2\iint_M w\,(\tilde{H} - H)\,(\mathfrak{e}\mathfrak{n})\,do = 0,$$

aus der man wegen (66) und $1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}} \geqq 0$ sofort

$$(75) \qquad 1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}} = 0, \text{ d.h. } \mathfrak{n} = \tilde{\mathfrak{n}}$$

folgern kann. Dann wird aber wegen (70)

$$0 = \tilde{\mathfrak{n}}\,d\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{n}\,d\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{n}(d\mathfrak{x} + dw\mathfrak{e}) = (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\,dw = 0$$

und damit für alle Punkte von M, die nicht zu der durch $\mathfrak{e}\mathfrak{n} = 0$ definierten „Schattengrenze" gehören, $dw = 0$. Da die Schattengrenze aber nur eine stetig differenzierbare Kurve darstellt, haben wir aus Stetigkeitsgründen schlechthin $dw = 0$ oder $w = \text{const}$, d.h. auf Grund von (64) geht $\tilde{F} = F(1)$ in der Tat durch eine Translation in Richtung von $\mathfrak{e}$ aus F hervor.

Der Beweis des Translationssatzes unter der Voraussetzung

$$(76) \qquad K(u^1, u^2) = \tilde{K}(u^1, u^2)$$

geschieht ebenfalls mit Hilfe eines Integralsatzes, er verläuft aber nur zum Teil analog zu dem eben beendeten Beweis unter der Voraussetzung $H(u^1, u^2) = \tilde{H}(u^1, u^2)$. Wir berechnen an Stelle von $\frac{dO}{d\tau}(1) - \frac{dO}{d\tau}(0)$ die Differenz $\frac{dM}{d\tau}(1) - \frac{dM}{d\tau}(0)$, wobei

$$(77) \qquad M(\tau) = -\frac{1}{2}\iint_M \big(\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau)\big)_{(\wedge)} = \iint_M H(\tau)\,do(\tau)$$

auf Grund von (54b) das „Integral der mittleren Krümmung" von F_τ darstellt, und finden wegen $d\mathfrak{x}(\tau) = d\mathfrak{x} + \tau\,dw\,\mathfrak{e}$, (54b) sowie $\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\,\mathfrak{n}(\tau) = 0$ unter Benutzung des Satzes von Stokes:

$$\begin{aligned}
-\frac{dM}{d\tau}(\tau) &= \frac{1}{2}\iint_M \Big(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau)\Big)_{(\wedge)} + \frac{1}{2}\iint_M \Big(\mathfrak{n}(\tau), d\Big(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\Big), d\mathfrak{x}(\tau)\Big)_{(\wedge)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\iint_M \big(\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dw\,\mathfrak{e}\big)_{(\wedge)} = \frac{1}{2}\iint_M d\Big(\mathfrak{n}(\tau), \frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau)\Big)_{(\wedge)} \\
&\quad + \iint_M \Big(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{x}(\tau)\Big)_{(\wedge)} + \frac{1}{2}\iint_M \Big(\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dw\,\mathfrak{e}\Big)_{(\wedge)} \\
&= \frac{1}{2}\iint_M \big(\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dw\,\mathfrak{e}\big)_{(\wedge)},
\end{aligned}$$

also

$$\frac{dM}{d\tau}(1) - \frac{dM}{d\tau}(0) = -\frac{1}{2}\iint\limits_M \left(\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}}, dwe\right)_{(\wedge)} - \left(\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}, dwe\right)_{(\wedge)}\Big)$$

(78)

$$= \int\limits_0^1 \frac{d^2M}{d\tau^2}\, d\tau = \iint\limits_M \left(\int\limits_0^1 -\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\mathfrak{n}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dwe\right)_{(\wedge)} d\tau \right).$$

Nun gilt einerseits

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\mathfrak{n}(\tau),\, d\mathfrak{n}(\tau),\, dwe\right)_{(\wedge)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau),\, d\mathfrak{n}(\tau),\, dwe\right)_{(\wedge)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{n}(\tau),\, d\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau),\, dwe\right)_{(\wedge)} = -\frac{1}{2}d\left(\mathfrak{n}(\tau),\, \frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau),\, dwe\right)_{(\wedge)}$$

$$-\left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau),\, d\mathfrak{n}(\tau),\, dwe\right)_{(\wedge)}$$

und damit unter Benutzung des Stokesschen Satzes

$$\frac{dM}{d\tau}(1) - \frac{dM}{d\tau}(0) = -\iint\limits_M \int\limits_0^1 \left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dwe\right)_{(\wedge)} d\tau. \tag{79}$$

In (79) können wir wegen $\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\,\mathfrak{n}(\tau) = 0$ ansetzen

$$\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau) = \alpha^i(\tau)\,\mathfrak{x}_i(\tau).$$

Innere Multiplikation davon mit $\mathfrak{x}_n(\tau)$ liefert dann mit (64):

$$\alpha^i(\tau) = g^{in}(\tau)\left(\mathfrak{x}_n(\tau)\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\right) = -\,g^{in}(\tau)\left(\frac{d\mathfrak{x}_n}{d\tau}(\tau)\,\mathfrak{n}(\tau)\right)$$

$$= -\,g^{in}(\tau)\, w_n\big(\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau)\big),$$

so daß wir zusammen mit den Ableitungsgleichungen von Weingarten (s. Kap. 4 (120)!)

$$-\left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau), d\mathfrak{n}(\tau), dwe\right)_{(\wedge)} = -\left(\alpha^i(\tau)\,\mathfrak{x}_i(\tau), -L_{jk}(\tau)\,g^{kl}(\tau)\,\mathfrak{x}_l(\tau), w_m\mathfrak{e}\right)_{(1)} du^j \wedge du^m$$

$$= \alpha^i(\tau)\, L_{jk}(\tau)\, g^{kl}(\tau)\, w_m\, \varepsilon_{il}(\tau)\, \big(\mathfrak{n}(\tau)\mathfrak{e}\big)\varepsilon^{jm}(\tau)\, do(\tau)$$

$$= \varepsilon^{mj}(\tau)\,\varepsilon^{nk}(\tau)\, L_{jk}(\tau)\, w_m w_n\big(\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau)\big)^2\, do(\tau)$$

erhalten[1]. Berücksichtigen wir hierin noch die aus

$$\tau\, dwe \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = \mathfrak{n}(\tau)\, do(\tau) - \mathfrak{n}\, do$$

---

[1] Hierbei haben wir die aus Kap. 4 (75) und (202) folgenden Beziehungen $\mathfrak{x}_i(\tau) \times \mathfrak{x}_l(\tau) = \varepsilon_{il}(\tau)\,\mathfrak{n}(\tau)$ sowie $\varepsilon^{ij}(\tau) = g^{ik}(\tau)\,g^{jl}(\tau)\,\varepsilon_{kl}(\tau) = \big(g^{ik}(\tau)\,\mathfrak{x}_k(\tau),\ g^{jl}(\tau)\,\mathfrak{x}_l(\tau),\ \mathfrak{n}(\tau)\big) = -\varepsilon^{ji}(\tau)$ und damit wegen $\varepsilon^{12}(\tau)\,W(\tau) = \|g^{ij}(\tau)\|\,W^2(\tau) = \|g^{ij}(\tau)\|\,\|g_{jk}\tau)\| = 1$: $du^j \wedge du^m = \varepsilon^{jm}(\tau)\,W(\tau)\,du^1 \wedge du^2 = -\varepsilon^{mj}(\tau)\,do(\tau)$ benutzt!

(vgl. (71)!) durch innere Multiplikation mit e folgende Beziehung

$$(\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau))\, do(\tau) = (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do, \text{ d.h. } (\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau))W(\tau) = (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, W,$$

so bekommen wir schließlich aus (79)

$$\frac{dM}{d\tau}(1) - \frac{dM}{d\tau}(0) = \iint_M (\mathfrak{e}\mathfrak{n})^2\, (C^{mn} w_m w_n)\, do, \tag{80}$$

wobei C^{mn} durch

$$C^{mn} = \int_0^1 WW^{-1}(\tau)\, \varepsilon^{mj}(\tau)\, \varepsilon^{nk}(\tau)\, L_{jk}(\tau)\, d\tau \tag{81}$$

definiert ist.

Andererseits haben wir nach (78) wegen $d(\tilde{\mathfrak{n}}, we, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} = (d\tilde{\mathfrak{n}}, we, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} + (\tilde{\mathfrak{n}}, dwe, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} = -(d\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}}, we)_{(\wedge)} + (\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}}, dwe)_{(\wedge)}$ und analog $d(\mathfrak{n}, we, d\mathfrak{n})_{(\wedge)} = -(d\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}, we)_{(\wedge)} + (\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}, dwe)_{(\wedge)}$ unter Benutzung des Stokesschen Satzes, (54c) und (71):

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\tau}(1) - \frac{dM}{d\tau}(0) &= -\frac{1}{2}\iint_M (d\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}}, we)_{(\wedge)} + \frac{1}{2}\iint_M (d\mathfrak{n}, d\mathfrak{n}, we)_{(\wedge)} \\ &= -\iint_M (w\tilde{K}(\tilde{\mathfrak{e}\mathfrak{n}})\, d\tilde{o} - wK(\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do) = -\iint_M w(\tilde{K} - K)\, (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do \\ &\quad - \iint_M w\tilde{K}(\tilde{\mathfrak{e}\mathfrak{n}})\, d\tilde{o} - (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do) = -\iint_M w(\tilde{K} - K)\, (\mathfrak{e}\mathfrak{n}) do. \end{aligned} \tag{82}$$

Aus (80) und (82) folgt für F und $\tilde{F}$ die bemerkenswerte Integralformel

$$\iint_M (\mathfrak{e}\mathfrak{n})^2\, (C^{mn} w_m w_n)\, do + \iint_M w(\tilde{K} - K)\, (\mathfrak{e}\mathfrak{n})\, do = 0, \tag{83}$$

aus der man wegen (76) und der aus (81) und (65) folgenden positiven Definitheit der quadratischen Form $C^{mn} v_m v_n$[1] für alle nicht zur Schattengrenze $\mathfrak{e}\mathfrak{n} = 0$ gehörenden Punkte von M

$$dw = w_m du^m = 0$$

folgern kann. Eine frühere Überlegung ergibt dann $w = \text{const}$, so daß $\tilde{F}$ in der Tat durch eine Translation in Richtung von e aus F hervorgeht. Damit ist der Translationssatz vollständig bewiesen. Wir bemerken noch, *daß beim Vorliegen der Voraussetzung* $H(u^1, u^2) = \tilde{H}(u^1, u^2)$ *des Translationssatzes* F *und* $\tilde{F}$ *lediglich als geschlossene Flächen der Klasse* C_2 *mit einer zweimal stetig differenzierbaren (orientierungserhaltenden) „Parallelprojektion" von* M *auf* $\tilde{M}$ *vorausgesetzt zu werden brauchen, bei welcher die „Schattengrenze"* $\mathfrak{e}\mathfrak{n} = 0$ *von* F *(oder nach* (71) *gleichbedeutend die Schattengrenze* $\tilde{\mathfrak{e}\mathfrak{n}} = 0$ *von* $\tilde{F}$*) keine inneren Punkte besitzt.* Entsprechend lassen sich die Voraussetzungen des Symmetriesatzes in diesem Fall reduzieren.

[1] Mit $L_{jk}(\tau)\, v^j v^k$ ist nämlich auch $(\varepsilon^{mj}(\tau)\, \varepsilon^{nk}(\tau)\, L_{jk}(\tau))\, v_m v_n = L_{jk}(\tau)\, (\varepsilon^{mj}(\tau) v_m)\, (\varepsilon^{nk}(\tau)\, v_n)$ positiv definit!

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir nach A. Aeppli[1] die Gültigkeit des folgenden mit dem Translationssatz verwandten „Ähnlichkeitssatzes": *Sind die Parametermannigfaltigkeiten M und $\tilde{M}$ zweier geschlossener Flächen*

$$F\colon \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2) \text{ und } \tilde{F}\colon \mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

der Klasse C_2 so aufeinander durch eine „zweimal stetig differenzierbare Zentralprojektion" unter Erhaltung der Orientierung abgebildet, daß entsprechende Flächenpunkte jeweils auf derselben, durch den festen Punkt O gehenden Halbgerade liegen:

$$\tilde{\mathfrak{x}} = f\mathfrak{x} \quad (f = \text{zweimal stetig differenzierbar}, f > 0), \tag{84}$$

wobei die durch $\mathfrak{x}\mathfrak{n} = 0$ gegebene „Schattengrenze" von F keine inneren Punkte besitzen soll, und daß die „(bezüglich O) reduzierten mittleren Krümmungen" von F und $\tilde{F}$ in entsprechenden Punkten gleich sind:

$$rH = \tilde{r}\tilde{H} \quad (r = |\mathfrak{x}|, \tilde{r} = |\tilde{\mathfrak{x}}|!)^{((2))}, \tag{85}$$

so geht $\tilde{F}$ aus F durch eine Streckung mit dem Zentrum O hervor (d.h. F und $\tilde{F}$ sind „homothetisch").

Zum Beweis rechnen wir an Stelle des Integrals $\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{w}\mathfrak{e}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ in (69) das Integral $\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ auf zwei verschiedene Weisen aus: Einmal wird unter Benutzung von (54a)

$$\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = \iint_M 2(\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n})\,\mathfrak{n}\,do = -2\iint_M (1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}})\,do, \tag{86}$$

während wir andererseits wegen $d(\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = (d\tilde{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} + (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ unter Benutzung des Stokesschen Satzes sowie von (84), (54b) und der wegen $d\tilde{\mathfrak{x}} = df\,\mathfrak{x} + f\,d\mathfrak{x}$ und (54a) gültigen Beziehung

$$df\,\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} f\,d\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(d\tilde{\mathfrak{x}} \underset{(\wedge)}{\times} d\tilde{\mathfrak{x}}) - \frac{1}{2}(f\,d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} f\,d\mathfrak{x}) = \tilde{\mathfrak{n}}\,d\tilde{o} - f^2\mathfrak{n}\,do:$$

$$\begin{aligned}
\iint_M (\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} &= \iint_M (\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{n}} - d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = \iint_M \left(\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{n}}, d\,\frac{\tilde{\mathfrak{x}}}{f}\right)_{(\wedge)} \\
&\quad - \iint_M (\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = -2\iint_M \left(\frac{\tilde{H}}{f}(\mathfrak{x}\tilde{\mathfrak{n}})d\tilde{o} - H(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,do\right) \\
&= -2\iint_M (f\tilde{H} - H)(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,do - 2\iint_M \frac{\tilde{H}}{f}\left((\mathfrak{x}\tilde{\mathfrak{n}})\,d\tilde{o} - f^2(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,do\right) \\
&= -2\iint_M \frac{1}{r}(\tilde{r}\tilde{H} - rH)(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,do
\end{aligned} \tag{87}$$

[1] Siehe Commentarii Math. Helv. 33, 174–195 (1959).

((2)) Da in diesem „Ähnlichkeitssatz" die Homothetie von F und $\tilde{F}$ behauptet wird, bei welcher H und $\tilde{H}$ proportional sind: $\tilde{H} = \text{const} \cdot H$, wäre die Voraussetzung $\tilde{H} = H$ des Translationssatzes hier nicht sinnvoll!

erhalten. Vergleich von (86) und (87) liefert dann an Stelle von (74) die Integralformel

$$\iint_M (1 - \mathfrak{n}\tilde{\mathfrak{n}})do + \iint_M \frac{1}{r}(rH - \tilde{r}\tilde{H})(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,do = 0, \tag{88}$$

aus der auf Grund der Voraussetzung (85) analog wie bei (74) $\mathfrak{n} = \tilde{\mathfrak{n}}$ und damit wegen (84)

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{n})\,df = 0$$

folgt. Da die Schattengrenze $\mathfrak{x}\mathfrak{n} = 0$ keine inneren Punkte besitzt, haben wir aus Stetigkeitsgründen schlechthin $df = 0$ oder $f = \text{const}$, d.h. $\tilde{F}$ geht in der Tat durch eine Streckung mit dem Zentrum O aus F hervor.

Nach Aeppli gilt auch für gleiche „(bezüglich O) reduzierte Gaußsche Krümmungen“: $r^2K = \tilde{r}^2\tilde{K}$ ein Ähnlichkeitssatz; dazu müssen aber im Gegensatz zu (65) nicht nur F und $\tilde{F}$, sondern auch alle Flächen F_τ einer gewissen F und $\tilde{F}$ verbindenden Schar als Eiflächen vorausgesetzt werden, was eine geometrisch schwer zu kontrollierende Bedingung darstellt. Wir verzichten deshalb auf einen Beweis hiervon und merken nur noch an, daß als *spezielle Folgerung unserer Ähnlichkeitssätze „Zentralsymmetriesätze“ für ein F gelten*, die dem Symmetriesatz von Hopf und Voss entsprechen. Kürzlich konnte übrigens Y. Katsurada eine gruppentheoretisch interessante gemeinsame Verallgemeinerung des Translationssatzes und des Ähnlichkeitssatzes angeben[1].

§ 104. Kongruenzsätze für zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen

Analog zu den im vorigen Paragraphen bewiesenen Kongruenzsätzen für zwei durch eine Parallelprojektion aufeinander abgebildete Eiflächen lassen sich auch Kongruenzsätze für zwei Eiflächen beweisen, welche „durch parallele Normalen“ aufeinander abgebildet sind. So gilt nämlich nach E. B. Christoffel[2] bzw. nach H. Minkowski[3]: *Sind die Parametermannigfaltigkeiten M und $\tilde{M}$ zweier Eiflächen F und $\tilde{F}$ der Klasse C_3 so eineindeutig aufeinander „durch parallele Normalen“ unter Erhaltung der Orientierung abgebildet, daß entsprechende Flächenpunkte jeweils denselben Normaleneinheitsvektor besitzen und die Summe bzw. das Produkt der Hauptkrümmungsradien von F und $\tilde{F}$ dort gleich sind, so geht $\tilde{F}$ aus F durch eine Translation hervor.*

---

[1] Katsurada, Y.: Commentarii Math. Helv. **43**, 176–194 (1968).

[2] Christoffel, E. B.: Journal f. Reine u. Angew. Math. **64**, 193–209 (1865) und Hurwitz, A.: Annales de l'Ecole Normale (3) **19**, 357–408 (1902).

[3] Minkowski, H.: Math. Annalen **57**, 447–449 (1903).

Bevor wir dies beweisen, drücken wir zunächst einmal die Abbildung von M auf $\tilde{M}$ durch parallele Normalen durch gleiche Parameterwerte aus:

$$\mathfrak{n}(u^1, u^2) = \tilde{\mathfrak{n}}(u^1, u^2), \tag{89}$$

was stets durch zweimal stetig differenzierbare Parametertransformationen in M und $\tilde{M}$ möglich ist. Weiter vertauschen wir in den Ableitungsgleichungen Kap. 4 (120) von F bzw. $\tilde{F}$ die Rollen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{x}}$ und $\tilde{\mathfrak{n}}$ und finden auf analoge Weise unter Benutzung der Koeffizienten $e_{ij} = \mathfrak{n}_i \mathfrak{n}_j$ $(i, j = 1, 2)$ der (gemeinsamen) „dritten Grundform" von F und $\tilde{F}$:

$$\mathfrak{x}_i = -L_{ij} e^{jk} \mathfrak{n}_k \text{ bzw. } \tilde{\mathfrak{x}}_i = -\tilde{L}_{ij} e^{jk} \mathfrak{n}_k \qquad (i = 1, 2), \tag{90}$$

worin (e^{ij}) die zu (e_{ij}) inverse Matrix darstellt, d. h.

$$e_{ij}\, e^{jk} = \delta_i^k \quad (i, k = 1, 2) \tag{91}$$

ist. Daraus folgt analog zur Herleitung von (54):

$$d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n} = 2(\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2) du^1\, du^2\,, \tag{92a}$$

$$d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = -\, L_{ij} e^{ji} (\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2) du^1\, du^2, \tag{92b}$$

$$d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = 2 \| L_{ij} e^{jk} \| \, (\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2)\, du^1\, du^2. \tag{92c}$$

Vergleicht man dies mit den aus (54) durch Anwendung von Kap. 4 (81) folgenden Beziehungen

$$d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{n} = 2\mathfrak{n}\, d\omega, \tag{93a}$$

$$d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = -\frac{2H}{K} \mathfrak{n}\, d\omega, \tag{93b}$$

$$d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = \frac{2}{K} \mathfrak{n}\, d\omega, \tag{93c}$$

so findet man

$$L_{ij} e^{ji} = \frac{2H}{K} = R_1 + R_2 \tag{94}$$

und

$$\| L_{ij} e^{jk} \| = \frac{1}{K} = R_1 R_2 \tag{95}$$

$(R_1, R_2 =$ Hauptkrümmungsradien von $F!)$.

Entsprechende Formeln gelten für $\tilde{F}$.

Für die weiteren Überlegungen benötigen wir noch den folgenden Hilfssatz: *Es seien $a_{ij}\, du^i\, du^j$, $b_{ij} du^i du^j$ und $\tilde{b}_{ij}\, du^i du^j$ drei beliebige, positiv definite quadratische Differentialformen auf der (gemeinsamen)*

Parametermannigfaltigkeit von F und $\tilde{F}$ mit der Eigenschaft

$$b_{ij}a^{ji} = \tilde{b}_{ij}a^{ji} \tag{96}$$

oder der Eigenschaft

$$\|b_{ij}a^{jk}\| = \|\tilde{b}_{ij}a^{jk}\| \tag{97}$$

$$((a^{ij}) = \textit{inverse Matrix zu } (a_{ij})!).$$

Dann gilt stets

$$\|(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{jk}\| \leqq 0, \tag{98}$$

und Gleichheit tritt hierbei genau dann ein, wenn

$$\tilde{b}_{ij} - b_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

gilt.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes unter der Voraussetzung (96) betrachten wir das quadratische Polynom in der Variablen z

$$p(z) = \|(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{jk} - z\delta_i^k\| = z^2 - (\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{ji} z + \|(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{jk}\| \tag{99}$$

$$= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2).$$

Nach § 44 besitzt die quadratische Gleichung $p(z) = 0$ stets zwei reelle Wurzeln λ_1, λ_2, nämlich die beiden Extremwerte von

$$\frac{(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, du^i\, du^j}{a_{ij}du^i du^j}.$$

Wegen (96) ist nun $\lambda_1 + \lambda_2 = (\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{ji} = 0$ und damit $p(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \|(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{jk}\| = -(\lambda_1)^2 \leqq 0$, wobei Gleichheit nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d.h.

$$\frac{(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, du^i\, du^j}{a_{ij}\, du^i\, du^j} \equiv 0$$

oder $\tilde{b}_{ij} - b_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ eintritt. Zum Beweise des Hilfssatzes unter der Voraussetzung (97) verwenden wir an Stelle des Polynoms (99) das in z quadratische Polynom

$$q(z) = \|(\tilde{b}_{ij} - zb_{ij})\, a^{jk}\| = \|\tilde{b}_{ij} - zb_{ij}\| \cdot \|a^{jk}\| = \|b_{ij}\| \cdot \|a^{jk}\| \cdot \|\tilde{b}_{ij}b^{jk} - z\,\delta_i^k\|$$

$$= \frac{\|b_{ij}\|}{\|a_{ij}\|}\, (z^2 - \tilde{b}_{ij}\, b^{ji} z + \|\tilde{b}_{ij}b^{jk}\|) = \frac{\|b_{ij}\|}{\|a_{ij}\|}\, (z - \mu_1)\, (z - \mu_2) \tag{100}$$

((b^{ij}) = inverse Matrix zu (b_{ij})!). Auf Grund von (97) gilt hierbei

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \|\tilde{b}_{ij} b^{jk}\| = \frac{\|\tilde{b}_{ij}\|}{\|b_{ij}\|} = 1$$

für die beiden Wurzeln μ_1, μ_2 der quadratischen Gleichung $q(z) = 0$, welche als Extremwerte von $\frac{\tilde{b}_{ij} du^i du^j}{b_{ij} du^i du^j}$ reell und positiv sind (vgl. § 44, $b_{ij}\, du^i\, du^j$ und $\tilde{b}_{ij}\, du^i\, du^j$ sind positiv definit!). Damit haben wir etwa $0 < \mu_2 \leqq 1 \leqq \mu_1$ und daher

$$q(1) = \|(\tilde{b}_{ij} - b_{ij})\, a^{jk}\| = \frac{\|b_{ij}\|}{\|a_{ij}\|}(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \leqq 0,$$

wobei Gleichheit nur für $\mu_1 = \mu_2 = 1$, d.h. $\frac{\tilde{b}_{ij}\, du^i du^j}{b_{ij} du^i\, du^j} \equiv 1$ oder $\tilde{b}_{ij} = b_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ eintritt. Hiermit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Wir beweisen jetzt den Satz Christoffels bzw. Minkowskis nach Ideen von Hsiung[1] bzw. S. S. Chern[2]. Im erstgenannten Fall, wo die Voraussetzung

$$R_1 + R_2 = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 \tag{101}$$

oder nach (94)

$$L_{ij} e^{ji} = \tilde{L}_{ij} e^{ji} \tag{102}$$

gemacht wird, rechnen wir das Integral $\int\int_M (\mathfrak{n},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ auf zwei verschiedene Arten aus. Einerseits ist nach (90)

$$\tilde{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i = -(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk} \mathfrak{n}_k \quad (i = 1,2) \tag{103}$$

und damit analog wie bei (92c) unter Benutzung von (92a) und (93a)

$$(d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}) \underset{(\wedge)}{\times} (d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}) = 2\,\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk}\|\, \mathfrak{n}\, d\omega, \tag{103a}$$

woraus

$$\int\int_M (\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = 2 \int\int_M \|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk}\|\, d\omega \tag{104}$$

resultiert. Andererseits haben wir wegen $d(\mathfrak{n}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = (d\mathfrak{n}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} + (\mathfrak{n},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x},\, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ unter Benutzung des Stokesschen Satzes und der Orientierbarkeit von M sowie von (93b),

---

[1] Siehe Hsiung: Math. Zeitschrift **64**, 41–46 (1956).

[2] Siehe Chern, S. S.: Amer. Journal Math. **79**, 949–950 (1957).

(94) und (101):

$$\iint_M (\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = -\iint_M (d\mathfrak{n}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$$

$$(105) \qquad = \iint_M (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}) \left((d\tilde{\mathfrak{n}} \underset{(\wedge)}{\times} d\tilde{\mathfrak{x}}) - (d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x}) \right)$$

$$= -\iint_M (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\, \mathfrak{n} \left((\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2) - (R_1 + R_2) \right) d\omega = 0.$$

Vergleich von (104) und (105) ergibt die Integralformel

$$(106) \qquad 2 \iint_M \| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk} \|\, d\omega = 0.$$

Nun ist aber die Voraussetzung (96) unseres Hilfssatzes (mit $a_{ij} = e_{ij}$, $b_{ij} = L_{ij}$, $\tilde{b}_{ij} = \tilde{L}_{ij}$!) nach (102) erfüllt, so daß in (106)

$$\| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk} \| \leqq 0$$

gilt. Daraus resultiert $\| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk} \| = 0$ und daher auf Grund des Hilfssatzes $\tilde{L}_{ij} = L_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ oder nach (103) $\tilde{\mathfrak{x}}_i - \mathfrak{x}_i = 0$ $(i = 1, 2)$, d. h. $\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \mathfrak{a} = \text{const}$, so daß in der Tat $\tilde{F}$ aus F durch eine Translation hervorgeht.

Hiermit ist die Behauptung Christoffels bewiesen, und zum Beweis der Behauptung Minkowskis, wo die Voraussetzung

$$(107) \qquad R_1 \cdot R_2 = \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2$$

oder nach (95)

$$(108) \qquad \| L_{ij} e^{jk} \| = \| \tilde{L}_{ij} e^{jk} \|$$

gemacht wird, berechnen wir das Integral $\frac{1}{2} \iint_M (\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ auf zwei verschiedene Arten: Nach (103a) ist

(109)

$$\frac{1}{2} \iint_M (\tilde{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = \iint_M (\tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{n} + \mathfrak{x}\mathfrak{n}) \| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk} \|\, d\omega,$$

während wir wegen $d(\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = (d\mathfrak{x} + d\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} + (\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ unter Benutzung des Stokesschen Satzes und der Orientierbarkeit von M sowie (93c), (95) und (107):

(110)

$$\frac{1}{2} \iint_M (\mathfrak{x} + \tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = -\frac{1}{2} \iint_M (d\mathfrak{x} + d\tilde{\mathfrak{x}}, \tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, d\tilde{\mathfrak{x}} - d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_M (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}) \left((d\tilde{\mathfrak{x}} \underset{(\wedge)}{\times} d\tilde{\mathfrak{x}}) - (d\mathfrak{x} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x}) \right)$$

$$= \iint_M (\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\, \mathfrak{n} \left((\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2) - (R_1 \cdot R_2) \right) d\omega = 0$$

haben. Aus (109) und (110) folgt die Integralformel

$$\iint_M (\mathfrak{x}\mathfrak{n} + \tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{n}) \,\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk}\|\, d\omega = 0. \tag{111}$$

Nun ist aber nach (108) die Voraussetzung (97) unseres Hilfssatzes erfüllt, so daß in (111)

$$\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk}\| \leqq 0$$

gilt. Außerdem können wir o.B.d.A. annehmen, der Koordinatenursprung O sei gemeinsamer innerer Punkt der von F und $\tilde{F}$ begrenzten konvexen Körper (evtl. Translation von F und $\tilde{F}$!), so daß nach (52) und (53) in (111)

$$\mathfrak{x}\mathfrak{n} + \tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{n} = h + \tilde{h} < 0$$

ist. Daraus resultiert $\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, e^{jk}\| = 0$ und damit wiederum auf Grund des Hilfssatzes wie vorhin die „Translationsgleichheit" von F und $\tilde{F}$, so daß auch die Behauptung Minkowskis vollständig bewiesen ist.

Wir merken noch an, daß das „Normalenbild" $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u^1, u^2)$ und die Summe bzw. das Produkt der Hauptkrümmungsradien einer Eifläche F der Klasse C_2 nicht voneinander unabhängig sind. *Sie genügen nämlich auf Grund von* (93b), (93c), (94) *und* (95) *sowie des Integralsatzes von Stokes den bemerkenswerten vektoriellen Integralrelationen*

$$\iint_M (R_1 + R_2)\,\mathfrak{n}\, d\omega = -\iint_M \underset{(\wedge)}{d\mathfrak{n}\times d\mathfrak{x}} = -\iint_M \underset{(\wedge)}{d(\mathfrak{n}\times d\mathfrak{x})} = 0 \tag{112}$$

und

$$\iint_M (R_1 \cdot R_2)\,\mathfrak{n}\, d\omega = \frac{1}{2}\iint_M \underset{(\wedge)}{d\mathfrak{x}\times d\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}\iint_M \underset{(\wedge)}{d(\mathfrak{x}\times d\mathfrak{x})} = 0. \tag{113}$$

H. Lewy konnte zeigen, daß die Relation (113) für ein auf der Einheitssphäre analytisch vorgegebenes $R_1 \cdot R_2$ zur Existenz einer analytischen Eifläche mit diesem $R_1 \cdot R_2$ hinreichend ist[1], während die Relation (112) für ein auf der Einheitssphäre stetig differenzierbar vorgegebenes $R_1 + R_2$ zur Existenz einer Eifläche mit diesem $R_1 + R_2$ noch nicht hinreicht; dazu wird nach W. J. Firey[2] eine zusätzliche Ungleichung benötigt.

Übrigens konnte A. D. Aleksandrov eine interessante Verallgemeinerung des Satzes von Christoffel und des Satzes von Minkowski unter Verwendung sogenannter „gemischter Oberflächenfunktionen" beweisen[3].

---

[1] Lewy, H.: Transactions Amer. Math. Soc. **43**, 258–270 (1938).
[2] Firey, W. J.: Mathematika London **14**, 1–13 (1967).
[3] Aleksandrov, A. D.: Math. Sbornik **2**, 1205–1238 (1937).

§ 105. Ein Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen

Schon 1813 zeigte A. Cauchy: *Zwei konvexe Polyeder P und $\tilde{P}$ des euklidischen Raumes, deren Ränder auf ein und dieselbe Weise aus entsprechend kongruenten Polygonen zusammengesetzt sind, müssen als Ganzes kongruent sein*[1]. Dieser Sachverhalt läßt sich nach A. D. Aleksandrov auch so ausdrücken, daß zwei konvexe Polyeder mit im Sinne der „inneren Flächenmetrik" (8) isometrischen Rändern kongruent sind[2]. Nun liegt die Vermutung nahe, daß ein entsprechender Kongruenzsatz auch für zwei beliebige, etwa dreimal stetig differenzierbare und im Sinne von § 76 isometrische Eiflächen richtig ist. Dies ist in der Tat der Fall; so konnte 1927 S. Cohn-Vossen[3] bzw. 1943 G. Herglotz[4] den folgenden Kongruenzsatz beweisen: *Sind die Parametermannigfaltigkeiten M und $\tilde{M}$ zweier Eiflächen F und $\tilde{F}$, welche analytisch bzw. dreimal stetig differenzierbar sind, durch eine analytische bzw. dreimal stetig differenzierbare isometrische Abbildung aufeinander abgebildet, so geht $\tilde{F}$ aus F durch eine kongruente Abbildung (d.h. eine eigentliche oder uneigentliche Bewegung) hervor.*

Wir führen zunächst den Beweis dieses Kongruenzsatzes unter der schwächeren Voraussetzung der dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit nach G. Herglotz mittels einer geeigneten Integralformel durch, welche wir wie folgt herleiten: Drücken wir die gegebene Abbildung von M auf $\tilde{M}$ durch gleiche Parameterwerte aus, so gilt wegen deren Isometrie

$$g_{ij}(u^1, u^2) = \tilde{g}_{ij}(u^1, u^2) \quad (i, j = 1, 2) \tag{114}$$

und damit nach dem Theorema egregium von Gauß (§ 45 (42))

$$K(u^1, u^2) = \tilde{K}(u^1, u^2). \tag{115}$$

(115) bedeutet wegen (114) auf Grund von § 44 (35), (36), daß die Voraussetzung (97) des Hilfssatzes des vorigen Paragraphen mit $a_{ij} = g_{ij}$, $b_{ij} = L_{ij}$, $\tilde{b}_{ij} = \tilde{L}_{ij}$ erfüllt ist, so daß wir

$$\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk}\| \leqq 0 \tag{116}$$

haben, wobei in (116) genau dann Gleichheit eintritt, wenn

$$\tilde{L}_{ij} - L_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{117}$$

ist.

---

[1] Cauchy, A.: Journal École Polytechn. **9**, 87 (1813), Satz 1.
[2] Aleksandrov, A. D.: Konvexe Polyeder. Berlin: Akad. Verl., 1958, S. 150.
[3] Cohn-Vossen, S.: Göttinger Nachr. Math.-Phys. Klasse **1927**, S. 125—134.
[4] Herglotz, G.: Abhandl. Math. Sem. Hamburg **15**, 127—129 (1943).

Um nun eine Integralformel mit der Funktion (116) im Integranden zu finden, rechnen wir das Integral $\int\int_M (\tilde{\mathfrak{x}},\, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)}$ auf zwei verschiedene Arten aus, bei welchem mit $\mathfrak{A}$ diejenige (von den Parametern u^1, u^2 abhängende) Bewegung des Raums bezeichnet ist, welche den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ und die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}$ in den entsprechenden Flächenpunkt $\tilde{\mathfrak{x}}$ und die entsprechenden Vektoren $\tilde{\mathfrak{x}}_1, \tilde{\mathfrak{x}}_2, \tilde{\mathfrak{n}}$ überführt (die Existenz und Eindeutigkeit eines derartigen $\mathfrak{A}$ folgt auf Grund von (114) aus den Überlegungen von § 3!). Jetzt wird einerseits nach § 55 (120):

$$(118)\quad \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n} = \mathfrak{A}(-L_{ij}g^{jk}\mathfrak{x}_k\, du^i) = -L_{ij}g^{jk}\, du^i\, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_k = -L_{ij}g^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_k\, du^i$$

sowie

$$(119)\qquad d\tilde{\mathfrak{n}} = -\tilde{L}_{ij}\tilde{g}^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_k\, du^i = -\tilde{L}_{ij}g^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_k\, du^i,$$

und damit analog wie bei (54c)

$$(120)\qquad (d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}) \underset{(\wedge)}{\times} (d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}) = 2\,\|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk}\|\, \tilde{\mathfrak{n}}\, d\tilde{o},$$

woraus zusammen mit (52)

$$(121)\qquad \int\int_M (\tilde{\mathfrak{x}},\, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)} = 2\int\int_M \|(\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk}\|\, \tilde{h}\, d\tilde{o}$$

resultiert. Andererseits haben wir wegen der aus (118), (54c), (115) und (119) folgenden Beziehung $\mathfrak{A}\, d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n} = 2K\tilde{\mathfrak{n}}\, d\tilde{o} = 2\tilde{K}\tilde{\mathfrak{n}}\, d\tilde{o} = d\tilde{\mathfrak{n}} \underset{(\wedge)}{\times} d\tilde{\mathfrak{n}}$:

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathfrak{x}},\, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)} &= 2(\tilde{\mathfrak{x}},\, d\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} - 2(\tilde{\mathfrak{x}},\, d\tilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)}\\ &= 2d(\tilde{\mathfrak{x}},\, \tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} + 2(\tilde{\mathfrak{n}},\, d\tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{n}})_{(\wedge)} - 2d(\tilde{\mathfrak{x}},\, \tilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)}\\ &\quad - 2(\tilde{\mathfrak{n}},\, d\tilde{\mathfrak{x}}, \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)} + 2(\tilde{\mathfrak{x}},\, \tilde{\mathfrak{n}}, d(\mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}))_{(\wedge)}.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man hierbei noch

$$d(a_i\, du^i) = \left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2}\right) du^1\, du^2 = (a_{2;1} - a_{1;2})\, du^1\, du^2 = (a_{i;j}\, du^j) \wedge du^i$$

(vgl. Kap. 4 (194)!), d.h. insbesondere nach (118) sowie Kap. 4 (212), (213) und (210)

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}) &= -(L_{ji}g^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_k)_{;l}\, du^l \wedge du^i = -L_{ji;l}g^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_k du^l \wedge du^i - L_{ji}g^{jk}\tilde{\mathfrak{x}}_{k;l} du^l \wedge du^i\\ &= -L_{ji}g^{kj}\tilde{L}_{kl}\tilde{\mathfrak{n}}\, du^l \wedge du^i,\end{aligned}$$

so erhält man unter Benutzung des Satzes von Stokes, der Orientierbarkeit von M sowie von (54b)

$$\iint_M (\tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n}, d\tilde{\mathfrak{x}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)} = 2 \iint_M (\tilde{\mathfrak{n}}, d\tilde{\mathfrak{x}}, d\tilde{\mathfrak{n}} - \mathfrak{A}\, d\mathfrak{n})_{(\wedge)}$$

$$= -4 \iint_M (\tilde{H} - H)\, d\tilde{o}. \tag{122}$$

Vergleich von (121) und (122) ergibt die von Herglotz gefundene Integralformel

$$\iint_M \| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk} \|\, \tilde{h}\, d\tilde{o} = -2 \iint_M (\tilde{H} - H)\, d\tilde{o}. \tag{123}$$

Durch Vertauschung der Rollen von F und $\tilde{F}$ folgt weiter aus (123) die Formel

$$\iint_M \| (L_{ij} - \tilde{L}_{ij})\, g^{jk} \|\, h\, do = -2 \iint_M (H - \tilde{H})\, do. \tag{124}$$

Die Addition von (123) und (124) liefert endlich unter Benutzung der aus (114) folgenden Beziehung

$$do = \sqrt[+]{\| g_{ij} \|}\, du^1\, du^2 = \sqrt[+]{\| \tilde{g}_{ij} \|}\, du^1\, du^2 = d\tilde{o} \tag{125}$$

die Relation

$$\iint_M \| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk} \|\, (h + \tilde{h})\, do = 0. \tag{126}$$

Nun kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß der Koordinatenursprung gleichzeitig innerer Punkt der von F bzw. von $\tilde{F}$ begrenzten konvexen Körper mit nach innen weisenden Normaleneinheitsvektoren ist (evtl. Translation bzw. Spiegelung von F und $\tilde{F}$!). Dann wird nach (52) $h < 0$ und $\tilde{h} < 0$, und wir erhalten aus (126) in Verbindung mit (116) $\| (\tilde{L}_{ij} - L_{ij})\, g^{jk} \| = 0$, d.h. es gilt (117). Dies bedeutet aber zusammen mit (114), daß die erste und die zweite Grundform von F und $\tilde{F}$ jeweils übereinstimmen, so daß damit auf Grund des Satzes von Bonnet in § 59 F und $\tilde{F}$ als kongruent erkannt sind.

Der im folgenden wiedergegebene Beweis unseres Kongruenzsatzes unter der Voraussetzung der Analytizität stammt von O. K. Zhitomirski[1] und benutzt im Gegensatz zum vorausgegangenen Beweis die Indexmethode. Wie in § 100 wird hierbei der Beweis des Kongruenzsatzes auf den Beweis des folgenden „lokalen Satzes" zurückgeführt:

[1] Siehe Zhitomirski, O. K.: Comptes Rendus Acad. Sci. URSS **25**, 347–349 (1939).

Es seien F' und $\tilde{F}'$ zwei analytische, nichtkongruente Flächenstücke mit jeweils positiv definiter zweiter Grundform[1], *die durch gleiche Parameter aufeinander isometrisch abgebildet seien. Dann ist ein etwaiger „Kongruenzpunkt" p von F' und $\tilde{F}'$, d.h. ein Punkt mit übereinstimmender zweiter Grundform von F' und $\tilde{F}'$ stets isoliert (p besitzt also eine Umgebung O mit p als einzigem Kongruenzpunkt), und der Index $j(p)$ der (etwa „positiven"*[2]*) Schar der durch*

$$Q \equiv (\tilde{L}_{ij} - L_{ij}) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 \tag{127}$$

gegebenen, wegen (116) *reellen „Kongruenzlinien" in p ist negativ.*

Zum Beweis dieses lokalen Satzes beachten wir, daß der für die Kongruenzpunkte und die Kongruenzlinien maßgebende „Differenztensor"

$$D_{ij} = \tilde{L}_{ij} - L_{ij} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{128}$$

wegen (115), § 44 (35), (36) und Fußnote 1 von S. 265 sowie (125) der „Spurbedingung"

$$0 = \tilde{K} - K = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} (\tilde{L}_{ik} \tilde{L}_{jl} - L_{ik} L_{jl}) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} E_{ik} D_{jl} \tag{129}$$

mit

$$E_{ij} = \tilde{L}_{ij} + L_{ij} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{130}$$

und wegen Kap. 4 (213) bzw. (146) den Codazzischen Differentialgleichungen

$$D_{ij;k} = D_{ik;j}$$

bzw.

$$\begin{aligned} D_{11,2} - D_{12,1} &= \Gamma^m_{12} D_{m1} - \Gamma^m_{11} D_{m2} \\ D_{12,2} - D_{22,1} &= \Gamma^m_{22} D_{m1} - \Gamma^m_{12} D_{m2} \end{aligned} \tag{131}$$

genügt. Führt man jetzt o.B.d.A. nach § 93 durch eine analytische Parametertransformation auf F' und $\tilde{F}'$ bezüglich des positiv definiten Tensors E_{ij} „isotherme" Parameter, d.h. Parameter mit

$$E_{11} = E_{22} = \lambda > 0, \; E_{12} = 0 \tag{132}$$

---

[1] Dies läßt sich für ganz F und $\tilde{F}$ stets nach evtl. Spiegelung von F bzw. $\tilde{F}$ erreichen!

[2] Wir nennen diejenige der beiden Lösungsscharen von (127) „positiv", bei der — im positiven Sinn auf F' gesehen — auf die Tangentenrichtungen mit negativem Q diejenigen mit positivem Q folgen.

ein, so folgt aus (129) in Verbindung mit (132)

$$D_{11} + D_{22} = 0, \tag{133}$$

und (131) reduziert sich auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} D_{11,1} + D_{12,2} &= AD_{11} + BD_{12} \\ D_{11,2} - D_{12,1} &= CD_{11} + DD_{12} \end{aligned} \tag{134}$$

mit geeigneten analytischen Funktionen A, B, C, D der Flächenparameter.

Wir machen nun für die (wegen der Nichtkongruenz von F' und $\tilde{F}'$ nicht zusammen identisch verschwindenden) Funktionen D_{11} und D_{12} in (134) den Ansatz

$$D_{11} = d_{11} + R_{11},\ D_{12} = d_{12} + R_{12} \tag{135}$$

mit

$$\begin{aligned} d_{11} &= \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n-\nu\,\nu}\,(u^1 - u^1_{(0)})^{n-\nu}(u^2 - u^2_{(0)})^{\nu} \\ d_{12} &= \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{n-\nu\,\nu}(u^1 - u^1_{(0)})^{n-\nu}\,(u^2 - u^2_{(0)})^{\nu} \end{aligned} \tag{136}$$

sowie

$$\begin{aligned} R_{11} &= \sum_{\mu+\nu>n} \alpha_{\mu\nu}(u^1 - u^1_{(0)})^{\mu}\,(u^2 - u^2_{(0)})^{\nu} \\ R_{12} &= \sum_{\mu+\nu>n} \beta_{\mu\nu}(u^1 - u^1_{(0)})^{\mu}\,(u^2 - u^2_{(0)})^{\nu}, \end{aligned} \tag{137}$$

worin $u^1_{(0)}$, $u^2_{(0)}$ die Parameter des Kongruenzpunkts $\mathfrak{p}$ bedeuten und die natürliche Zahl $n \geqq 1$ so gewählt ist, daß d_{11} und d_{12} nicht gleichzeitig identisch verschwinden. Koeffizientenvergleich ergibt dann:

$$\begin{aligned} d_{11,1} + d_{12,2} &= 0 \\ d_{11,2} - d_{12,1} &= 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$\Phi = d_{11} - i\,d_{12} \tag{138}$$

stellt eine in einer Umgebung von $z_0 = u^1_{(0)} + iu^2_{(0)}$ analytische Funktion des komplexen Parameters $z = u^1 + iu^2$ dar. Auf Grund von (136) zeigt sich weiter, daß die Potenzreihenentwicklung von Φ an der Stelle z_0 nur aus einem Glied besteht:

$$\Phi = c_n(z - z_0)^n \quad (c_n = \alpha_{n\,0} - i\beta_{n\,0} \neq 0). \tag{139}$$

Nun sieht man leicht, daß der Kongruenzpunkt $\mathfrak{p}$ isoliert sein muß. Aus (138) und (139) folgt nämlich

$$\frac{(d_{11})^2 + (d_{12})^2}{|z - z_0|^{2n}} = |c_n|^2 > 0,$$

und damit haben wir wegen (135), (136) und (137) auch

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} \frac{(D_{11})^2 + (D_{12})^2}{|z - z_0|^{2n}} > 0,$$

so daß D_{11}, D_{12} und wegen (133) D_{22} in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{p}$ nicht außer in $\mathfrak{p}$ selbst gleichzeitig verschwinden können. Um den Index $j(\mathfrak{p})$ der positiven Kongruenzlinienschar (127) in $\mathfrak{p}$ zu berechnen, bemerken wir zunächst, daß nach (128), (135), (136), (137) wegen

$$\left.\frac{d_{ij}}{|z - z_0|^n}\right|_{\arg(z-z_0)=\text{const}} = \text{const} \quad (d_{22} = -d_{11} \text{ gesetzt!})$$

und

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} \frac{R_{ij}}{|z - z_0|^n} = 0 \quad (R_{22} = -R_{11} \text{ gesetzt!})$$

der Index dieser Kurvenschar durch den Index $j'(\mathfrak{p})$ der entsprechenden Kurvenschar mit der „Näherungsdifferentialgleichung"

$$q \equiv d_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 \tag{140}$$

beliebig genau approximiert wird, so daß $j(\mathfrak{p})$ wegen seiner Halbzahligkeit mit $j'(\mathfrak{p})$ identisch sein muß:

$$j(\mathfrak{p}) = j'(\mathfrak{p}). \tag{141}$$

$j'(\mathfrak{p})$ läßt sich aber in einfacher Weise dadurch explizit berechnen, daß (140) wegen (138) und $d_{11} + d_{22} = 0$ in der Form

$$q \equiv \operatorname{Re}\left((d_{11} - i\,d_{12})\left(\frac{du^1}{dt} + i\frac{du^2}{dt}\right)^2\right) = \operatorname{Re}\left(\Phi\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = 0 \tag{142}$$

geschrieben werden kann, woraus in Verbindung mit (139) wegen

$$\arg\left(\Phi\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \arg\Phi + 2\arg\frac{dz}{dt}$$

$$= n\arg(z - z_0) + \arg c_n + 2\arg\frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (l \text{ ganz}):$$

(143)

$$j'(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2\pi}\Delta\arg\frac{dz}{dt}\Big|_C = -\frac{n}{4\pi}\,\Delta\,\arg\,(z - z_0)\Big|_C - \frac{1}{4\pi}\Delta\arg c_n\Big|_C = -\frac{n}{2} < 0$$

(C = geeignete Kurve, um p!) folgt. Mit (141) und (143) ist aber der lokale Satz und damit auch unser Kongruenzsatz für analytische Eiflächenpaare vollständig bewiesen.

Übrigens läßt sich die Zhitomirskische Beweismethode unter Benutzung eines Resultats von I. N. Vekua[1] über die Lösungen des partiellen Differentialgleichungssystems (134) so modifizieren, daß man bei ihr die Voraussetzung der Analytizität der beiden Eiflächen durch die (beim Herglotzschen Beweis verwandte) Voraussetzung ihrer dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit ersetzen kann[2]. *Es existiert sogar ein Beweis des Kongruenzsatzes mittels der Maximummethode, auf den wir jedoch nicht eingehen werden*[3].

Wir bemerken statt dessen, daß die Voraussetzung $K > 0$, $\tilde{K} > 0$ für F und $\tilde{F}$ im Kongruenzsatz durch F, $\tilde{F}$ = geschlossene orientierbare Flächen und $K \geqq 0$, $\tilde{K} \geqq 0$ abgeschwächt werden kann[4]. Derartige Flächen beranden nach Chern und Lashof[5] stets konvexe Körper (vgl. § 102), und es gelang A. V. Pogorelov sogar der Nachweis des Kongruenzsatzes für isometrische Randflächen konvexer Körper ohne jegliche Differenzierbarkeitsvoraussetzungen[6]! Läßt man für F und $\tilde{F}$ Gebiete mit $K < 0$, $\tilde{K} < 0$ zu, so kann man unter gewissen Bedingungen selbst in diesem Fall noch auf die Kongruenz der Gebiete mit positiver Gaußscher Krümmung schließen[7]. Übrigens gelten Kongruenzsätze auch für berandete Flächenstücke unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen für die Ränder, wie K. P. Grotemeyer in mehreren Arbeiten gezeigt hat[8].

Kehren wir noch einmal zum Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen zurück. Dieser Satz gestattet folgende Wendung der beiden Translationssätze von § 104: *Stimmen jeweils die dritten Grundformen und die Summe bzw. das Produkt der Hauptkrümmungsradien der beiden durch gleiche Parameterwerte unter Erhaltung der Orientierung aufeinander abgebildeten, dreimal stetig differenzierbaren Eiflächen F und $\tilde{F}$ überein, so sind F und $\tilde{F}$ kongruent.* Aus der Isometrie der „sphärischen Bilder" $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{n} = \tilde{\mathfrak{n}}(u^1, u^2)$ von F und $\tilde{F}$ (mit der positiven Gauß-

---

[1] Vekua, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben. Berlin: Akad. Verl. 1956, S. 17ff.

[2] Siehe dazu Grotemeyer, K. P.: Archiv d. Math. **9**, 382–388 (1958).

[3] Aleksandrov, A. D., Senkin, E. P.: Vestnik Leningrad Univ. **10**, 3–13 (1955).

[4] Siehe Voss, K.: Jahresbericht der DMV **63**, 117–135 (1960), Satz 7.

[5] Chern, S. S., Lashof, K.: Michigan Journal **5**, 5–12 (1958).

[6] Pogorelov, A. V.: Eindeutige Bestimmtheit allgemeiner konvexer Flächen. Berlin: Akad. Verlag 1956.

[7] Aleksandrov, A. D.: Mathem. Sbornik **4** Nr. 1, 69–77 (1938).

[8] Vgl. dazu den Bericht von Efimov, N. W.: Flächenverbiegung im Großen, Berlin: Akad. Verl. 1957.

schen Krümmung 1) folgt nämlich nach unserem Kongruenzsatz, daß etwa F durch eine eigentliche Bewegung in eine Fläche F' mit der Eigenschaft $\mathfrak{n}'(u^1, u^2) = \tilde{\mathfrak{n}}(u^1, u^2)$ übergeführt werden kann. In Ergänzung hierzu konnte V. G. Grove[1] mittels einer Integralformel sogar beweisen: *Stimmen die zweite Grundform und die Gaußsche Krümmung der beiden durch gleiche Parameterwerte unter Erhaltung der Orientierung aufeinander abgebildeten, viermal stetig differenzierbaren Eiflächen F und $\tilde{F}$ überein, so sind F und $\tilde{F}$ kongruent*[2]. In jüngster Zeit hat ein Kollektiv unter Leitung von U. Simon und W. Wendland mit Hilfe der Indexmethode die eben zitierten Resultate wesentlich verallgemeinern können[3].

§ 106. Verbiegung geschlossener Flächen

Der Kongruenzsatz des letzten Paragraphen hat zur Folge, *daß jede Verbiegung einer dreimal stetig differenzierbaren Eifläche F im Sinne von* § 76 *„trivial ist", d.h. durch Anwendung einer stetig von einem reellen Parameter t abhängenden Schar von Bewegungen des euklidischen Raums*

$$\hat{x}_\lambda = \sum_{\mu=1}^{3} b_{\lambda\mu}(t)\, x_\mu + d_\lambda(t) \qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{144}$$

mit

$$\sum_{\lambda=1}^{3} b_{\lambda\mu}(t)\, b_{\lambda\nu}(t) = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{145}$$

und

$$\| b_{\lambda\mu}(t) \| = 1 \tag{146}$$

(vgl. § 3 (30), (31), (32)!*) auf F: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ erzeugt wird.* Dabei entsteht aus F die Flächenschar F_t mit der Darstellung

$$x_\lambda = x_\lambda(u^1, u^2; t) = \sum_{\mu=1}^{3} b_{\lambda\mu}(t)\, x_\mu(u^1, u^2) + d_\lambda(t) \qquad (\lambda = 1, 2, 3), \tag{147}$$

wobei o.B.d.A. $F = F_0$, d.h.

$$b_{\lambda\mu}(0) = \delta_{\lambda\mu}, \quad d_\lambda(0) = 0 \tag{148}$$

gelte. Zur Vermeidung unnötiger Schreibarbeit kürzen wir nun (144) durch

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}(t)\, \mathfrak{x} + \mathfrak{a}(t)$$

---

[1] Grove, V. G.: Proceedings Amer. Math. Soc. 8, 777–786 (1957).

[2] Ein einfacher Beweis dieser Integralformel findet sich bei Leichtweiß, K.: Atti del Convegno di Geometria Differenziale, Roma 1972.

[3] Siehe Huck, H. — Roitzsch, R. — Simon, U. — Vortisch, W. — Walden R. — Wegner, B. — Wendland, W.: Beweismethoden der Differentialgeometrie im Großen. TU Berlin — TH Darmstadt 1972.

ab, wobei wir uns die Koeffizienten $b_{\lambda\mu}(t)$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$ zu einer „quadratischen Matrix" $\mathfrak{A}(t)$ und die Koeffizienten $d_\lambda(t)$ bzw. die Koordinaten x_λ und $\hat{x}_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ zu den „Spaltenmatrizen" $\mathfrak{a}(t)$ bzw. $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ zusammengefaßt denken und ganz allgemein die Addition der Spaltenmatrizen elementweise sowie die Multiplikation einer quadratischen Matrix $\mathfrak{C} = (c_{\lambda\mu})$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$ mit einer Spaltenmatrix $\mathfrak{b} = (b_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ durch

$$\mathfrak{C}\mathfrak{b} = \left(\sum_{\mu=1}^{3} c_{\lambda\mu} b_\mu\right) \qquad (\lambda = 1, 2, 3) \tag{149}$$

definieren. Damit schreibt sich (147) in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2; t) = \mathfrak{A}(t)\,\mathfrak{x}(u^1, u^2) + \mathfrak{a}(t). \tag{150}$$

Es bleibt jedoch zunächst die Möglichkeit offen, daß die Eifläche F eine „infinitesimale Verbiegung", d. h. eine Variation

$$\delta\mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\bigg|_{t=0} \varepsilon = \mathfrak{z}\varepsilon \tag{151}$$

mit der Eigenschaft

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial(\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \varepsilon = (\mathfrak{z}_i \mathfrak{x}_j + \mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_j)\,\varepsilon = 0 \qquad (i, j = 1, 2) \tag{152}$$

(vgl. § 25!, $\mathfrak{z}$ = dreimal stetig nach u^1, u^2 differenzierbar) besitzt, welche in dem Sinne nicht „trivial" ist, daß sie nicht durch Differentiation der (als differenzierbar von t abhängend vorausgesetzten) Flächenschar (150) nach t an der Stelle $t = 0$ entsteht. Unter einer trivialen infinitesimalen Verbiegung ist hierbei also eine Variation mit

$$\mathfrak{z} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}(0)\,\mathfrak{x} + \frac{d\mathfrak{a}}{dt}(0), \tag{153}$$

d. h.

$$\mathfrak{z}_i = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}(0)\,\mathfrak{x}_i \qquad (i = 1, 2) \tag{154}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial t}(0) = \frac{(\mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{z}_2)}{W} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}(0)\,\mathfrak{n} \tag{155}$$

zu verstehen, wobei die Elemente $\frac{db_{\lambda\mu}}{dt}(0)$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$ der quadratischen Matrix $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}(0)$ die durch Differentiation von (145) nach t an $t = 0$ wegen (148) entstehende Eigenschaft

$$\frac{db_{\nu\mu}}{dt}(0) + \frac{db_{\mu\nu}}{dt}(0) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{156}$$

besitzen müssen, sonst aber wie die Elemente der Spaltenmatrix $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}(0)$ ganz beliebig gewählt werden können. Definiert man aus den drei wesentlichen Elementen der wegen (156) „schiefsymmetrischen" Matrix $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}(0)$ noch den Vektor

$$\mathfrak{y} = \left(-\frac{db_{23}}{dt}(0), -\frac{db_{31}}{dt}(0), -\frac{db_{12}}{dt}(0)\right), \tag{157}$$

so läßt sich übrigens (153) auf Grund von (149) und der Definition § 2 (21) des äußeren Produkts auch in der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{c} \quad (\mathfrak{c} = \text{const}) \tag{158}$$

schreiben. Hieraus wird ersichtlich, daß das eine triviale infinitesimale Verbiegung definierende „Geschwindigkeitsfeld" $\mathfrak{z}$ von F durch Addition eines konstanten Geschwindigkeitsfeldes zu dem Geschwindigkeitsfeld einer Drehung um die in Richtung von $\mathfrak{y}$ durch den Koordinatenursprung verlaufende Achse entsteht (vgl. § 11). Daher kann der konstante Vektor $\mathfrak{y}$ auch als „Drehvektor" von $\mathfrak{z}$ angesehen werden; er wird als „Drehriß" der Verbiegung bezeichnet.

Nun beweisen wir die folgende von H. Weyl und W. Blaschke[1] stammende Verschärfung der zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Behauptung: *Jede dreimal stetig differenzierbare Eifläche F ist „starr", d.h. sie gestattet nur triviale infinitesimale Verbiegungen.* Um dies einzusehen, nehmen wir einmal an, daß F eine durch das dreimal stetig differenzierbare, von den Flächenparametern abhängige Vektorfeld $\mathfrak{z}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{z}_i \mathfrak{x}_j + \mathfrak{z}_j \mathfrak{x}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{159}$$

bestimmte infinitesimale Verbiegung besitzt. Dann existiert genau eine (von u^1, u^2 zweimal stetig differenzierbar abhängende) Matrix $\mathfrak{C} = (c_{\lambda\mu})$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{C}\mathfrak{x}_i = \mathfrak{z}_i \quad (i = 1, 2) \tag{160}$$

und

$$\mathfrak{C}\mathfrak{n} = \frac{1}{W}\left((\mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{z}_2)\right) \quad {}^{((2))} \tag{161}$$

(vgl. (154) und (155)!), denn diese Tatsache ist auf Grund von (149) mit der eindeutigen Lösbarkeit von drei linearen inhomogenen Gleichungs-

[1] Siehe dazu etwa Weyl, H.: Berliner Sitzungsberichte (1917) S. 250–266 und Blaschke, W.: Math. Zeitschrift **9**, 142–146 (1921).

((2)) Die auf den rechten Seiten von (160) und (161) stehenden Spaltenmatrizen sind mit den Komponenten der angegebenen Vektoren als Elementen gebildet!

systemen (aus je drei Gleichungen mit drei Unbekannten) mit der von Null verschiedenen gemeinsamen Koeffizientendeterminante $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n}) = W$ äquivalent. Hieraus errechnet sich wegen (159) und § 2 (28) für die beliebig gewählten Vektoren $\mathfrak{a} = \alpha_1\mathfrak{x}_1 + \alpha_2\mathfrak{x}_2 + \alpha\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b} = \beta_1\mathfrak{x}_1 + \beta_2\mathfrak{x}_2 + \beta\mathfrak{n}$, daß die Summe der inneren Produkte von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{b}$ [(1)] nämlich

$$\Big(\beta_1\mathfrak{x}_1 + \beta_2\mathfrak{x}_2 + \beta\mathfrak{n}\Big)\Big(\alpha_1\mathfrak{z}_1 + \alpha_2\mathfrak{z}_2 + \frac{\alpha}{W}\big((\mathfrak{z}_1\times\mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{z}_2)\big)\Big)$$
$$+\Big(\alpha_1\mathfrak{x}_1 + \alpha_2\mathfrak{x}_2 + \alpha\mathfrak{n}\Big)\Big(\beta_1\mathfrak{z}_1 + \beta_2\mathfrak{z}_2 + \frac{\beta}{W}\big((\mathfrak{z}_1\times\mathfrak{x}_2) + (\mathfrak{x}_1\times\mathfrak{z}_2)\big)\Big)$$

verschwindet. Dies bedeutet nach Spezialisierung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu Einheitsvektoren die Schiefsymmetrie von $\mathfrak{C} = (c_{\lambda\mu})$ $(\lambda, \mu = 1, 2, 3)$, so daß also nach dem im letzten Abschnitt Gesagten (160) mittels des durch

$$\mathfrak{y} = -(c_{23}, c_{31}, c_{12}) \tag{162}$$

definierten, zweimal stetig differenzierbar von u^1, u^2 abhängenden „Drehrisses" $\mathfrak{y}$ der Verbiegung von F auch in der Form

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{y}\times\mathfrak{x}_i \quad [(2)] \qquad (i = 1, 2) \tag{163}$$

oder

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{y}\times d\mathfrak{x} \tag{164}$$

geschrieben werden kann. Durch äußere Ableitung von (164) folgt nun

$$0 = \underset{(\wedge)}{d\mathfrak{y}\times d\mathfrak{x}} = (\mathfrak{y}_i\times\mathfrak{x}_j)\, du^i \wedge du^j = \varepsilon^{ij}(\mathfrak{y}_i\times\mathfrak{x}_j)\, do, \tag{165}$$

woraus sich nach innerer Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1$ bzw. $\mathfrak{x}_2$: $\mathfrak{y}_1\mathfrak{n} = 0$ bzw. $\mathfrak{y}_2\mathfrak{n} = 0$ oder

$$\mathfrak{y}_i = \alpha_i^j\mathfrak{x}_j \qquad (i = 1, 2) \tag{166}$$

ergibt.

Die „Drehrißfläche" $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u^1, u^2)$ *ist daher in den nichtsingulären Punkten (d.h. den Punkten mit* $\mathfrak{y}_1\times\mathfrak{y}_2 \neq 0$*) auf* F *„durch parallele Normalen" bezogen.*

Nach diesen Vorbereitungen gilt es, sich eine geeignete Integralformel zu verschaffen, um die Integralformelmethode zum Beweis unseres Starrheitssatzes anwenden zu können. *Zu diesem Zweck denken wir uns die sich auf die Flächen* $F = F_0$ *und* $\tilde{F} = F_t$ *der zu Beginn dieses Para-*

[(1)] Zur Terminologie vgl. Fußnote 2 von S. 283.

[(2)] Hierdurch ist $\mathfrak{y}$ eindeutig bestimmt, denn aus (163) folgen für die durch (162) definierte schiefsymmetrische Matrix $\mathfrak{C}$ die Beziehungen (160) und (161), durch die $\mathfrak{C}$ eindeutig bestimmt ist!

graphen definierten und als zweimal stetig differenzierbar von t abhängend vorausgesetzten Flächenschar beziehende Herglotzsche Relation (126) *zweimal nach t an der Stelle* $t = 0$ *abgeleitet*, was

$$\iint_M 2 \left\| \frac{\partial L_{ij}}{\partial t} g^{jk} \right\| 2h \, do = 0$$

ergibt. Dies läßt sich auf Grund von (121), (125), (156), (157), (166) und § 2 (29) auch in der Form

$$\iint_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathfrak{x}(t), d(\mathfrak{A}(t)\,\mathfrak{n}) - \mathfrak{A}(t)\,d\mathfrak{n}, d(\mathfrak{A}(t)\,\mathfrak{n}) - \mathfrak{A}(t)\,d\mathfrak{n})_{(\wedge)\,t=0}$$

$$= 2 \iint_M \left(\mathfrak{x}, \left(d\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}(0)\right)\mathfrak{n}, \left(d\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}(0)\right)\mathfrak{n}\right)_{(\wedge)} = 2 \iint_M (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}\times\mathfrak{n}, d\mathfrak{y}\times\mathfrak{n})_{(\wedge)}$$

$$= 2 \iint_M (\mathfrak{n}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{y})(\mathfrak{x}\mathfrak{n}) = 2 \iint_M (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{y}) = 0$$

schreiben und stellt eine Integralformel dar, welche nicht nur im Falle der trivialen Verbiegung (150), d. h. $\mathfrak{y} = \text{const}$, sondern auch für die unserem Beweis zugrunde gelegte, beliebige infinitesimale Verbiegung von F gültig ist. In der Tat gilt nämlich wegen (165)

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, d\mathfrak{y}) = -\mathfrak{y}(d\mathfrak{x}\times d\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{y}) \tag{167}$$

und damit nach dem Satz von Stokes sowie (166):

$$\iint_M (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{y}) = \iint_M (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{y}_j)\, du^i \wedge du^j = \iint_M \alpha_i^k \alpha_j^l (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l)\, du^i \wedge du^j$$

$$= \iint_M \alpha_i^k \alpha_j^l \varepsilon_{kl} h \varepsilon^{ij}\, do = 2 \iint_M \|\alpha_i^j\|\, h\, do = 0 \quad [1]. \tag{168}$$

Der Integrand der von W. Blaschke[2] stammenden Formel (168) wechselt sein Vorzeichen nicht, wie man folgendermaßen einsehen kann: Aus (165) folgt nach kovarianter Ableitung unter Benutzung von Kap. 4 (199), (203), (205), (210) und von (166)

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{lm}\mathfrak{x}_m\left(\varepsilon^{ij}(\mathfrak{y}_i\times\mathfrak{x}_j)\right)_{;l} = \varepsilon^{lm}\mathfrak{x}_m\left(\varepsilon^{ij}(\mathfrak{y}_{i;l}\times\mathfrak{x}_j) + \varepsilon^{ij}(\mathfrak{y}_i\times\mathfrak{x}_{j;l})\right) \\ &= \varepsilon^{lm}\varepsilon^{ij}\varepsilon_{jm}(\mathfrak{y}_{i;l}\mathfrak{n}) + \varepsilon^{lm}\varepsilon^{ij}L_{jl}(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{n}) = \varepsilon^{il}(\mathfrak{y}_{i;l}\mathfrak{n}) \\ &\quad + \varepsilon^{ml}\varepsilon^{ij}L_{jl}\alpha_i^k(\mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m, \mathfrak{n}) = \varepsilon^{ij}\varepsilon^{ml}L_{jl}\alpha_i^k\varepsilon_{km} \quad [3]. \end{aligned} \tag{169}$$

Dies bedeutet, daß die Voraussetzung (96) des Hilfssatzes von § 104 mit $a^{ij} = \varepsilon^{il}\varepsilon^{jm}L_{lm}$, $b_{ij} = \alpha_i^k\varepsilon_{kj} = \alpha_j^k\varepsilon_{ki} = b_{ji}$ (vgl. (165) und (166)) und

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 265.

[2] Siehe Blaschke, W.: Math. Zeitschrift **9**, 142—146 (1921).

[3] Die Formel (169) läßt sich übrigens beim Vorliegen der trivialen Verbiegung (150) auch durch einmalige Differentiation von (129) nach t an der Stelle $t = 0$ gewinnen!

$\tilde{b}_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2)$ erfüllt ist[1], so daß wir

$$\|\alpha_i^k \varepsilon_{kj} - 0\| = W^2 \|\alpha_i^k\| \leqq 0 \tag{170}$$

haben. Wegen der Gültigkeit der Integralformel (168) und wegen $h < 0$ (o.B.d.A. sei nämlich der Koordinatenursprung im Innern von F gelegen!) tritt nun in (170) überall Gleichheit ein, d.h. nach dem erwähnten Hilfssatz gilt

$$\alpha_i^k \varepsilon_{kj} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \text{ oder } \alpha_i^k = 0 \quad (i, k = 1, 2).$$

Jetzt hat aber (166) $\mathfrak{y}_i = 0$ $(i = 1, 2)$ oder $\mathfrak{y} = \text{const}$ zur Folge, womit unsere Verbiegung von F als trivial erkannt und der Starrheitssatz vollständig bewiesen ist.

Übrigens hat E. Rembs (mittels eines Reihenansatzes für $\mathfrak{z}$) gezeigt, *daß unter der Schar von „taillierten" analytischen Drehflächen (d.h. von Drehflächen mit einer Zone negativer Gaußscher Krümmung)*:

$$\big((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2\big)^2 + 2c^2\big((x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2\big) = 1 - 2c^2$$

mit $c = \text{const}$, $\frac{1}{3} < c^2 < \frac{1}{2}$ *(Kugel für* $c^2 = 0$, *Rotationsfläche der Lemniskate für* $c^2 = \frac{1}{2}$!*) abzählbar unendlich viele Flächen* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *mit nichttrivialer infinitesimaler (durch* $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ *bestimmter) Verbiegung existieren*[2]. Dies ist insbesondere insofern bemerkenswert, als jede dieser Flächen Anlaß zu einem Paar von Flächen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{(\nu)} + t\mathfrak{z}^{(\nu)}, \ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{(\nu)} - t\mathfrak{z}^{(\nu)} \quad (t = \text{const} > 0, \text{ hinreichend klein})$$

gibt, welche zwar wegen

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mathfrak{x}_i^{(\nu)} + t\mathfrak{z}_i^{(\nu)})\,(\mathfrak{x}_j^{(\nu)} + t\mathfrak{z}_j^{(\nu)})\,du^i\,du^j = (\mathfrak{x}_i^{(\nu)}\mathfrak{x}_j^{(\nu)} + t^2\mathfrak{z}_i^{(\nu)}\mathfrak{z}_j^{(\nu)})\,du^i\,du^j \\ &= (\mathfrak{x}_i^{(\nu)} - t\mathfrak{z}_j^{(\nu)})\,(\mathfrak{x}_j^{(\nu)} - t\mathfrak{z}_j^{(\nu)})\,du^i\,du^j \quad \text{(vgl. (152)!)} \end{aligned}$$

isometrisch, aber — wie Rembs gleichfalls zeigen konnte — keineswegs kongruent sind.

§ 107. Existenz geschlossener bzw. vollständiger Flächen mit vorgegebener erster Grundform

Nach den Eindeutigkeitsaussagen in der Flächentheorie im Großen der letzten Paragraphen soll hier kurz zum Problem der Existenz einer geschlossenen bzw. vollständigen Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum mit vorgegebener Flächenmetrik oder — damit gleichbedeu-

[1] Die Voraussetzung der positiven Definitheit der quadratischen Formen $b_{ij}\,du^i\,du^j$ und $\tilde{b}_{ij}\,du^i\,du^j$ ist nämlich beim Vorliegen der Voraussetzung (96) unnötig, wie aus dem Beweis des Hilfssatzes ersichtlich wird!

[2] Siehe Rembs, E.: Math. Zeitschrift **56**, 271–279 (1952).

tend — mit vorgegebener erster Grundform Stellung genommen werden. H. Weyl behauptete schon 1916, *daß jede auf der Parametermannigfaltigkeit M einer zweidimensionalen Sphäre (vgl. § 97!) gegebene, positiv definite, hinreichend oft stetig differenzierbare quadratische Differentialform $ds^2 = a_{ij}\,du^i\,du^j$ mit überall positiver Gaußscher Krümmung erste Grundform einer geeigneten Eifläche ist.* Er benutzte zu seinem sehr komplizierten Beweis die Existenz einer die gegebene Differentialform mit der ersten Grundform der in den euklidischen Raum eingebetteten Kugel verbindenden, von einem reellen Parameter τ stetig abhängenden Schar von quadratischen Differentialformen; allerdings hat er ihn nicht zu Ende geführt[1]. Dies besorgten erst viel später L. Nirenberg[2] bzw. E. Heinz[3] für den Fall einer viermal stetig bzw. zweimal stetig differenzierbar vorgegebenen quadratischen Differentialform ds^2. Ein ganz andersartiger Beweis der Existenzbehauptung von Weyl, bei welchem nur geringe Voraussetzungen an die innere Flächenmetrik von M gemacht werden (vgl. § 97!), geht auf A. D. Aleksandrov[4] zurück. Er beruht auf einer Formulierung und dem Beweis des in Rede stehenden Satzes für konvexe Polyeder und dem Grenzübergang von diesen Polyedern zur Randfläche eines konvexen Körpers.

Nach den eben erwähnten Möglichkeiten einer „Realisierung" der auf einer Sphäre M beliebig vorgegebenen, positiv definiten quadratischen Differentialform mit positiver Gaußscher Krümmung als erster Grundform einer Eifläche scheint es überraschend, daß es Fälle gibt, bei denen sich eine auf einer Ebene M gegebene, positiv definite quadratische Differentialform nicht als erste Grundform einer Fläche des euklidischen Raums realisieren läßt. Typisches Beispiel für diese Tatsache ist der schon 1901 von D. Hilbert bewiesene Satz, *daß die durch*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{171}$$

auf der Poincaréschen Halbebene $M: y > 0$ (vgl. § 83 und § 84!) gegebene, positiv definite quadratische Differentialform mit der konstanten Gaußschen Krümmung $K = -1$ nicht erste Grundform einer viermal stetig differenzierbaren Fläche F im euklidischen Raum sein kann[5].

Um dies einzusehen, denken wir uns auf einer derartigen, notwendig nabelpunktfreien Fläche F für ein beliebiges, samt Rand in M liegendes, beschränktes Teilgebiet M_1 von M zweimal stetig differenzierbar von x

[1] Siehe Weyl, H.: Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. Zürich **61**, 40—72 (1915).
[2] Siehe Nirenberg, L.: Communications Pure Applied Math. **6**, 337—394 (1953).
[3] Siehe Heinz, E.: Journal Math. and Mech. **11**, 421—454 (1962).
[4] Siehe Aleksandrov, A. D.: Die innere Geometrie der konvexen Flächen, Berlin: Akad. Verl. 1955, S. 51 Theorem A.
[5] Siehe Hilbert, D.: Transactions Amer. Math. Soc. **2**, 87—99 (1901).

und y abhängende Krümmungslinienparameter $u^1 = u^1(x, y)$, $u^2 = u^2(x, y)$ eingeführt[1]. Dann gilt nach (49) in Verbindung mit dem aus $K = -1$ folgenden Ansatz

$$(172) \qquad r = \frac{1}{R_1} = \cot\sigma, \quad \bar{r} = \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{r} = -\tan\sigma \quad \left(0 < \sigma < \frac{\pi}{2}\right):$$

$$\frac{g_{11,2}}{g_{11}} = 2\sigma_2 \cot\sigma, \quad \frac{g_{22,1}}{g_{22}} = -2\sigma_1 \tan\sigma$$

oder integriert

$$(173) \qquad g_{11} = f_1 \sin^2\sigma, \quad g_{22} = f_2 \cos^2\sigma,$$

wobei die positiven, stetig differenzierbaren Funktionen f_1 bzw. f_2 nur von u^1 bzw. u^2 abhängen. Durch die zweimal stetig differenzierbare „Skalentransformation"

$$(173a) \qquad u^{1*} = \int_{u^1_{(0)}}^{u^1} \sqrt[+]{f_1}\, du^1, \quad u^{2*} = \int_{u^2_{(0)}}^{u^2} \sqrt[+]{f_2}\, du^2$$

($u^1_{(0)}$, $u^2_{(0)}$ = Parameter eines beliebigen, fest gewählten Punktes $p \in M$!)

spezialisiert sich (173) nach Kap. 4 (8a) zu

$$(174) \qquad g^*_{11} = \sin^2\sigma, \quad g^*_{22} = \cos^2\sigma,$$

woraus in Verbindung mit (48) und (172)

$$(175) \qquad L^*_{11} = \cos\sigma \sin\sigma, \quad L^*_{22} = -\cos\sigma \sin\sigma$$

resultiert. Damit nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien wegen $L^*_{12} = 0$ (vgl. § 46 (50)) die Gestalt

$$(176) \quad L^*_{ij}\, du^{i*}\, du^{j*} = \cos\sigma \sin\sigma\, (du^{1*} + du^{2*})\, (du^{1*} - du^{2*}) = 0$$

an. Führen wir also durch

$$(177) \qquad p^1 = \frac{1}{2}(u^{1*} + u^{2*}), \quad p^2 = \frac{1}{2}(-u^{1*} + u^{2*})$$

neue Parameter ein, so wird $dp^1\, dp^2 = 0$ die Differentialgleichung der Asymptotenlinien, so daß dieselben auch durch $p^1 = \text{const}$, $p^2 = \text{const}$ dargestellt werden. Aus (174), $g^*_{12} = 0$ (vgl. § 46 (50)) und (177) errechnet sich dann für die erste Grundform von F auf M_1:

$$(178) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= g^*_{ij}\, du^{i*}\, du^{j*} = \sin^2\sigma (du^{1*})^2 + \cos^2\sigma (du^{2*})^2 \\ &= (dp^1)^2 + 2\cos 2\sigma\, dp^1\, dp^2 + (dp^2)^2. \end{aligned}$$

Damit erweisen sich p^1 bzw. p^2 als Bogenlängenparameter der Asymptotenlinien $p^2 = \text{const}$ bzw. $p^1 = \text{const}$, die durch die Tatsache, daß der Punkt p nach (173a) und (177) die Parameter $p^1 = p^2 = 0$ besitzt, geometrisch

[1] Vgl. Fußnote 1, S. 254.

eindeutig bestimmt sind. Führt man daher dieselbe Konstruktion von „Asymptotenlinienparametern" p^1, p^2 für ein M_1 umfassendes Teilgebiet M_2 von M durch, so findet man auf M_2 Asymptotenlinienparameter, welche auf M_1 mit den ursprünglichen Asymptotenlinienparametern übereinstimmen. Eine Ausschöpfung von M durch samt Rand in M liegende, beschränkte Teilgebiete M_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ergibt also eine zweimal stetig differenzierbare und eineindeutige Transformation

$$p^1 = g_1(x, y), \quad p^2 = g_2(x, y) \tag{179}$$

der Ausgangsparameter x, y (mit $y > 0$) von M auf die normierten Asymptotenlinienparameter p^1, p^2 von F mit überall positiver Funktionaldeterminante. Durch diese Transformation wird die Halbebene M auf ein Gebiet G der (p^1, p^2)-Ebene abgebildet, *welches — wie wir gleich sehen werden — mit der ganzen (p^1, p^2)-Ebene übereinstimmt.*

Zu diesem Zweck genügt es wegen der Bogenlängenparametereigenschaft von p^1 und p^2 einzusehen, daß jede (zweimal stetig differenzierbare) Asymptotenlinie $p^1 = a = \text{const}$ bzw. $p^2 = b = \text{const}$ oder $x = h_1(a, s)$, $y = h_2(a, s)$ bzw. $x = h_1(s, b)$, $y = h_2(s, b)$ [1] (nach beiden Seiten) unendlich lang ist. Anderenfalls existierte nämlich auf F etwa eine Asymptotenlinie C mit der Darstellung

$$x = h_1(a, s), \quad y = h_2(a, s) \qquad (-\infty \leqq c < s < d < +\infty)$$

für ihren Bogenlängenparameter s. Jetzt folgt aus den sich aus (171) ergebenden Abschätzungen

$$ds \geqq \frac{|dy|}{y}, \qquad ds \geqq \frac{|dx|}{y},$$

daß C keine Punktfolge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = d$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_2(a, s_\nu) = 0$ oder $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_2(a, s_\nu) = +\infty$ oder $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_1(a, s_\nu) = \pm\infty$ enthalten kann. Der Halbbogen C' mit $s_0 \leqq s < d$ liegt daher in einem abgeschlossenen Rechteck $-\infty < x_1 \leqq x \leqq x_2 < +\infty$, $0 < y_1 \leqq y \leqq y_2 < +\infty$ von M. Jede unendliche Punktfolge von C' besitzt damit nach dem Weierstraßschen Häufungsstellensatz eine konvergente Teilfolge, d.h. es existiert insbesondere eine Folge $\{s_\nu\}$ von Parameterwerten mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = d$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_1(a, s_\nu) = x_0$ sowie $\lim\limits_{\nu\to\infty} h_2(a, s_\nu) = y_0 \geqq y_1 > 0$. Auf Grund der Abschätzung

$$\sqrt[+]{dx^2 + dy^2} \leqq y_2\, ds$$

(vgl. (171)!) findet man sogar

$$\lim_{s\to d-0} h_1(a, s) = x_0, \qquad \lim_{s\to d-0} h_2(a, s) = y_0,$$

[1] Hierbei sei $x = h_1(p^1, p^2)$, $y = h_2(p^1, p^2)$ die Umkehrung der Transformation (179)!

d.h. C' „läuft für $s \to d - 0$ in den Punkt (x_0, y_0) von M hinein". Nach den Überlegungen des vorigen Abschnitts läßt sich dann aber C' über (x_0, y_0) hinaus als Asymptotenlinie fortsetzen im Widerspruch zur Annahme $s < d < +\infty$.

Damit ist aber gezeigt, daß die normierten Asymptotenlinienparameter p^1, p^2 von F die ganze (p^1, p^2)-Ebene erfüllen. Nun gilt für den Flächeninhalt O eines von Asymptotenlinien begrenzten „Vierecks" $c_1 \leqq p^1 \leqq d_1$, $c_2 \leqq p^2 \leqq d_2$ von F nach (178)

$$O = \int_{c_1}^{d_1} \int_{c_2}^{d_2} \sin \omega \, dp^1 \, dp^2, \tag{180}$$

wobei $\omega = 2\sigma$ den Winkel zwischen den beiden durch einen Punkt hindurchgehenden Asymptotenlinien darstellt $(0 < \omega < \pi)$. Unter Benutzung der Gaußschen Integrierbarkeitsbedingung § 58 (143) und (145) für F in den Parametern u^{1*}, u^{2*} in Verbindung mit (174), (175) finden wir aber für den Integranden in (180)

$$\sin \omega = \frac{\partial^2 \omega}{(\partial u^{2*})^2} - \frac{\partial^2 \omega}{(\partial u^{1*})^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^1 \, \partial p^2}. \tag{181}$$

Hieraus folgt für O die Darstellung

$$O = \int_{c_1}^{d_1} \int_{c_2}^{d_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^1 \partial p^2} \, dp^1 \, dp^2 = \int_{c_1}^{d_1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p^1}(p^1, d_2) - \frac{\partial \omega}{\partial p^1}(p^1, c_2) \right) dp^1$$

$$= \omega(d_1, d_2) - \omega(c_1, d_2) - \omega(d_1, c_2) + \omega(c_1, c_2),$$

oder, wenn man die Innenwinkel des Asymptotenlinienvierecks mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bezeichnet (Fig. 26):

$$O = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi \quad (0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_4 < \pi), \tag{182}$$

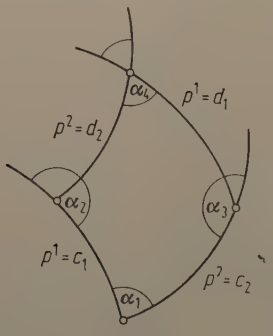


Fig. 26.

eine Formel, die 1878 von J. Hazzidakis angegeben worden ist[1]. (182) hat die bemerkenswerte Ungleichung

$$O < 2\pi$$

zur Folge, woraus durch Grenzübergang $c_1 \to -\infty$, $c_2 \to -\infty$, $d_1 \to +\infty$, $d_2 \to +\infty$ für den Flächeninhalt $O(F)$ von ganz F die Beziehung

$$O(F) \leq 2\pi \tag{183}$$

folgt. Andererseits errechnet man aber aus (171) unmittelbar

$$O(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{y^2} = +\infty. \tag{184}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß (171) nicht erste Grundform einer viermal stetig differenzierbaren Fläche F sein kann, womit der Hilbertsche Satz bewiesen ist.

N. H. Kuiper konnte im Zusammenhang hiermit allerdings nachweisen, daß die Poincarésche Halbebene M immer *einmal* stetig differenzierbar isometrisch in den euklidischen Raum (ohne Selbstdurchdringungen) abgebildet werden kann[2]. Durch diese Abbildung wird eine einmal stetig differenzierbare Fläche F mit der ersten Grundform (171) definiert, bei der man allerdings wegen der fehlenden zweimaligen Differenzierbarkeit nicht von der Gaußschen Krümmung als Produkt der Hauptkrümmungen sprechen kann. Wir bemerken noch, daß die Gegenseiten eines Asymptotenlinienvierecks $c_1 \leqq p^1 \leqq d_1$, $c_2 \leqq p^2 \leqq d_2$ auf einer viermal stetig differenzierbaren Fläche F mit $K \equiv -1$ wegen (178) die gleichen Längen $d_1 - c_1$ bzw. $d_2 - c_2$ besitzen. Derartige (durch $g_{11} = g_{22} = 1$ gekennzeichnete) Kurvennetze auf beliebigen Flächen hat der russische Mathematiker P. Tschebyscheff 1878 untersucht. Spannt man ein Fischnetz über eine krumme Fläche, so bildet es auf ihr ein solches Netz.

Übrigens definiert die quadratische Differentialform (171) auf der Poincaréschen Halbebene M eine vollständige innere Flächenmetrik im Sinne von § 97, was ähnliche Überlegungen wie auf S. 289—290 oder die explizite Gestalt der geodätischen Linien § 83 (61) zeigen.

§ 108. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Flächen mit vollständiger innerer Flächenmetrik

In den abschließenden Paragraphen dieses Kapitels wollen wir die in (8) definierte innere Flächenmetrik und in Verbindung hiermit die geodätischen Linien einer vollständigen Fläche näher untersuchen. Hier-

[1] Hazzidakis, J.: Crelles Journal **88**, 68—73 (1880).

[2] Kuiper, N. H.: Indagationes Math. **17**, 683—689 (1955), Satz 5.

bei spielt es keine Rolle, ob sich die auf der als dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzten Parametermannigfaltigkeit M gegebene, zweimal stetig differenzierbare Differentialform $g_{ij}\,du^i\,du^j$ immer als erste Grundform bei einer Fläche des euklidischen Raums realisieren läßt, oder ob sie lediglich abstrakt auf M vorgegeben ist. Wir interessieren uns also nur noch für die „innere" Differentialgeometrie im Großen.

Eine erste wichtige Folgerung der Vollständigkeit der inneren Flächenmetrik ist zunächst die (beim Beweis des letzten Satzes in § 107 implizit benutzte) Tatsache, *daß jeder Kurvenbogen endlicher Länge konvergiert oder — umgekehrt ausgedrückt — jeder „divergente" Kurvenbogen unendlich lang ist.* Ist nämlich $u^i = u^i(s)$ $(i = 1, 2)$ ein auf Bogenlängenparameter bezogener, stetig differenzierbarer Kurvenbogen C auf M $(s_0 \leq s < d)$ endlicher Länge, so bildet jede Punktfolge $p_\nu = (u^1(s_\nu), u^2(s_\nu))$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ auf C mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = d$ im Sinne der inneren Metrik auf M eine Cauchy-Folge und konvergiert daher wegen der Vollständigkeit dieser Metrik gegen einen Punkt $p_0 = (u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$ von M, d.h. es gilt $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[+]{(u^1(s_\nu) - u^1_{(0)})^2 + (u^2(s_\nu) - u^2_{(0)})^2} = 0$. Es sei nun N_0 eine etwa durch $(u^1 - u^1_{(0)})^2 + (u^2 - u^2_{(0)})^2 \leqq r^2$ $(r > 0)$ gegebene „abgeschlossene Umgebung" von p_0 und es sei

$$M = \operatorname*{Max}_{N_0} \frac{g_{ij}du^i du^j}{(du^1)^2 + (du^2)^2} = \operatorname*{Max}_{N_0} \left\{ \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22}) + \sqrt[+]{\frac{1}{4}(g_{11} + g_{22})^2 - \|g_{ij}\|} \right\} > 0, \tag{185}$$

$$m = \operatorname*{Min}_{N_0} \frac{g_{ij}du^i du^j}{(du^1)^2 + (du^2)^2} = \operatorname*{Min}_{N_0} \left\{ \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22}) - \sqrt[+]{\frac{1}{4}(g_{11} + g_{22})^2 - \|g_{ij}\|} \right\} > 0 \tag{186}$$

(vgl. § 44!). Dann liegen fast alle p_ν in N_0, und wir haben auf Grund von (185) und (8) für diese p_ν

$$\sqrt[+]{(u^1(s_\nu) - u^1_{(0)})^2 + (u^2(s_\nu) - u^2_{(0)})^2} = \int_0^1 \sqrt[+]{\left(\frac{dv^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt[+]{M}} \int_0^1 \sqrt[+]{g_{ij}\frac{dv^i}{dt}\frac{dv^j}{dt}}\, dt \geqq \frac{1}{\sqrt[+]{M}}\, d(p_0, p_\nu) \tag{187}$$

$$\left(v^i(t) = u^i_{(0)} + t(u^i(s_\nu) - u^i_{(0)}), \quad i = 1, 2\right),$$

d.h.

$$\lim_{\nu\to\infty} d(p_0, p_\nu) = 0.$$

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein mit $\varepsilon < r \sqrt[+]{m}$ und $N(\varepsilon)$ so groß gewählt, daß für alle $\nu \geqq N(\varepsilon)$ $d(p_0, p_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d - s_\nu < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Damit gilt für jeden zu einem Parameter $s \geqq s_{N(\varepsilon)}$ gehörenden Punkt p von C

$$d(p_0, p) \leqq d(p_0, p_{N(\varepsilon)}) + d(p_{N(\varepsilon)}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

er kann also nach (8) mit p_0 durch einen stetig differenzierbaren Kurvenbogen $u^i = v^i(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ mit einer ε nicht überschreitenden Länge verbunden werden. Die aus (186) folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geqq \int_0^1 \sqrt[+]{g_{ij}\frac{dv^i}{dt}\frac{dv^j}{dt}}\,dt \geqq \sqrt[+]{m}\int_0^1 \sqrt[+]{\left(\frac{dv^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv^2}{dt}\right)^2}\,dt \\ &\geqq \sqrt[+]{m}\,\sqrt[+]{(u^1(s) - u^1_{(0)})^2 + (u^2(s) - u^2_{(0)})^2}\,^{1} \end{aligned} \tag{188}$$

zeigt nun

$$\lim_{s\to d-0} p = p_0,$$

d.h. C konvergiert für $s \to d - 0$ in der Tat gegen den Punkt p_0 von M.

Insbesondere folgt aus dem damit bewiesenen Satz, *daß jede geodätische Linie von M (nach beiden Seiten) unendlich lang ist*, wie schon in § 97 ohne Beweis erwähnt wurde. Anderenfalls existierte nämlich etwa ein „maximaler" geodätischer Bogen $u^i = u^i(s)$ $(s_0 \leqq s < d)$ mit

$$\lim_{s\to d-0} u^i(s) = u^i_{(0)} \quad (i = 1, 2),$$

wobei wegen der aus (186) folgenden Ungleichung

$$\sqrt[+]{\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2} \leqq \frac{1}{\sqrt[+]{m}}\sqrt[+]{g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}} = \frac{1}{\sqrt[+]{m}}$$

die Ableitungen $\frac{du^i}{ds}$ und damit wegen § 92 (139) auch die zweiten Ableitungen $\frac{d^2u^i}{ds^2}$ $(i = 1, 2)$ beschränkt sind. Dies hat aber nach dem Mittel-

[1] Wegen $\varepsilon < \sqrt[+]{m}\,r$ liegt der p_0 und p verbindende Kurvenbogen ganz in N_0 (sonst ergibt Abschätzung (188) für den in N_0 liegenden Teil dieses Kurvenbogens sofort einen Widerspruch!).

wertsatz der Differentialrechnung und dem Cauchyschen Konvergenzkriterium die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{s \to d-0} \frac{du^i}{ds}(s) = a_0^i \quad (i = 1, 2)$$

zur Folge, und man sieht jetzt leicht, daß die für $s = d$ durch den Punkt $p_0 = (u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$ mit der durch (a_0^1, a_0^2) gegebenen „Anfangstangente" gehende geodätische Linie „Fortsetzung" des gegebenen geodätischen Bogens über $s = d$ hinaus im Widerspruch zu seiner „Maximalität" darstellt.

Übrigens zeigt die Überlegung, die zur Ungleichung (188) führte, daß die „Abstandsfunktion" d der inneren Flächenmetrik (8) nicht nur die trivialen Eigenschaften

$$(188a) \quad d(p, p) = 0, \; d(p, q) = d(q, p), \; d(p, r) \leqq d(p, q) + d(q, r),$$

sondern auch die Eigenschaft

$$d(p, q) > 0 \quad \text{für} \quad p \neq q$$

besitzt. *Sie macht also M zu einem sogenannten „metrischen Raum" und hängt stetig von ihren Argumenten ab,* da auf Grund von (187) und (188) $\lim_{\nu \to \infty} p_\nu = p_0$ und $\lim_{\nu \to \infty} d(p_0, p_\nu) = 0$ gleichbedeutend sind[1], so daß wir wegen $d(p_0, q_0) - d(p_0, p_\nu) \leqq d(p_\nu, q_0) \leqq d(p_\nu, p_0) + d(p_0, q_0)$ (vgl. (188a))

$$(189) \qquad \lim_{\nu \to \infty} d(p_\nu, q_0) = d(p_0, q_0), \text{ falls } \lim_{\nu \to \infty} p_\nu = p_0,$$

haben.

Wir beweisen nun den für die innere Differentialgeometrie der vollständigen Flächen grundlegenden Satz von H. Hopf und W. Rinow[2]: *Zwei beliebige Punkte p und q einer vollständigen Fläche können stets durch einen geodätischen Kurvenbogen verbunden werden, dessen Länge den Wert $d(p, q)$ besitzt und somit nach* (8) *das Minimum der Längen aller p und q verbindenden, stückweise stetig differenzierbaren Kurvenbogen auf der Fläche darstellt*[3].

Zu diesem Zweck betrachten wir einmal nach einer Idee von de Rham[4] die „Abstandskreise" $K_\varrho(p)$ um p vom Radius ϱ, d. h. die Mengen aller Punkte q von M mit $d(p, q) \leqq \varrho$ $(\varrho \geqq 0)$, und darin jeweils die

---

[1] Dies bedeutet, daß die Metrik d auf M die ursprünglich gegebene Topologie „induziert", vgl. Schubert, H.: Topologie. Stuttgart: Teubner 1964, S. 11—13.

[2] Siehe Hopf, H., Rinow, W.: Commentarii Math. Helv. 3, 209—225 (1931), Satz III.

[3] Dieses Minimum ist nämlich gleich dem Minimum aller p und q verbindenden durchweg stetig differenzierbaren Kurvenbogen, wie man durch beliebig kleine „Abrundungen" etwaiger Ecken einsieht!

[4] Siehe de Rham: Commentarii Math. Helv. **26**, 328—344 (1952), S. 342/343.

Mengen $L_\varrho(p)$ aller Punkte s, die mit p durch einen geodätischen Kurvenbogen der Länge $d(p, s)$ verbunden werden können. Trivialerweise gilt $K_0(p) = L_0(p)$, und aus der Gleichheit $L_\varrho(p) = K_\varrho(p)$ für ein $\varrho > 0$ folgt unmittelbar die Gleichheit $L_{\varrho'}(p) = K_{\varrho'}(p)$ für alle $\varrho' < \varrho$. Es sei nun R die obere Grenze aller ϱ, für die $L_\varrho(p) = K_\varrho(p)$ richtig ist ($0 \leqq R \leqq +\infty$). Unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir $R = +\infty$ gezeigt haben.

Um dies einzusehen, nehmen wir indirekt

$$R < +\infty \tag{190}$$

an und zeigen zunächst $L_R(p) = K_R(p)$. Sei also q ein beliebiger Punkt von M mit $d(p, q) \leqq R$. Dann ist entweder $d(p, q) = \varrho < R$, und damit existiert nach Definition von R ein geodätischer Bogen von p nach q der Länge $d(p, q)$, oder wir haben $d(p, q) = R$. In diesem Falle gibt es auf Grund der Definition (8) der inneren Flächenmetrik eine Folge von p und q verbindenden, stetig differenzierbaren Kurvenbogen C_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) mit

$$L(C_\nu) \geqq R$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} L(C_\nu) = R.$$

Wir können daher auf jedem Bogen C_ν einen Punkt s_ν so wählen, daß für die von p nach s_ν verlaufenden Teilbögen C'_ν:

$$L(C'_\nu) < R$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} L(C'_\nu) = R,$$

d.h.

$$d(p, s_\nu) < R \tag{191}$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} d(s_\nu, q) = 0 \tag{192}$$

gilt. Auf Grund von (191) existiert aber nach der Definition von R ein p und s_ν verbindender geodätischer Bogen G_ν der Länge $d(p, s_\nu)$, welcher nach § 78 durch sein (gerichtetes) Linienelement im Punkte p eindeutig bestimmt ist. O.B.d.A. können wir nun annehmen, daß diese Linienelemente für $\nu \to \infty$ gegen ein (gerichtetes) Linienelement in p konvergieren. Durch dieses geht wieder eine geodätische Linie G_0, *welche auf Grund der Vollständigkeit der inneren Flächenmetrik unendlich lang ist.* Insbesondere liegt auf ihr ein Punkt s derart, daß der geodätische Kurvenbogen von p bis s genau die Länge $d(p, q)$ besitzt. Dann folgt aber nach Sätzen über die stetige Abhängigkeit der Lösung eines Systems gewöhn-

licher Differentialgleichungen von ihren Anfangsbedingungen wegen der aus (192) oder

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = q \tag{193}$$

nach (189) folgenden Beziehung $\lim_{\nu\to\infty} d(p, s_\nu) = d(p, q)$:

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = s. \tag{194}$$

(193) zeigt zusammen mit (194), daß p und q durch einen auf G_0 liegenden geodätischen Bogen der Länge $d(p, q)$ verbunden werden können. Damit haben wir gezeigt, daß der beliebige Punkt q aus $K_R(p)$ in jedem Falle zu $L_R(p)$ gehört, womit die Beziehung

$$L_R(p) = K_R(p) \tag{195}$$

bewiesen ist. *Hieraus folgt insbesondere die Kompaktheit von* $K_R(p)$ (vgl. § 97!). Ist nämlich q_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ eine unendliche Punktmenge von $K_R(p)$, so verbinde man die Punkte q_ν durch geodätische Bogen der Länge $d(p, q_\nu) \leqq R$ mit p und gehe sowohl bei den Linienelementen dieser geodätischen Bogen in p als auch bei den Zahlen $d(p, q_\nu)$ zu einer konvergenten Teilfolge über, woraus nach den eben angestellten Überlegungen die Existenz einer gegen einen Punkt aus $K_R(p)$ konvergenten Teilfolge der q_ν folgt.

Nun besitzt nach § 79 jeder Punkt q von M eine Umgebung $U_{\varepsilon(q)}(q)$ mit Riemannschen Normalkoordinaten $v^1 = r\cos\varphi$, $v^2 = r\sin\varphi$, die in diesen Koordinaten durch $(v^1)^2 + (v^2)^2 = r^2 < (\varepsilon(q))^2$ $(\varepsilon(q) > 0)$ beschrieben werden kann, wobei der „Ursprung" q dieses Koordinatensystems die Koordinaten $v^1 = v^2 = 0$ besitzt[1]. Aus Stetigkeitsgründen (vgl. Transformationsformel § 79 (19a)) existiert sogar ein von q abhängendes $\delta(q) > 0$ mit $\delta(q) < \varepsilon(q)$ derart, daß jeder Punkt s aus $U_{\delta(q)}(q)$ ein Riemannsches Normalkoordinatensystem mit Ursprung s besitzt, dessen Geltungsbereich $U_{\delta(q)}(q)$ enthält. Aus der Form Kap.6 (16) des Bogenelementes folgt dann aber nach den Überlegungen am Ende des § 78, daß s mit einem weiteren beliebigen Punkt t von $U_{\delta(q)}(q)$ durch einen geodätischen Kurvenbogen der Länge $d(s, t)$ verbunden werden kann, *der die einzige kürzeste Verbindung zwischen s und t durch einen stückweise stetig differenzierbaren Kurvenbogen darstellt.* Speziell bedeutet dies für $U_{\delta(q)}(q)$, daß diese offene Umgebung von q gerade die Menge aller Punkte t von M mit $d(q, t) < \delta(q)$ ist.

[1] Für die nachfolgenden Überlegungen reicht im Gegensatz zu § 79 die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der die Metrik auf M definierenden quadratischen Differentialform $g_{ij}\,du^i\,du^j$ aus!

Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel gibt es nun in $K_R(p)$ endlich viele Punkte $q_1, \ldots, q_n$ derart, daß die Vereinigungsmenge aller Umgebungen $U_{\frac{1}{2}\delta(q_m)}(q_m)$ die kompakte Menge $K_R(p)$ enthält:

$$K_R(p) \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} U_{\frac{1}{2}\delta(q_m)}(q_m). \tag{196}$$

Wir wählen ein $\delta > 0$ mit

$$\delta < \min_m \frac{\delta(m)}{2}. \tag{197}$$

Auf Grund der Definition von R ist dann $L_{R+\delta}(p)$ eine echte Untermenge von $K_{R+\delta}(p)$, *es gibt also in* $K_{R+\delta}(p)$ *einen Punkt* q, *welcher sich nicht durch einen geodätischen Bogen der Länge* $d(p, q)$ *mit* p *verbinden läßt.* Hierbei ist natürlich nach (195)

$$R < d(p, q) \leqq R + \delta. \tag{198}$$

Auf einer Folge C_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) von Verbindungskurven von p mit q mit $\lim_{\nu\to\infty} L(C_\nu) = d(p, q)$ existiert nun wegen $L(C_\nu) \geqq d(p, q) > R$ jeweils genau ein Punkt s_ν derart, daß für die von p nach s_ν verlaufenden Teilbögen C'_ν

$$L(C'_\nu) = R \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{199}$$

und für die von s_ν nach q verlaufenden Teilbögen C''_ν

$$\lim_{\nu\to\infty} L(C''_\nu) = d(p, q) - R \tag{200}$$

gilt. Wegen (199) oder $d(p, s_\nu) \leqq R$ kann hierbei auf Grund der Kompaktheit von $K_R(p)$ o.B.d.A.

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = s$$

mit der sich aus (189) und (199) ergebenden Relation

$$d(p, s) = \lim_{\nu\to\infty} d(p, s_\nu) \leqq \lim_{\nu\to\infty} L(C'_\nu) = R \tag{201}$$

angenommen werden, woraus zusammen mit (200)

$$d(s, q) = \lim_{\nu\to\infty} d(s_\nu, q) \leqq \lim_{\nu\to\infty} L(C''_\nu) = d(p, q) - R \tag{202}$$

folgt. Anderseits gilt aber nach (188a)

$$d(p, q) \leqq d(p, s) + d(s, q). \tag{203}$$

Durch Einsetzen von (201) und (202) in (203) finden wir jetzt wegen (198)

$$d(p, s) = R \tag{204}$$

und

$$d(s, q) = d(p, q) - R \leqq \delta. \tag{205}$$

Auf Grund von (204) und (195) läßt sich p mit s durch einen geodätischen Bogen G_1 der Länge $d(p, s)$ verbinden. Weiter gehört s nach (204) und (196) einer Umgebung $U_{\frac{1}{2}\delta(q_{m_o})}(q_{m_o})$ $(1 \leqq m_o \leqq n)$ an, d.h. wir haben

$$d(q_{m_o}, s) < \frac{1}{2}\delta(q_{m_o}) < \delta(q_{m_o}). \tag{206}$$

Nach (205) und (197) ist aber $d(s, q) < \frac{1}{2}\delta(q_{m_o})$, und damit gilt wegen (188a):

$$d(q_{m_o}, q) \leqq d(q_{m_o}, s) + d(s, q) < \delta(q_{m_o}). \tag{207}$$

Wegen (206) und (207) gehören s und q beide zu $U_{\delta(q_{m_o})}(q_{m_o})$ und lassen sich daher durch einen geodätischen Bogen G_2 der Länge $d(s, q)$ verbinden. G_1 und G_2 bilden nun zusammengenommen eine Verbindung von p und q, welche nach (204) und (205) die Länge $d(p, s) + d(s, q) = d(p, q)$ besitzt. Diese Verbindung hat an der Stelle s keine „Ecke", weil sie als kürzeste Verbindung zwischen p und q auch „lokal" innerhalb der Umgebung $U_{\delta(s)}(s)$ kürzeste Verbindung ist und somit nach der im letzten Abschnitt dargestellten Konstruktion von $U_{\delta(s)}(s)$ zusammen mit der dort erwähnten Eindeutigkeitsaussage innerhalb von $U_{\delta(s)}(s)$ als „eckenlose" geodätische Linie verlaufen muß. G_1 und G_2 stellen also einen p und q verbindenden geodätischen Kurvenbogen im Widerspruch zur Wahl des Punktes q dar, womit die Annahme (190) als falsch erkannt und der Satz von Hopf und Rinow vollständig bewiesen ist.

Die hier gezeigte Beweismethode wird in der Literatur als „Kontinuitätsmethode" bezeichnet. *Sie beruht darauf, daß die für unseren Satz kennzeichnende Eigenschaft $L_\varrho(p) = K_\varrho(p)$ für eine nichtleere, gleichzeitig abgeschlossene und offene Teilmenge der Menge P^+ aller nichtnegativen reellen Zahlen gültig ist und damit wegen des topologischen „Zusammenhangs"*[1] *von P^+ für alle ϱ aus P^+ zutrifft.* Diese Kontinuitätsmethode wird auch beim Beweis des im letzten Paragraphen erwähnten Weylschen Realisierungssatzes mit Erfolg verwandt.

§ 109. Schnittort und konjugierte Punkte

Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, daß sich zwei beliebige Punkte p, q einer vollständigen Fläche (mit zweimal stetig differenzierbarem $g_{ij}\,du^i\,du^j$) durch einen geodätischen Kurvenbogen verbinden

[1] Siehe dazu Schubert, H.: Topologie. Stuttgart: Teubner 1964, S. 37–38.

lassen, welcher eine kürzeste Verbindung von p und q oder, wie wir im folgenden sagen wollen, eine *„Kürzeste" zwischen p und q* darstellt. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß umgekehrt jede Kürzeste zwischen p und q immer ein geodätischer Kurvenbogen sein muß! Dies ist allerdings in der Tat der Fall, man braucht nämlich nur nach den Überlegungen am Schluß des letzten Paragraphen eine Umgebung $U_{\delta(s)}(s)$ eines beliebigen Punktes s der in Frage kommenden Kürzesten zwischen p und q zu betrachten und zu bedenken, daß diese Kürzeste innerhalb $U_{\delta(s)}(s)$ als lokal kürzeste Verbindung eine geodätische Linie ohne Ecken darstellt[1].

Hat man nun auf M eine Folge von Kürzesten G_ν mit den Endpunkten p_ν und q_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), welche gegen die Punkte p_0 und q_0 auf M konvergieren:

$$p_0 = \lim_{\nu\to\infty} p_\nu,\ q_0 = \lim_{\nu\to\infty} q_\nu, \tag{208}$$

so gibt es immer eine Teilfolge $\{G_{\mu_\nu}\}$ der Folge $\{G_\nu\}$ ($1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \cdots$), bei welcher die Linienelemente in p_ν gegen ein Grenzelement konvergieren. Die geodätische Linie G_0 durch p_0 mit diesem Grenzelement als Anfangslinienelement ist wegen der Vollständigkeit vom M unendlich lang (vgl. § 108!), auf ihr liegt daher ein Punkt q derart, daß der geodätische Bogen G_0' von p_0 bis q die Länge $d(p_0, q_0)$ besitzt. Wegen

$$L(G_\nu) = d(p_\nu, q_\nu) \tag{209}$$

und der aus (208) folgenden Beziehung

$$\lim_{\nu\to\infty} d(p_\nu, q_\nu) = d(p_0, q_0) = L(G_0')\ ^2 \tag{210}$$

haben wir ähnlich wie im letzten Paragraphen nach Sätzen über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\lim_{\nu\to\infty} u^i_{(\mu_\nu)}(\tau) = u^i_{(0)}(\tau) \tag{211}$$

und

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{du^i_{(\mu_\nu)}}{d\tau}(\tau) = \frac{du^i_{(0)}}{d\tau}(\tau) \tag{212}$$

$$(i = 1, 2;\ 0 \leqq \tau \leqq 1),$$

---

[1] In § 78 hatten wir bereits gezeigt, daß eine zweimal stetig differenzierbare Kürzeste auf einer im euklidischen Raum liegenden Fläche ein geodätischer Kurvenbogen ist!

[2] Man beweist (210) analog wie (189) durch mehrmalige Anwendung der „Dreiecksungleichung" in (188a).

wenn G_ν bzw. G_0' durch $u^i = u^i_{(\nu)}(\tau)$ bzw. $u^i = u^i_{(0)}(\tau)$ $(\nu = 1, 2, \ldots;$ $i = 1, 2)$ bezüglich des „reduzierten" Bogenlängenparameters τ, d.h. des durch $L(G_\nu)$ bzw. durch $L(G_0')$ dividierten gewöhnlichen Bogenlängenparameters dargestellt werden $(0 \leqq \tau \leqq 1)$. (211) und (212) bedeuten geometrisch, daß sich entsprechende Punkte und entsprechende Linienelemente der geodätischen Bögen G_ν gegen entsprechende Punkte und entsprechende Linienelemente von G_0' häufen, wobei speziell

$$\lim_{\nu \to \infty} q_{\mu_\nu} = q, \tag{213}$$

d.h. wegen (208) $q = q_0$ gilt, so daß G_0' nach (210) eine Kürzeste zwischen p_0 und q_0 ist. *Insbesondere konvergieren also die Kürzesten G_ν zwischen p_ν und q_ν (samt Linienelementen) gegen die Kürzeste G_0' zwischen p_0 und q_0 (samt Linienelementen) in dem Fall, daß nur eine einzige p_0 und q_0 verbindende Kürzeste existiert.*

Letzteres braucht nicht der Fall zu sein, wie das Beispiel diametral gelegener Punkte p_0, q_0 auf einer Kugel zeigt. Jedoch ist leicht zu sehen, *daß jeder echte Teilbogen $\overset{\frown}{pq'}$ einer Kürzesten G' zwischen p und q einzige Kürzeste zwischen p und q' ist* (Fig. 26). Anderenfalls gäbe es nämlich außer dem von p nach q' verlaufenden (geodätischen) Teilbogen von G' noch eine davon verschiedene, geodätische Kürzeste zwischen p und q', welche zusammen mit dem Teilbogen $\overset{\frown}{q'q}$ von G' eine Kürzeste zwischen p und q mit einer Ecke in q' bildet, nach dem zu Anfang dieses Paragraphen Gesagten eine Unmöglichkeit. Mit demselben Argument sieht man ein, daß eine Kürzeste G' zwischen p und q nicht echter Teilbogen einer Kürzesten zwischen p und einem Punkt q'' sein kann, falls es noch eine von G' verschiedene Kürzeste zwischen p und q gibt.

Aus allen diesen Gründen erscheint es plausibel, bei einer von dem Punkt p auslaufenden geodätischen Linie G_0 von M die obere Grenze aller derjenigen Punkte q von G_0 zu betrachten, für die der von p nach q verlaufende Teilbogen von G_0 Kürzeste zwischen p und q ist. Diese obere Grenze ist entweder unendlich, oder sie wird durch einen auf G_0 liegenden Punkt c gebildet, wobei nach den Überlegungen des vorletzten Abschnitts auch der von p nach c verlaufende Teilbogen von G_0 noch Kürzeste zwischen p und c ist, während dies für keine nach c kommenden Punkte von G_0 zutrifft. *Im letzteren Fall heißt c „Schnittortpunkt von p auf G_0"; und die Menge aller Schnittortpunkte von p auf beliebigen von p auslaufenden geodätischen Linien wird als „Schnittort" (ligne de partage) $C(p)$ von p bezeichnet.* Sie wurde zuerst von H. Poincaré zur Untersuchung geschlossener geodätischer Linien auf analytischen Eiflächen eingeführt[1]. *$C(p)$ kann keine inneren Punkte besitzen*; denn ist etwa der beliebig ge-

[1] Siehe Poincaré, H.: Transactions Amer. Math. Soc. **6**, 237—274 (1905).

wählte Punkt c von $C(p)$ Schnittortpunkt von p auf G_0, so gehört nach Definition von c kein vor c liegender Punkt d auf G_0 zu $C(p)$, weil sonst im Widerspruch zum vorigen Abschnitt eine vom Teilbogen $\widehat{pd}$ von G_0 verschiedene Kürzeste zwischen p und d existieren müßte. So besteht beispielsweise bei einer Kugel $C(p)$ aus dem Diametralpunkt von p als einzigem Punkt, während bei einem Drehzylinder $C(p)$ durch die p gegenüberliegende Mantellinie dargestellt wird (Abwicklung des Drehzylinders auf die Ebene!).

Da nach dem vorletzten Abschnitt c sicher dann zu $C(p)$ gehört, wenn zwei verschiedene Kürzeste zwischen p und c existieren, erscheint nun im Zusammenhang mit der Untersuchung des Schnittorts die Frage nach den Schnittpunkten zweier „infinitesimal benachbarter", von p ausgehender geodätischer Linien von M interessant. Um dies zu präzisieren, gehen wir von der Parameterdarstellung

$$u^i = f^i(r; \cos\varphi, \sin\varphi) \quad (i = 1, 2) \tag{214}$$

der unter dem Winkel φ mit einer festen Richtung in $p = (u^1_{(0)}, u^2_{(0)})$ ausgehenden geodätischen Linie G_0 mit dem Bogenlängenparameter $r \geqq 0$ aus (vgl. Kap. 6 (19)!). (214) ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung Kap. 6 (139) mit den stetig differenzierbaren Koeffizienten Γ^k_{ij} unter den Anfangsbedingungen $u^1(0) = u^1_{(0)}, u^2(0) = u^2_{(0)}$, $\frac{du^1}{dr}(0) = \cos\varphi, \frac{du^2}{dr}(0) = \sin\varphi$. Nach Sätzen über die Abhängigkeit der Lösung derartiger Differentialgleichungen von ihren Anfangsbedingungen sind die Funktionen f^1 und f^2 von (214) nach φ stetig partiell differenzierbar, und wir erhalten aus den invariant geschriebenen Differentialgleichungen der geodätischen Linien

$$\frac{D}{dr}\left(\frac{du^i}{dr}\right) \underset{\text{def}}{=} \left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;j} \frac{du^j}{dr} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{215}$$

(vgl. Kap. 4 (193)!) durch Bildung der Richtungsableitung nach φ[1] für die Funktionen

$$v^i \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial f^i}{\partial \varphi} \quad (i = 1, 2) \tag{216}$$

die Gleichungen

(217)

$$\frac{D}{d\varphi}\left(\frac{D}{dr}\left(\frac{du^i}{dr}\right)\right) = \left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;j;k} \frac{du^j}{dr} v^k + \left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;j} \left(\frac{du^j}{dr}\right)_{;k} v^k = 0 \text{ [2]} \quad (i = 1, 2).$$

---

[1] Zum Begriff der Richtungsableitung siehe Kap. 4 (196) und (197)!

[2] Wir benutzen eine ähnliche Produktregel, wie in Kap. 4 (199) hergeleitet!

Berücksichtigt man hierin noch

$$\frac{D}{d\varphi}\left(\frac{du^i}{dr}\right)=\left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;k}v^k=\frac{\partial^2 f^i}{\partial r\,\partial\varphi}+\Gamma^i_{jk}\frac{\partial f^j}{\partial r}\frac{\partial f^k}{\partial\varphi}=v^i_{;k}\frac{du^k}{dr}=\frac{D}{dr}(v^i) \tag{218}$$
$$(i=1,2)$$

sowie Kap. 4 (206), so läßt sich (217) in der für unsere Zwecke geeigneteren Form

$$\frac{D}{dr}\left(\frac{D}{dr}(v^i)\right)=\frac{D}{dr}\left(\frac{D}{d\varphi}\left(\frac{du^i}{dr}\right)\right)=\left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;k;j}v^k\frac{du^j}{dr}+\left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;k}v^k_{;j}\frac{du^j}{dr} \tag{219}$$
$$=R^i_{lkj}\frac{du^l}{dr}\frac{du^j}{dr}v^k\qquad(i=1,2)$$

schreiben. Jetzt folgt aber durch Bildung der Richtungsableitung nach φ in der Beziehung $g_{ij}\frac{du^i}{dr}\frac{du^j}{dr}=1$ wegen Kap. 4 (201), (218) und (215):

$$\frac{D}{d\varphi}\left(g_{ij}\frac{du^i}{dr}\frac{du^j}{dr}\right)=2g_{ij}\left(\frac{du^i}{dr}\right)_{;k}v^k\frac{du^j}{dr}=2g_{ij}v^i_{;k}\frac{du^k}{dr}\frac{du^j}{dr}=2\frac{D}{dr}\left(g_{ij}v^i\frac{du^j}{dr}\right)=0.$$

Hieraus erhalten wir auf Grund von $v^i|_{r=0}=\frac{\partial f^i}{\partial\varphi}(0;\cos\varphi,\sin\varphi)=0$ oder $g_{ij}v^i\frac{du^j}{dr}\Big|_{r=0}=0$:

$$g_{ij}v^i\frac{du^j}{dr}=0. \tag{220}$$

Dies bedeutet geometrisch, daß der Tangentenvektor der Fläche mit den Komponenten v^i $(i=1,2)$ auf dem zugehörigen Tangentenvektor unserer geodätischen Linie G_0 senkrecht steht. Führen wir also längs G_0 das Einheitsnormalenvektorfeld mit den Komponenten

$$n^i=g^i(r;\cos\varphi,\sin\varphi)\qquad(i=1,2) \tag{221}$$

ein, so gilt

$$v^i=vn^i\qquad(i=1,2). \tag{222}$$

Daher läßt sich die invariante Größe εv $(\varepsilon=\text{const}>0)$ wegen der Definition (216) von v^i im Sprachgebrauch der Variationsrechnung (vgl. § 37!) als „erste Variation δn der geodätischen Linie in ihrer Normalenrichtung" oder, kurz gesagt, als „geodätische Abweichung" deuten:

$$\delta n(r;\cos\varphi,\sin\varphi)=\varepsilon v(r;\cos\varphi,\sin\varphi). \tag{223}$$

Die geodätische Abweichung verschwindet trivialerweise für $r=0$, und es ist natürlich, die Punkte aller übrigen Nullstellen von δn oder v als „Schnittpunkte infinitesimal benachbarter, von p ausgehender geodäti-

scher Linien" zu bezeichnen. *Diese nichttrivialen Nullstellen von v definieren, nach wachsender Größe des Arguments r geordnet, „den ersten, zweiten, dritten usw. zu p konjugierten Punkt $k_1, k_2, k_3, \ldots$ auf G_0".*

Um jetzt für v eine Differentialgleichung zu erhalten, setzen wir (222) in (219) ein. Dann ergibt sich unter Benutzung von Kap. 4 (200) und der aus (215) und Kap. 4 (183) folgenden Relation $\frac{D}{dr}(n^i) = 0$:

$$\frac{d^2v}{dr^2} n^i + R^i_{ljk} \frac{du^l}{dr} \frac{du^j}{dr} v n^k = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Multiplikation mit $g_{im}n^m$ und Summation über i liefert wegen $g_{im}n^i n^m = 1$ und Kap. 4 (209)

$$\frac{d^2v}{dr^2} + R_{mljk} n^m \frac{du^l}{dr} \frac{du^j}{dr} n^k v = 0.$$

Die hierbei auftretende Invariante $R_{mljk} n^m \frac{du^l}{dr} \frac{du^j}{dr} n^k$ ist nichts anderes als die Gaußsche Krümmung K, wie aus Kap. 4 (145) unter Benutzung eines Parametersystems, bei dem in einem vorgegebenen Punkt der Tangentenvektor bzw. Normaleneinheitsvektor von G_0 die Komponenten (1, 0) bzw. (0, 1) besitzt, folgt. Damit haben wir endlich für v die Differentialgleichung Jacobis

$$\frac{d^2v}{dr^2} + K(r; \cos\varphi, \sin\varphi)\, v = 0 \quad (r \geqq 0) \tag{224}$$

erhalten. Da jede für $r = 0$ verschwindende, nichttriviale Lösung dieser linearen, homogenen Differentialgleichung bis auf einen von Null verschiedenen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, welcher für die Lage der Nullstellen der Lösung ohne Einfluß ist, *hängen die zu p konjugierten Punkte auf G_0 allein von der Funktion K auf G_0 ab*! Ist unsere Fläche beispielsweise eine Kugel vom Radius $R > 0$, so wird $K = \frac{1}{R^2}$, und alle nichttrivialen Lösungen von $\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{R^2} v = 0$ mit $v(0) = 0$ sind von der Form $v(r) = A \sin \frac{1}{R} r$ $(A = \text{const} \neq 0)$ mit den Nullstellen $r_1 = R\pi, r_2 = 2R\pi, \ldots$, so daß der Diametralpunkt von p der einzige von p verschiedene, zu p konjugierte Punkt ist. Dagegen besitzt kein Punkt p eines Drehzylinders $(K = 0)$ wegen $v(r) = Ar$ $(A = \text{const} \neq 0)$ konjugierte Punkte.

§ 110. Ein Satz Jacobis

In dem zuletzt genannten Beispiel des vorigen Paragraphen fällt auf, daß jeder Schnittortpunkt c von p Schnitt zweier verschiedener (bezüglich der Ebene durch p und $C(p)$ spiegelbildlicher) Kürzester zwischen p

und c ist. Dies ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz der folgenden Behauptung: *Der Schnittortpunkt c von p auf der geodätischen Linie G_0 ist erster zu p konjugierter Punkt auf G_0 oder der Schnitt wenigstens zweier verschiedener Kürzester zwischen p und c.*

Der Beweis dieser Behauptung stützt sich auf den anschließend zu beweisenden Satz Jacobis, daß *innerhalb einer Kürzesten zwischen p und q kein zu p konjugierter Punkt existiert*[1]. Ist der Schnittortpunkt c von p auf G_0 (mit dem Winkel φ_0) nicht zu p konjugiert und so nach dem Jacobischen Satz G_0 von $r = 0$ bis $r = d(p, c)$ frei von zu p konjugierten Punkten, so ist die Funktionaldeterminante der Transformation (214) wegen

$$(225) \qquad W\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(r, \varphi)} = \varepsilon_{ij}\frac{du^i}{dr}v^j = \sqrt{\left(g_{ij}\frac{du^i}{dr}\frac{du^j}{dr}\right)(g_{kl}v^k v^l)} = |v|^{\,2}$$

in diesem Teilbogen G_0' von G_0 mit Ausnahme von p von Null verschieden. Dann existiert aber ein Kreissektor $S\colon 0 < r < d(p, c) + \delta$, $\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta$ mit einem geeigneten $\delta > 0$ der (v^1, v^2)-Ebene ($v^1 = r\cos\varphi$, $v^2 = r\sin\varphi$), welcher durch (214) auf ein Gebiet $U(G_0')$ von M topologisch abgebildet wird. Andernfalls gäbe es nämlich in der (v^1, v^2)-Ebene zwei Punktfolgen $\{(v^1_{(\nu)}, v^2_{(\nu)})\}$ und $\{(w^1_{(\nu)}, w^2_{(\nu)})\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} v^i_{(\nu)} = v^i_{(0)}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} w^i_{(\nu)} = w^i_{(0)}$ $(i = 1, 2)$, $v^1_{(0)} = r_0\cos\varphi_0$, $v^2_{(0)} = r_0\sin\varphi_0$, $w^1_{(0)} = s_0\cos\varphi_0$, $w^2_{(0)} = s_0\sin\varphi_0$ $(0 \leqq r_0 \leqq s_0 \leqq d(p, c))$ derart, daß für jedes ν die voneinander verschiedenen Punkte $(v^1_{(\nu)}, v^2_{(\nu)})$ und $(w^1_{(\nu)}, w^2_{(\nu)})$ durch (214) in zusammenfallende Punkte von M übergeführt werden. Daraus folgt $r_0 = s_0$, weil G_0' als Kürzeste zwischen p und c sich selbst nicht treffen kann. Dies ergibt aber im Fall $r_0 = s_0 = 0$ zur Tatsache, daß v^1 und v^2 in einer Umgebung von p Riemannsche Normalkoordinaten der Fläche darstellen, und im Fall $r_0 = s_0 > 0$ zum Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante von (214) auf G_0' mit Ausnahme von p einen Widerspruch. Aus Stetigkeitsgründen können wir jetzt δ noch so klein wählen, daß diese Funktionaldeterminante auf ganz $U(G_0')$ nirgends verschwindet. Damit sind wir sicher, daß der „Existenzbereich" der Riemannschen Normalkoordinaten v^1, v^2 der Fläche auf ganz $U(G_0')$ ausgedehnt werden kann und dort das Bogenelementquadrat von M wie in § 79 (16) die Gestalt

$$(226) \qquad ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2$$

---

[1] Jacobi, C.: Zur Theorie der Variationsrechnung, Werke IV, S. 39—55.

[2] Diese invariante Beziehung folgt aus (220) und (222) unter Benutzung eines Parametersystems, für welches in einem beliebig vorgegebenen Punkt $g_{ij} = \delta_{ij}$ wird!

besitzt. Der Vergleich von (226) mit (222) zeigt in Verbindung mit Kap. 4 (8a):

$$\sqrt[+]{G} = \sqrt[+]{g_{ij}\frac{\partial f^i}{\partial \varphi}\frac{\partial f^j}{\partial \varphi}} = |v| \tag{227}$$

und damit nach (225) die für alle Punkte von $U(G_0')$ gültige Beziehung

$$\sqrt[+]{G}\,(r, \varphi) > 0.$$

Es sei jetzt $\{q_\nu\}$ eine Punktfolge von $U(G_0')$, deren Punkte auf G_0 liegen und mit abnehmenden Bogenlängenparametern gegen c konvergieren. Nach der Definition des Schnittortpunktes c liegen dann die Kürzesten G_ν zwischen p und q_ν nicht auf G_0. Wegen (226) können daher die Linienelemente der G_ν in p keinen Richtungswinkel φ_ν mit $|\varphi_\nu - \varphi_0| < \delta$ haben. Nun besitzen aber nach den Ausführungen am Anfang von § 109 die G_ν eine Kürzeste G_0'' zwischen p und c als Häufungselement, deren Linienelement in p einen Richtungswinkel φ_0'' mit $|\varphi_0'' - \varphi_0| \geqq \delta > 0$ hat, und hiermit ist in der Tat die Existenz einer von G_0' verschiedenen Kürzesten G_0'' zwischen p und c in dem Fall gezeigt, daß c nicht zu p konjugiert ist. Wir können übrigens die so zu Ende bewiesene Behauptung auch in der folgenden Weise formulieren: *Ein Punkt q gehört genau dann zum Schnittort von p, wenn es zwei infinitesimal benachbarte oder zwei verschiedene Kürzeste zwischen p und q gibt*[1].

Nun zum Beweis des Satzes von Jacobi, der nicht anderes aussagt, *als daß sich zwei infinitesimal benachbarte Kürzeste zwischen p und q genau so wenig in ihrem Inneren schneiden können wie zwei verschiedene Kürzeste zwischen p und q* (vgl. § 109!). Wir nehmen dazu einmal indirekt an, G_0' sei eine Kürzeste zwischen p und q, welche den zu p konjugierten Punkt k_0 mit dem Parameterwert r_0 in ihrem Inneren enthalte ($0 < r_0 < d(p, q)$). Da die Polarkoordinatendarstellung (214) einer passenden Umgebung $U(G_0')$ von G_0' wegen des Vorhandenseins von k_0 versagt, führen wir auf $U(G_0')$ geodätische Parallelkoordinaten w^1, w^2 ein (vgl. § 78!), indem wir von der Parameterdarstellung

$$u^i = g^i(r) \quad (i = 1, 2)$$

der G_0' enthaltenden geodätischen Linie G_0 und dem Normaleneinheitsvektorfeld von G_0

$$n^i = h^i(r) \quad (i = 1, 2)$$

(r = Bogenlängenparameter!) ausgehen und die Lösungen der Differentialgleichungen der (auf den Bogenlängenparameter w^1 bezogenen) geodätischen Linien in Kap. 6

$$u^i = f^i(w^1; w^2) \quad (i = 1, 2) \tag{228}$$

[1] q gehört also genau dann zu $C(p)$, wenn p zu $C(q)$ gehört!

mit den Anfangsbedingungen

$$f^i(0; w^2) = g^i(w^2)$$

und $(i = 1, 2)$

$$\frac{\partial f^i}{\partial w^1}(0; w^2) = h^i(w^2)$$

betrachten. Analog wie im letzten Paragraphen sieht man ein, daß ein Rechteck R: $-\delta < w^1 < +\delta$, $-\delta < w^2 < d(p, q) + \delta$ mit einem geeigneten $\delta > 0$ der (w^1, w^2)-Ebene existiert, das durch (228) auf eine Umgebung $U(G_0')$ von G_0' auf M topologisch und mit überall nichtverschwindender Funktionaldeterminante stetig differenzierbar abgebildet wird, wo das Bogenelementquadrat die Form

$$ds^2 = (dw^1)^2 + h_{22}(dw^2)^2 \tag{229}$$

besitzt. Hierbei gilt analog zu (227)

$$\sqrt[+]{h_{22}} = |w|, \tag{230}$$

wenn mit w die geodätische Abweichung der w^1-Linien in Richtung der w^2-Linien bezeichnet wird. w genügt analog zu (224) der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{(dw^1)^2} + K(w^1; w^2) = 0 \tag{231}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$w(0; w^2) = 1 \tag{232}$$

und

$$\frac{dw}{dw^1}(0; w^2) = 0, \tag{233}$$

weil w^2 Bogenlängenparameter von G_0 und G_0 geodätische Linie ist (vgl. § 82 (40)!).

Es sei nun

$$w^1 = F(w^2) \tag{234}$$

eine in den Intervallen $0 \leqq w^2 \leqq r_0$ und $r_0 \leqq w^2 \leqq d(p, q)$ zweimal stetig differenzierbare und an der Stelle $w^2 = r_0$ stetige Funktion, die die Randbedingungen

$$F(0) = F\big(d(p, q)\big) = 0 \tag{235}$$

erfüllt. Dann liegt für hinreichend kleines ε die durch

$$w^1 = \varepsilon F(w^2) \tag{236}$$

gegebene und $\mathfrak{p}$ und q verbindende Kurve $C(\varepsilon)$ in $U(G_0')$ und besitzt nach (229) die Länge

$$L(\varepsilon) = \int_0^{d(\mathfrak{p},q)+} \sqrt{(\varepsilon F')^2 + h_{22}}\, dw^2. \tag{237}$$

Auf Grund der Kürzesteneigenschaft von $C(0) = G_0'$ gilt jetzt

$$\delta L = \varepsilon \frac{dL}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

sowie wegen (230), (231), (232), (233):

$$\delta^2 L = \varepsilon^2 \frac{d^2L}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = \varepsilon^2 \int_0^{d(\mathfrak{p},q)} \left(F'^2 - K(0; w^2)\, F^2\right) dw^2 \geqq 0. \tag{238}$$

Speziell haben wir für die durch

$$V(w^2) = \begin{cases} v(w^2), & \text{falls } 0 \leqq w^2 \leqq r_0 \\ 0, & \text{falls } r_0 \leqq w^2 \leqq d(\mathfrak{p}, q) \end{cases} \tag{239}$$

mit Hilfe einer nichttrivialen Lösung v der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{(dw^2)^2} + K(0; w^2)\, v = 0 \tag{240}$$

mit der Randbedingung

$$v(0) = 0 \tag{241}$$

definierte Funktion V [1] auf Grund von (239), (241) und (240):

$$\int_0^{d(\mathfrak{p},q)} \left(V'^2 - K(0; w^2)\, V^2\right) dw^2 = -\int_0^{r_0} V\left(V'' + K(0; w^2)\, V\right) dw^2 = 0 \tag{242}$$

(partielle Integration!). Aus (238) und (242) resultiert die schon von G. A. Bliss [2] bemerkte Tatsache, *daß V eine Extremale des Variationsproblems*

$$\int_0^{d(\mathfrak{p},q)} \left(F'^2 - K(0; w^2)\, F^2\right) dw^2 = \text{Extremum} \quad \left(F(0) = F(d(\mathfrak{p}, q)) = 0\right) \tag{243}$$

mit einer „Ecke" an der Stelle $w^2 = r_0$ darstellt.

Nun ist aber das Problem (243) ein Sonderfall des allgemeineren Variationsproblems

$$J = \int_a^b \Phi(x, y, y')\, dx = \text{Extremum} \tag{244}$$

[1] V ist an der Stelle r_0 stetig, da r_0 als Parameterwert des zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Punkts k_0 Nullstelle der Funktion v ist.

[2] Vgl. Bliss, G. A.: Transactions Amer. Math. Soc. 17, 195—206 (1916).

($y = y(x)$ stetig und zweimal stetig differenzierbar mit Ausnahme von

$$x = c \quad (a < c < b), \quad y(a) = y(b) = 0)$$

mit einer stetigen, nach y und y' stetig differenzierbaren Funktion Φ, wobei auch $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ nach x, y, y' stetig differenzierbar sei, für dessen Extremale y bekanntlich die „Eckbedingung" von G. Erdmann[1]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'}(c, y(c), y'(c-0)) = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}(c, y(c), y'(c+0)) \tag{245}$$

[2]

erfüllt ist. In der Tat, ist $z = z(x)$ eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $z(a) = z(b) = 0$, so gilt für die Integrale

$$J(\varepsilon) = \int_a^b \Phi(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z')\, dx:$$

$$\delta J = \varepsilon \frac{dJ}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \varepsilon \int_a^c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} z + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} z'\right) dx + \varepsilon \int_c^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} z + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} z'\right) dx$$

$$= \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)\right) z\, dx \tag{246}$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}(c, y(c), y'(c-0)) - \frac{\partial \Phi}{\partial y'}(c, y(c), y'(c+0))\right) z(c) = 0$$

(partielle Integration!), und somit ist für die Extremale y wegen der Freiheit der Wahl von z das Bestehen der Erdmannschen Eckbedingung (245) sowie die Gültigkeit der „Eulerschen Differentialgleichung"

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (x \neq c) \tag{247}$$

für beide Teile der Kurve $y = y(x)$ als richtig erkannt (vgl. § 26 und § 83!). Die Anwendung der Eckbedingung (245) auf die Extremale V des Variationsproblems (243) ergibt jetzt im Widerspruch zur Definition (239) von V

$$V'(r_0 - 0) = V'(r_0 + 0),$$

womit der Beweis des Satzes von Jacobi beendet ist.

Im allgemeinen liegt übrigens der Schnittortpunkt c von p auf G_0 vor dem ersten zu p auf G_0 konjugierten Punkt k_1, wie man nach G. Darboux[3] folgendermaßen einsehen kann: Die ersten zu p konjugierten Punkte erfüllen im allgemeinen eine Kurve $\mathfrak{H}$, die die Hüllkurve der von p

[1] Erdmann, G.: Crelles Journal **82**, 21—30 (1877).

[2] Mit $y'(c-0)$ bzw. $y'(c+0)$ ist hierbei der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert von y' an der Stelle $x = c$ bezeichnet!

[3] Siehe Darboux, G.: Theorie des surfaces III, 86—88 (1914).

ausgehenden geodätischen Linien darstellt. Es sei nun der Berührpunkt k_1 von G_0 mit $\mathfrak{H}$ keine p „zugewandte" Spitze von $\mathfrak{H}$. Dann kann man in der Nähe von k_1 einen Punkt q von $\mathfrak{H}$ so wählen, daß nach dem Hüllkurvensatz in § 87 der (auf G_0 liegende) geodätische Bogen von p nach k_1 dieselbe Länge wie der geodätische Bogen von p nach q, vermehrt um die Länge des von q bis k_1 verlaufenden Teilbogens von $\mathfrak{H}$, besitzt. Letzterer ist sicher nicht geodätisch und damit keine Kürzeste zwischen q und k_1, da er sonst wegen der Berührungseigenschaft von $\mathfrak{H}$ und G_0 in k_1 auf G_0 liegen müßte. Infolgedessen ist auch die aus den Bogen von p nach q und q nach k_1 zusammengesetzte Kurve und damit der auf G_0 liegende, gleich lange geodätische Bogen von p nach k_1 keine Kürzeste zwischen p und k_1, so daß der Schnittortpunkt c von p auf G_0 tatsächlich vor k_1 zu liegen kommen muß (Fig. 27).

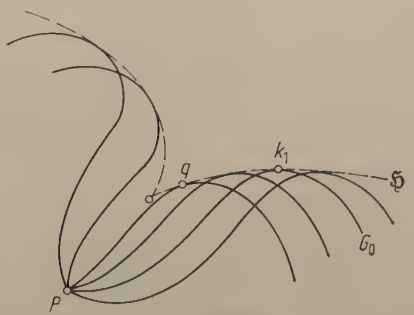


Fig. 27.

Zwecks späterer Anwendung zeigen wir noch die folgende Konsequenz des Jacobischen Satzes: *Der Geltungsbereich des Riemannschen Normalkoordinatensystems* $\{v^1, v^2\}$ *von* § 79 *mit dem „Ursprung" p ist ganz M mit Ausnahme des Schnittortes* $C(p)$ *von p.* Ein beliebiger nicht auf $C(p)$ liegender Punkt q von M läßt sich nämlich in eindeutiger Weise mit p durch eine („verlängerbare") Kürzeste G_0' der Länge r und mit dem Richtungswinkel φ in p verbinden[1], so daß q bei der Transformation (214) die Normalkoordinaten $v^1 = r\cos\varphi$, $v^2 = r\sin\varphi$ erhält. Hierbei ist q auf G_0' nicht zu p konjugiert, da sich sonst G_0' nach dem Satz von Jacobi nicht als Kürzeste über q hinaus verlängern ließe und damit q zu $C(p)$ gehören müßte. Daher ist im Falle $q \neq p$ nach (225) die Funktionaldeterminante von (214) in q genau so wie die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(v^1, v^2)} = \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(r, \varphi)} : \frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(r, \varphi)} \tag{248}$$

[1] Siehe S. 300 Mitte.

von Null verschieden, während wir diesen Tatbestand im Punkt $q = p$ schon in § 79 hergeleitet hatten. Damit ist aber gezeigt, daß M mit Ausnahme von $C(p)$ durch die Umkehrung von (214) auf einen bezüglich des Ursprungs „sternförmigen" Bereich der (v^1, v^2)-Ebene topologisch und (mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante) stetig differenzierbar abgebildet wird.

§ 111. Wiedersehensflächen

Ein interessanter Ausartungsfall liegt dann vor, wenn der Schnittort $C(p)$ jedes Punkts p von M aus genau einem einzigen Punkt besteht. In diesem Fall ist der Punkt $q = C(p)$ nicht nur der Schnittortpunkt von p auf einer geeigneten von p auslaufenden geodätischen Linie G_0 allein, sondern q ist auch Schnittortpunkt von p auf allen, in einer (bezüglich der Anfangsrichtung definierten) geeigneten Umgebung von G_0 befindlichen, von p auslaufenden geodätischen Linien. Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von von p ausgehenden und gegen G_0 konvergierenden geodätischen Linien ohne einen Schnittortpunkt von p, d.h. eine Folge von beliebig langen Kürzesten, was mit der Häufungseigenschaft von Kürzesten gegen Kürzeste am Anfang von § 109 einen Widerspruch bildet. Dieser Gedankengang zeigt, daß die Menge der geodätischen Linien mit q als Schnittortpunkt (bezüglich der Topologie der Anfangsrichtungen in p!) offen ist. Sie ist aber auch abgeschlossen und umfaßt daher wegen des Zusammenhangs der Menge aller Linienelemente durch p (die topologisch eine Kreislinie ist!) alle von p ausgehenden geodätischen Linien! Ist nämlich q Schnittortpunkt einer gegen G_0 konvergierenden Folge von geodätischen Linien durch p und damit gemeinsamer Endpunkt einer gegen die Kürzeste G_0' zwischen p und q konvergierenden Folge von Kürzesten G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ zwischen p und q, so ist q zu p auf G_0 konjugiert, und nach dem Jacobischen Satz muß auf G_0 ein Schnittortpunkt c von p existieren, der wegen $C(p) = q$ mit q zusammenfällt. *Hiermit ist erwiesen, daß sich alle von dem beliebigen Punkt p ausgehenden geodätischen Linien in dem Punkt $C(p)$ schneiden, welcher aus ihnen geodätische Bögen der konstanten Länge $d(p, C(p))$ auschneidet und (nach dem Jacobischen Satz) in bezug auf sie erster zu p konjugierter Punkt ist.*

Darüber hinaus läßt sich sogar die Geschlossenheit aller p passierenden geodätischen Linien zeigen. Sind nämlich G_0' und G_0'' zwei in entgegengesetzter Richtung von p ausgehende Kürzeste zum Punkt $C(p)$ auf der durch p hindurchlaufenden geodätischen Linie G_0 und ist p' ein beliebiger Punkt im Innern von G_0', so gehen von p' zwei auf G_0 liegende Kürzeste zum Punkt $C(p')$ aus derart, daß die Punkte $p, p', C(p), C(p'), \ldots$ auf G_0 in der Reihenfolge $\ldots, C(p), C(p'), p, p', C(p), C(p'), \ldots$ aufeinander folgen

(Fig. 28!), weil keine von den besagten vier Kürzesten in einer anderen solchen enthalten sein kann[1]. Dies hat aber zur Folge, daß sowohl die Kürzeste von $C(p)$ über $C(p')$ nach p als auch diejenige von p' über $C(p)$ nach $C(p')$ die eindeutig bestimmte Kürzeste zwischen $C(p)$ und $C(p')$ enthält und daher G_0 an der Stelle $C(p)$ keine Ecke besitzen kann, d.h. daß G_0 in der Tat geschlossen sein muß.

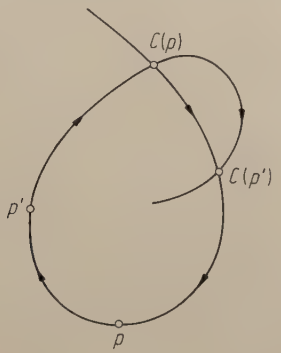


Fig. 28.

Ist jetzt s ein von p verschiedener, sonst beliebiger Punkt unserer Fläche, so liegt nach dem vorigen Abschnitt eine Kürzeste zwischen p und s auf einer geschlossenen geodätischen Linie von der Länge $2d(p, C(p)) = 2d(s, C(s))$. *Hieraus ergibt sich ganz allgemein, daß die Länge $d(p, C(p))$ eines von einem beliebigen Punkt p ausgehenden, beliebigen geodätischen Bogens bis zum ersten zu p konjugierten Punkt weder vom Anfangspunkt p noch von der Anfangsrichtung des gewählten Bogens abhängt.* Nun hat aber L. W. Green (mit uns nicht zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln) die Vermutung des erstgenannten Verfassers bewiesen, daß die einzigen (dreimal stetig differenzierbaren) Eiflächen mit dieser Eigenschaft die Kugeln sind[2]. *Damit ist gezeigt, daß die einzigen Eiflächen, bei denen der Schnittort jedes Punktes aus genau einem Punkt besteht, die Kugeln sind.* In ähnlicher Weise läßt sich einsehen, daß die einzigen Eiflächen, bei denen die Menge der zu einem beliebigen Punkt ersten konjugierten Punkte „einpunktig" ist, gleichfalls Kugeln sind. *Daher sind speziell die Kugeln die einzigen Eiflächen, welche zugleich „Wiedersehensflächen" in dem Sinne darstellen, daß sich alle von einem beliebigen Punkt ausgehenden geodätischen Linien im ersten konjugierten Punkt schneiden.*

[1] Um dies einzusehen, benutzen wir die Definition des Schnittortpunkts in § 109 und Fußnote 1 von S. 305!

[2] Siehe Green, L. W.: Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 156–158 (1961) u. Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. 4. Aufl. Berlin: Springer Verl. 1945, S. 225.

§ 112. Ein Dreiecksvergleichssatz von A. D. Aleksandrow

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir die innere Differentialgeometrie im Großen einer Eifläche (der Klasse C_3) mit derjenigen einer geeignet gewählten Kugel vergleichen. Als grundlegendes Hilfsmittel zum Beweis von derartigen „Vergleichssätzen" hat sich der folgende (unter etwas allgemeineren Voraussetzungen formulierte) Satz von A. D. Aleksandrow erwiesen[1]: *Es sei T ein aus Kürzesten gebildetes „Dreieck" auf der Eifläche F* [2], *deren Gaußsche Krümmung das Minimum K_1 und das Maximum K_2 besitze. Für den Umfang $L(T)$ von T gelte die Beziehung*

$$\text{(249a, b)} \qquad L(T) < \frac{2\pi}{+\sqrt{K_1}} \quad [3] \quad \left(\text{bzw. } L(T) < \frac{2\pi}{+\sqrt{K_2}}\right).$$

Es sei weiter T_λ ein aus kürzesten Großkreisbogen gebildetes Dreieck auf der Sphäre S_λ der Gaußschen Krümmung K_λ mit denselben Seitenlängen wie bei T ($\lambda = 1, 2$)[4]. *Dann sind die Absolutwinkel*[5] *α, β, γ von T nicht kleiner (bzw. nicht größer) als die entsprechenden Innenwinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ von T_1 (bzw. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von T_2):*

$$\text{(250a, b)} \quad \alpha \geqq \alpha_1, \beta \geqq \beta_1, \gamma \geqq \gamma_1 \text{ (bzw. } \alpha \leqq \alpha_2, \beta \leqq \beta_2, \gamma \leqq \gamma_2).$$

Der Beweis dieses „Dreiecksvergleichssatzes" gründet sich auf einen „lokalen" Dreiecksvergleichssatz, der sich wie folgt formulieren läßt: *Es seien p, q, s die Ecken von T (mit den Absolutwinkeln α, β, γ) und es sei l eine positive Zahl, welche nicht größer als die nach den Überlegungen* S. 296 *positiven „Abstände" der Punkte p, q, s von ihren jeweiligen Schnittorten $C(p)$, $C(q)$, $C(s)$ ist, d.h. es gelte*

$$\text{(251)} \qquad l \leqq d(p, C(p)), l \leqq d(q, C(q)), l \leqq d(s, C(s)) \quad [6].$$

Dann ist (250) *sicher richtig, wenn neben* (249a, b) *die einschränkendere Voraussetzung*

$$\text{(252a, b)} \qquad L(T) < l \text{ (bzw. } L(T) < 2l)$$

---

[1] Siehe Aleksandrow, A. D.: Innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin: Akad. Verl. 1955, S. 433 Satz 4.

[2] Da F vollständig ist, lassen sich zwei beliebige Punkte von F stets durch eine Kürzeste verbinden (vgl. § 108!).

[3] Auf diese Bedingung kann beim Vergleich von T mit T_1 verzichtet werden!

[4] Die T_λ existieren wegen (249a, b) und liegen ganz in einer offenen Halbsphäre von S_λ, so daß sie durch ihre Ecken eindeutig bestimmt sind.

[5] Hierunter verstehen wir die zwischen 0 und π genommenen Winkel zwischen den zwei von einer „Ecke" ausgehenden „Dreiecksseiten".

[6] Hierbei ist $d(p, C(p)) = \inf_{q \in C(p)} d(p, q)$ usw.!

tritt. Wir begnügen uns mit dem Beweis des lokalen Dreiecksvergleichssatzes, da wir nur diesen später benötigen und der Beweis des allgemeinen Dreiecksvergleichssatzes mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist[1].

Dazu verwenden wir eine Idee von Aleksandrow und vergleichen zunächst einmal das Kürzestendreieck T auf F mit einem Kürzestendreieck $\tilde{T}_1$ auf der Sphäre S_1, bei dem ein Innenwinkel $\tilde{\alpha}_1$ und die angrenzen-

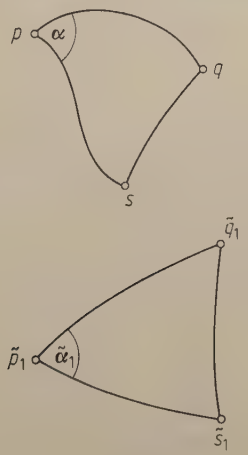


Fig. 29.

den Seiten $\widetilde{\tilde{p}_1\tilde{q}_1}$ und $\widetilde{\tilde{p}_1\tilde{s}_1}$ die gleiche Größe wie der Absolutwinkel α und die angrenzenden Seiten $\widehat{pq}$ und $\widehat{ps}$ von T besitzen:

$$\alpha = \tilde{\alpha}_1, \tag{253}$$

$$d(p, q) = d(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1),\ d(p, s) = d(\tilde{p}_1, \tilde{s}_1) \quad \text{(Fig. 29)}. \tag{254}$$

Da wegen (254) und (249a)

$$d(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) \leqq \frac{1}{2} L(T) < \frac{\pi}{+\sqrt{K_1}},\quad d(\tilde{p}_1, \tilde{s}_1) \leqq \frac{1}{2} L(T) < \frac{\pi}{+\sqrt{K_1}} \tag{255}$$

gilt, können wir auf dem von $\tilde{T}_1$ begrenzten Dreiecksflächenstück geodätische Polarkoordinaten (r, φ) mit dem Ursprung $\tilde{p}_1$ einführen[2] und die Länge der Kürzesten $\widetilde{\tilde{q}_1\tilde{s}_1}$ nach § 79 (16) wie folgt ausdrücken:

$$d(\tilde{q}_1, \tilde{s}_1) = \int_0^{\tilde{\alpha}_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 (\varphi) + G_1(r(\varphi), \varphi)}\, d\varphi. \tag{256}$$

[1] Vgl. dazu die Zulassungsarbeit von H. Karcher, Freiburg 1962.

[2] Lediglich im Fall $\alpha = \tilde{\alpha}_1 = \pi$ kann der Diametralpunkt von $\tilde{p}_1$ auf $\tilde{T}_1$ zu liegen kommen, in welchem die zu beweisende Ungleichung $\alpha \geqq \alpha_1$ trivial ist!

Hierbei ist $\overset{+}{\sqrt{G_1}}\,(r,\varphi)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \overset{+}{\sqrt{G_1}}}{\partial r^2} + K_1 \overset{+}{\sqrt{G_1}} = 0 \tag{257}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\overset{+}{\sqrt{G_1}}(0,\varphi) = 0,\ \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G_1}}}{\partial r}(0,\varphi) = 1 \tag{258}$$

und

$$r = r(\varphi) \qquad (0 \leqq \varphi \leqq \tilde{\alpha}_1) \tag{259}$$

die (stetig differenzierbare) Darstellung von $\widehat{\tilde{q}_1 \tilde{s}_1}$ in den geodätischen Polarkoordinaten[1]. Auf Grund der aus (255), (252a) und (251) folgenden Ungleichung

$$r(\varphi) \leqq \frac{1}{2} L(\tilde{T}_1) \leqq d(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) + d(\tilde{p}_1, \tilde{s}_1) \leqq L(T) < d\big(p, C(p)\big) \tag{260}$$

können wir nun nach den Ausführungen am Schluß des § 110 auf F Riemannsche Normalkoordinaten und damit auch geodätische Polarkoordinaten (r,φ) mit dem Ursprung p einführen, deren Geltungsbereich den durch (259) auf F gegebenen und q mit s verbindenden Kurvenbogen C umfaßt. Dieser Bogen hat die Länge

$$L(C) = \int_0^{\alpha} \overset{+}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2(\varphi) + G\big(r(\varphi),\varphi\big)}}\, d\varphi \geqq d(q,s), \tag{261}$$

wobei $\overset{+}{\sqrt{G}}\,(r,\varphi)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r^2} + K(r,\varphi) \overset{+}{\sqrt{G}} = 0 \tag{262}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\overset{+}{\sqrt{G}}\,(0,\varphi) = 0,\ \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r}(0,\varphi) = 1 \tag{263}$$

darstellt.

Nun gilt für die Lösungen $\overset{+}{\sqrt{G_1}}$ *und* $\overset{+}{\sqrt{G}}$ *der Differentialgleichungen* (257) *und* (262) *auf Grund von*

$$K(r,\varphi) \geqq K_1 \tag{264}$$

---

[1] Die Darstellung (259) versagt im Falle $\tilde{\alpha}_1 = 0$, in dem $\tilde{T}_1 = T_1$ gilt und damit $\alpha = \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ schon bewiesen ist!

und der Anfangsbedingungen (258) *und* (263) *die bemerkenswerte Beziehung*

$$\overset{+}{V\overline{G}}(r,\varphi) \leqq \overset{+}{V\overline{G_1}}(r,\varphi) \tag{265}$$

($0 \leqq r \leqq \varrho(\varphi)$; $\varrho(\varphi)$ = *Minimum, gebildet aus der ersten positiven Nullstelle* $r^*(\varphi)$ *von* $\overset{+}{V\overline{G}}(r,\varphi)$ *und* $r_1^*(\varphi)$ *von* $\overset{+}{V\overline{G_1}}(r,\varphi)$!),
die man folgendermaßen einsehen kann: Wäre (265) nicht richtig, so gäbe es wegen (258), (263) und der Stetigkeit von $\overset{+}{V\overline{G}}$ und $\overset{+}{V\overline{G_1}}$ ein r' mit $0 \leqq r' < \varrho(\varphi)$ und ein $\delta > 0$ mit

$$\overset{+}{V\overline{G}}(r,\varphi) > \overset{+}{V\overline{G_1}}(r,\varphi) \qquad (r' < r < r' + \delta \leqq \varrho(\varphi)) \tag{266}$$

und

$$\overset{+}{V\overline{G}}(r',\varphi) = \overset{+}{V\overline{G_1}}(r',\varphi). \tag{267}$$

Daraus folgt einerseits

$$\frac{\partial \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r}(r',\varphi) \geqq \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r}(r',\varphi) \tag{268}$$

und andererseits nach (257), (262) und (264)

(269)

$$I \underset{\text{def}}{=} \int_0^{r'} \left(\frac{\partial^2 \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r^2} \overset{+}{V\overline{G}} - \frac{\partial^2 \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r^2} \overset{+}{V\overline{G_1}} \right) dr = \int_0^{r'} (K - K_1) \overset{+}{V\overline{G}}\, \overset{+}{V\overline{G_1}}\, dr \geqq 0$$

sowie nach partieller Integration unter Benutzung von (258), (263) und (267)

(270)

$$I = \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r} \overset{+}{V\overline{G}} - \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r} \overset{+}{V\overline{G_1}} \Bigg|_0^{r'} = \left(\frac{\partial \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r}(r',\varphi) - \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r}(r',\varphi) \right) \overset{+}{V\overline{G}}(r',\varphi),$$

d. h. (wegen der im Falle $r' = 0$ geltenden Beziehungen (258) und (263)!)

$$\frac{\partial \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r}(r',\varphi) \leqq \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r}(r',\varphi). \tag{271}$$

Damit haben wir wegen (268) und (271)

$$\frac{\partial \overset{+}{V\overline{G}}}{\partial r}(r',\varphi) = \frac{\partial \overset{+}{V\overline{G_1}}}{\partial r}(r',\varphi). \tag{272}$$

Aus den Differentialgleichungen (257) bzw. (262) folgt jetzt

$$\frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r}(r',\varphi) - \int_{r'}^{r} K \overset{+}{\sqrt{G}}\, dr$$

bzw.

$$\frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G_1}}}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G_1}}}{\partial r}(r',\varphi) - \int_{r'}^{r} K_1 \overset{+}{\sqrt{G_1}}\, dr,$$

woraus sich durch Subtraktion wegen (272), (264) und (266)

$$\frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G}}}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G_1}}}{\partial r}(r,\varphi) < 0 \qquad (r' < r < r' + \delta) \tag{273}$$

ergibt. Integration von (273) von $r = r'$ bis $r = r$ liefert nun in Verbindung mit (267)

$$\overset{+}{\sqrt{G}}(r,\varphi) - \overset{+}{\sqrt{G_1}}(r,\varphi) < 0 \qquad (r' < r < r' + \delta)$$

im Widerspruch zu (266). Dieser Widerspruch beweist die Richtigkeit von (265) *und damit insbesondere die schon von J. Sturm gefundene Ungleichung*[1]

$$r^*(\varphi) \leqq r_1^*(\varphi) \tag{274}$$

für die ersten positiven Nullstellen $r^*(\varphi)$ *bzw.* $r_1^*(\varphi)$ *von* $\overset{+}{\sqrt{G}}(r,\varphi)$ *bzw.* $\overset{+}{\sqrt{G_1}}(r,\varphi)$, welche im nächsten Paragraphen eine interessante geometrische Anwendung erfährt. Wir bemerken noch, daß die Konstantheit von K_1 zum Beweis von (265) nicht benötigt wird (sondern lediglich die Ungleichung (264)!). *Durch Vertauschung der Rollen von* K *und* K_2 *sowie von* K_1 *und* K *finden wir also wegen*

$$K_2 \geqq K(r,\varphi) \tag{275}$$

die zu (265) *analoge Ungleichung*

$$\overset{+}{\sqrt{G_2}}(r,\varphi) \leqq \overset{+}{\sqrt{G}}(r,\varphi) \tag{276}$$

$(0 \leqq r \leqq \sigma(\varphi)$; $\sigma(\varphi) =$ *Minimum, gebildet aus der ersten positiven Nullstelle* $r^*(\varphi)$ *von* $\overset{+}{\sqrt{G}}(r,\varphi)$ *und* $r_2^*(\varphi)$ *von* $\overset{+}{\sqrt{G_2}}(r,\varphi)$!)
für $\overset{+}{\sqrt{G}}$ *und die Lösung* $\overset{+}{\sqrt{G_2}}$ *der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 \overset{+}{\sqrt{G_2}}}{\partial r^2} + K_2 \overset{+}{\sqrt{G_2}} = 0 \tag{277}$$

[1] Siehe Sturm, J.: Journal Liouville 1, 131 (1836).

unter den Anfangsbedingungen

$$\overset{+}{\sqrt{G_2}}(0,\varphi)=0, \qquad \frac{\partial \overset{+}{\sqrt{G_2}}}{\partial r}(0,\varphi)=1, \tag{278}$$

und damit insbesondere wieder die Sturmsche Ungleichung

$$r_2^*(\varphi) \leqq r^*(\varphi). \tag{279}$$

Nun ist es einfach, den einen Teil des lokalen Dreiecksvergleichssatzes einzusehen. In der Tat ergibt (260) in Verbindung mit dem Jacobischen Satz und der Definition von $r^*(\varphi)$ und von $\varrho(\varphi)$ sowie (274)

$$r(\varphi) < r^*(\varphi) = \varrho(\varphi) \quad (0 \leqq \varphi \leqq \alpha),$$

so daß wir aus (256), (253), (261) und (265)

$$d(\tilde{q}_1, \tilde{s}_1) \geqq d(q, s) \tag{280}$$

entnehmen können. Dies bedeutet aber zusammen mit (254), daß der der Kürzesten $\widehat{q_1 s_1}$ des auf der Sphäre S_1 liegenden Dreiecks T_1 mit der Länge $d(q_1, s_1) = d(q, s)$ gegenüberliegende Innenwinkel α_1 von T_1 nicht größer als der entsprechende Winkel $\tilde{\alpha}_1 = \alpha$ des auf S_1 liegenden Dreiecks $\tilde{T}_1$ sein kann:

$$\alpha \geqq \alpha_1, \tag{281a}$$

und entsprechend findet man durch Vertauschung der Rollen von p, q und r

$$\beta \geqq \beta_1, \quad \gamma \geqq \gamma_1. \tag{281b, c}$$

Damit ist die eine Seite (250a) des lokalen Dreiecksvergleichssatzes bewiesen.

Um die umgekehrte Seite dieses Satzes zu zeigen, vergleichen wir das Kürzestendreieck T auf F mit einem Kürzestendreieck $\tilde{T}_2$ auf der Sphäre S_2, bei dem analog zu (253) und (254)

$$\alpha = \tilde{\alpha}_2 \tag{282}$$

und

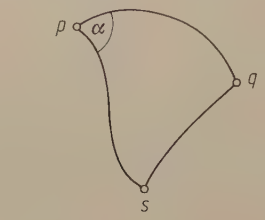
$$d(p, q) = d(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2),\ d(p, s) = d(\tilde{p}_2, \tilde{s}_2) \tag{283}$$

gilt (vgl. Fig. 30!). Wir führen jetzt auf der von T begrenzten und die p mit den Punkten der Seite $\widehat{qs}$ verbindenden Kürzesten enthaltenden Dreiecksfläche[1] geodätische Polarkoordinaten (r, φ) mit dem Ursprung p ein, was wegen der für einen beliebigen Punkt t von $\widehat{qs}$ nach (252b) und (251) gül-

[1] Möglicherweise ist nicht α sondern $2\pi - \alpha$ „Innenwinkel" dieser Dreiecksfläche!

tigen Beziehung

$$d(p,t) \leqq \frac{1}{2} L(T) < d(p, C(p)) \tag{284}$$



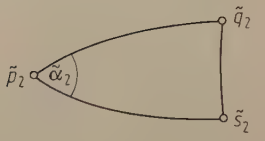


Fig. 30.

möglich ist (vgl. § 110!). Dann besitzt $\widehat{qs}$ die (stetig differenzierbare) Darstellung

$$r = r(\varphi) \qquad (0 \leqq \varphi \leqq \alpha'; \alpha' = \alpha \text{ oder } \alpha' = 2\pi - \alpha)\ ^{1}, \tag{285}$$

so daß die Länge von $\widehat{qs}$ nach § 79 (16) durch

$$d(q,s) = \int_0^{\alpha'} \sqrt[+]{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2(\varphi) + G(r(\varphi), \varphi)}\, d\varphi \tag{286}$$

ausgedrückt werden kann. Es sei nun $\tilde{C}_2$ der durch (285) auf S_2 gegebene und $\tilde{q}_2$ und $\tilde{s}_2$ verbindende Kurvenbogen[2] mit der Länge

$$L(\tilde{C}_2) = \int_0^{\alpha'} \sqrt[+]{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2(\varphi) + G_2(r(\varphi), \varphi)}\, d\varphi \geqq d(\tilde{q}_2, \tilde{s}_2), \tag{287}$$

wobei $\sqrt[+]{G_2}\,(r,\varphi)$ die Lösung der Differentialgleichung (277) unter den Anfangsbedingungen (278) ist. Wegen der aus Fußnote 2 und der Definition von $r_2^*(\varphi)$ und von $\sigma(\varphi)$ sowie aus (279) folgenden Relation

$$r(\varphi) < \frac{\pi}{\sqrt[+]{K_2}} = r_2^*(\varphi) = \sigma(\varphi) \tag{287a}$$

---

[1] Die Darstellung (285) versagt im Falle $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, in dem $\tilde{T}_2 = T_2$ gilt und somit $\alpha = \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2$ schon bewiesen ist!

[2] Wegen $r(\varphi) \leqq \frac{1}{2} L(T) < \frac{\pi}{\sqrt[+]{K_2}}$ (vgl. (284) und (249b)) wird durch (285) tatsächlich ein Kurvenbogen auf S_2 dargestellt!

gilt (276), und durch Vergleich von (286) und (287) folgt

$$d(q, s) \geqq d(\tilde{q}_2, \tilde{s}_2). \tag{288}$$

Dies bedeutet aber zusammen mit (283) in ähnlicher Weise wie früher

$$\alpha_2 \geqq \tilde{\alpha}_2 = \alpha, \tag{289a}$$

und entsprechend findet man durch Vertauschung der Rollen von p, q und r

$$\beta_2 \geqq \beta, \quad \gamma_2 \geqq \gamma, \tag{289b, c}$$

womit auch die andere Seite (250 b) des lokalen Dreiecksvergleichssatzes bewiesen ist.

§ 113. Der innere Durchmesser einer Eifläche

Während man das Maximum des im euklidischen Raum gemessenen Abstands zweier Punkte einer in demselben befindlichen Eifläche F (der Klasse C_3) als „äußeren Durchmesser" von F bezeichnen kann, wird man das Maximum des Abstands zweier Punkte von F im Sinne der inneren Flächenmetrik d „inneren Durchmesser" $d(M)$ von F nennen[1]. *Für $d(M)$ gelten nun die folgenden interessanten Ungleichungen*:

$$d(M) \leqq \frac{\pi}{+\sqrt{K_1}} \tag{290}$$

und

$$d(M) \geqq \frac{\pi}{+\sqrt{K_2}}, \tag{291}$$

wobei K_1 bzw. K_2 wie im letzten Paragraphen das Minimum bzw. das Maximum der Gaußschen Krümmung von F bedeuten. Die in (290) bzw. (291) angegebenen und von K_1 bzw. K_2 abhängenden Schranken für $d(M)$ können nicht verbessert werden, wie das Beispiel einer Kugel vom Radius $\frac{1}{+\sqrt{K_1}}$ bzw. $\frac{1}{+\sqrt{K_2}}$ zeigt, für welche $d(M)$ genau die Werte $\frac{\pi}{+\sqrt{K_1}}$ bzw. $\frac{\pi}{+\sqrt{K_2}}$ besitzt. Die Beziehung (290) wurde schon 1855 von O. Bonnet[2] bewiesen, während der Beweis ihres Gegenstücks (291) erst 1946 von A. V. Pogorelov[3] erbracht werden konnte.

Wir beginnen nun mit dem auf Grund unserer Vorbereitungen sehr einfachen und von Bonnet stammenden Beweis der Ungleichung (290).

[1] Dieses Maximum wird wegen der Kompaktheit der Parametermannigfaltigkeit M von F und der Stetigkeit von d (vgl. (210)!) angenommen!

[2] Siehe Bonnet, O.: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **40**, 1311–1313 (1855).

[3] Siehe Pogorelov, A. V.: Math. Sbornik N. S. **18**, 181–183 (1946).

Es seien p_0 und q_0 zwei Punkte von M mit maximalem Abstand:

$$d(p_0, q_0) = d(M) = \operatorname*{Max}_{\substack{p\in M\\ q\in M}} d(p, q), \tag{292}$$

und es sei G_0' eine p_0 und q_0 verbindende Kürzeste auf der geodätischen Linie G_0. Auf Grund der Maximaleigenschaft von $d(p_0, q_0)$ kann G_0' nicht über q_0 hinaus als Kürzeste verlängert werden, *so daß q_0 Schnittortpunkt von p_0 bezüglich G_0 sein muß*. Nun liegt aber nach dem Satz von Jacobi q_0 nicht hinter dem ersten zu p_0 bezüglich G_0 konjugierten Punkt k_1, der durch die erste positive Nullstelle $r^*(\varphi)$ der Lösung $\overset{+}{\sqrt{G}}\,(r, \varphi)$ von (262) unter den Anfangsbedingungen (263) gegeben ist (vgl. (224)!), d.h. es gilt

$$d(p_0, q_0) \leqq r^*(\varphi). \tag{293}$$

Weiter resultiert aus dem „Sturmschen Nullstellenvergleichssatz" (274) und der Definition von $r_1^*(\varphi)$ als erster positiver Nullstelle der Lösung $\overset{+}{\sqrt{G_1}}(r, \varphi)$ von (257) unter den Anfangsbedingungen (258):

$$r^*(\varphi) \leqq r_1^*(\varphi) = \frac{\pi}{\overset{+}{\sqrt{K_1}}}. \tag{294}$$

(292), (293) und (294) ergeben jetzt zusammengenommen schon die Bonnetsche Relation (290).

Der hier im folgenden wiedergegebene Beweis von (291) stammt von H. Karcher[1] und benutzt die Seite (250b) des im letzten Paragraphen bewiesenen lokalen Dreiecksvergleichssatzes sowie Ideen des von W. Klingenberg[2] gegebenen Beweises von (291). Bevor wir mit ihm beginnen können, müssen wir noch zwei Stetigkeitseigenschaften des Schnittorts beweisen. Die erste davon kann folgendermaßen formuliert werden: *Der Schnittortpunkt c von p auf einer von p auslaufenden geodätischen Linie G_0*[3] *hängt von dem Linienelement von G_0 in p stetig ab, d.h. insbesondere ist $C(p)$ als stetiges Bild der kompakten Kreislinie kompakt.*

Um diese Eigenschaft einzusehen, nehmen wir an, es sei $\{G_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) eine Folge von von p auslaufenden geodätischen Linien mit den Schnittortpunkten c_ν von p, deren Linienelemente in p gegen das Linienelement der geodätischen Linie G_0 in p konvergieren. Weiter sei $\{c_{\mu_\nu}\}$ eine beliebige (wegen der Kompaktheit von M gewiß existierende) konvergente Teilfolge der Folge $\{c_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Dann konvergieren nach § 109 die auf den G_{μ_ν} liegenden Kürzesten $G'_{\mu_\nu} = \widehat{pc}_{\mu_\nu}$ gegen die auf G_0

[1] Siehe Karcher, H.: Manuscripta math. **2**, 77–102 (1970) S. 4.

[2] Siehe Klingenberg, W.: Commentari math. Helv. **34**, 17–36 (1960) Theorem 2.

[3] Wegen (292) existiert c für jede von p auslaufende geodätische Linie G_0!

liegende Kürzeste $G_0' = \widehat{pq}$, wobei speziell

$$\lim_{\nu\to\infty} c_{\mu_\nu} = q \tag{295}$$

ist. Ist jetzt q nicht gleich dem Schnittortpunkt c von p auf G_0, so ist nach dem Jacobischen Satz G_0' ganz frei von zu p konjugierten Punkten auf G_0. Dann existiert aber nach den Überlegungen am Anfang von § 110 ein G_0' (mit Ausnahme von p) enthaltendes Gebiet $U(G_0')$, in welchem geodätische Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$ mit p als Ursprung eingeführt werden können und welches wegen (295) „fast alle" (d.h. alle mit Ausnahme von endlich vielen) Kürzesten G_{μ_ν}' ohne den Punkt p enthält. Da die Endpunkte c_{μ_ν} dieser Kürzesten bezüglich G_{μ_ν}' nicht zu p konjugiert sein können, existiert auf Grund der Schnittortpunkteigenschaft von c_{μ_ν} jeweils noch eine von G_{μ_ν}' verschiedene Kürzeste $G_{\mu_\nu}'' = \widehat{pc}_{\mu_\nu}$ zwischen p und c_{μ_ν} mit einem „aus $U(G_0')$ hinausführenden" Linienelement in p. Diese G_{μ_ν}'' besitzen dann aber eine von $\widehat{pq}$ verschiedene, ebenfalls p und q verbindende Kürzeste $G_0'' = \widehat{\widehat{pq}}$ als Häufungselement im Widerspruch zu $q \neq c$. Dieser Widerspruch zeigt aber $\lim_{\nu\to\infty} c_{\mu_\nu} = c$ für jede konvergente Teilfolge $\{c_{\mu_\nu}\}$ von $\{c_\nu\}$ und damit in der Tat

$$\lim_{\nu\to\infty} c_\nu = c, \tag{296}$$

was zu beweisen war.

Die zweite benötigte Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts lautet: *Sind* $\{p_\nu\}$ *und* $\{q_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *zwei Punktfolgen von* M *mit*

$$\lim_{\nu\to\infty} p_\nu = p, \quad \lim_{\nu\to\infty} q_\nu = q \tag{297}$$

derart, daß q_ν *jeweils ein Punkt des Schnittorts* $C(p_\nu)$ *von* p_ν *darstellt, dann ist* q *ebenfalls ein Punkt des Schnittorts* $C(p)$ *von* p. Der Beweis dieser Behauptung geschehe indirekt: Angenommen, q gehört $C(p)$ nicht an, so läßt sich die Kürzeste $G_0' = \widehat{pq}$, gegen die sich die Kürzesten $G_\nu' = \widehat{p_\nu q_\nu}$ mit q_ν als Schnittortpunkt von p_ν häufen, über q hinaus als Kürzeste verlängern. Nach dem Jacobischen Satz kann dann kein Punkt q' von G_0' zu einem anderen Punkt p' auf G_0' konjugiert sein, da sich sonst die Teilkürzeste $\widehat{p'q'}$ von G_0' nicht über q' hinaus als Kürzeste verlängern ließe. Auf Grund dieser Tatsache existiert nun sogar eine etwa durch die Menge aller Punkte s von M mit $d(s, G_0') = \operatorname{Min}_{t\in G_0'} d(s, t) < \delta$ $(\delta = \text{const} > 0)$ gegebene Umgebung $U(G_0')$ von G_0' mit der Eigenschaft, keine Kürzeste mit konjugierten Endpunkten zu enthalten (anderenfalls gäbe es nämlich nach Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen eine gegen einen Teilbogen von G_0' mit konjugierten Endpunkten konvergierende Folge von

Kürzesten mit konjugierten Endpunkten). O.B.d.A. kann hierbei δ noch so klein gewählt werden, daß

$$\iint\limits_{U(G_0')} K\,do \leqq K_2 \iint\limits_{U(G_0')} do < \pi \tag{298}$$

gilt.

Jetzt läßt sich für einen beliebigen Index ν der Folge $\{G_\nu'\}$ einsehen, daß nicht alle p_ν und q_ν verbindenden Kürzesten in $U(G_0')$ enthalten sein können. Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es auf Grund der Schnittortpunkteigenschaft von q_ν und der Wahl von $U(G_0')$ außer G_ν' noch (mindestens) eine von G_ν' verschiedene, p_ν und q_ν verbindende Kürzeste G_ν'', die wie G_ν' ganz in $U(G_0')$ liegt. Diese beiden Kürzesten bilden ein „Zweieck" mit einem in $U(G_0')$ enthaltenen „Innern" Z_ν und den Innenwinkeln α_ν und β_ν an den „Ecken" p_ν und q_ν, für die man aus der Formel von Gauß-Bonnet Kap. 4 (78) zusammen mit (298)

$$\alpha_\nu + \beta_\nu = \iint\limits_{Z_\nu} K\,do \leqq \iint\limits_{U(G_0')} K\,do < \pi, \tag{299}$$

d.h. insbesondere

$$\alpha_\nu < \pi, \quad \beta_\nu < \pi \tag{300}$$

entnimmt. Nun ist q_ν gewiß nicht der (bezüglich der Metrik d) p_ν nächstgelegene Schnittortpunkt von $C(p_\nu)$. Da nämlich q_ν weder auf G_ν' noch auf G_ν'' (nach Wahl von $U(G_0')$) zu p_ν konjugiert ist, gibt es nach den Überlegungen am Anfang von § 110 wegen (300) in der Nähe von G_ν' bzw. G_ν'' „geodätische Radien" R_ν' bzw. R_ν'' mit dem „Ursprung" p_ν und einer gemeinsamen, etwas kleineren Länge als $L(G_\nu') = L(G_\nu'') = d(p_\nu, q_\nu)$, die sich in ihrem gemeinsamen, in Z_ν gelegenen Endpunkt s_ν (genau so wie die durch s_ν gehenden Bogen der zugehörigen geodätischen Entfernungskreise (§ 81!)) schneiden (vgl. Fig. 31!). Auf Grund dieser Tatsache ist sowohl auf R_ν' wie auch auf R_ν'' spätestens s_ν Schnittortpunkt von p_ν, so daß es in der Tat in Z_ν Punkte von $C(p_\nu)$ mit einem Abstand von p_ν gibt,

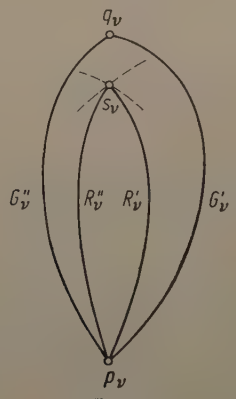


Fig. 31.

welcher kleiner als $d(p_\nu, q_\nu)$ ist. Es sei nun t_ν ein Punkt aus der (wegen der schon bewiesenen ersten Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts) kompakten Menge $C(p_\nu) \cap (Z_\nu \cup G_\nu' \cup G_\nu'')$ mit minimalem Abstand von p_ν. Dann kann t_ν wegen $t_\nu \neq q_\nu$ und der Kürzesteneigenschaft von G_ν' und G_ν'' nicht auf G_ν' oder G_ν'' liegen, und man findet durch die gleichen Überlegungen wie vorhin in bezug auf t_ν an Stelle von q_ν die Existenz zweier verschiedener Kürzester zwischen p_ν und t_ν, welche (mit Ausnahme von p_ν) ganz in Z_ν verlaufen, da t_ν in Z_ν liegt und Z_ν von Kürzesten berandet wird. Wegen der Minimumeigenschaft von t_ν können diese Kürzesten bei t_ν keinen Winkel kleiner als π bilden, was mit der (299) entsprechenden Ungleichung für das neue Kürzestenzweieck einen Widerspruch bildet.

Dieser Widerspruch ergibt endlich für jedes ν die Existenz (mindestens) einer p_ν und q_ν verbindenden und nicht in $U(G_o')$ enthaltenen Kürzesten. Damit sind wir also sicher, daß sich diese Kürzesten gegen eine von G_o' verschiedene Kürzeste zwischen p und q häufen; wegen der Verlängerbarkeit von G_o' über q hinaus eine Unmöglichkeit.

Damit ist auch der Beweis der zweiten Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts zu Ende geführt, und wir kommen zum eigentlichen Beweis der Ungleichung (291). Zu diesem Zweck machen wir jetzt die Annahme

$$m = \inf_{s \in M} d\big(s, C(s)\big) < \frac{\pi}{\sqrt{K_2}}, \tag{301}$$

die wir zu einem Widerspruch führen werden. Auf Grund der Definition von m und der ersten Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts gibt es dann eine Punktfolge $\{s_\nu\}$ und eine Punktfolge $\{t_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ mit den Eigenschaften

$$m = \lim_{\nu \to \infty} d\big(s_\nu, C(s_\nu)\big) \tag{302}$$

und

$$d\big(s_\nu, C(s_\nu)\big) = d(s_\nu, t_\nu) \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{303}$$

wobei t_ν ein Punkt von $C(s_\nu)$ ist. Wegen der Kompaktheit von M kann dabei noch o.B.d.A. die Gültigkeit von

$$\lim_{\nu \to \infty} s_\nu = s, \quad \lim_{\nu \to \infty} t_\nu = t$$

angenommen werden. Dann folgt durch Grenzübergang $\nu \to \infty$ in der aus (302) und (303) folgenden Beziehung $m = \lim_{\nu \to \infty} d(s_\nu, t_\nu)$:

$$m = d(s, t), \tag{304}$$

wobei t nach der zweiten Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts $C(s)$ angehört. t ist somit Schnittortpunkt von s auf einer s und t verbindenden Kürzesten G_o'. Weil letztere nach (304) und (301) eine Länge kleiner als

$\frac{\pi}{+\sqrt{K_2}}$ besitzt, kann t wegen (279) und (287a) nicht zu s auf G_o' konjugiert sein. Somit muß also noch eine von G_o' verschiedene Kürzeste G_o'' zwischen s und t existieren, welche zusammen mit G_o' ein „Zweieck" mit den „Innenwinkeln" φ und ψ an den Ecken s und t bildet. Nach einer Überlegung beim Beweis der zweiten Stetigkeitseigenschaft des Schnittorts folgt aus der Minimumeigenschaft von $d(s, t)$, daß ψ nicht kleiner und (ebenso, wenn man das „innere Zweieck" mit dem „äußeren Zweieck" auf der auf die Sphäre topologisch abbildbaren Parametermannigfaltigkeit M vertauscht!) auch nicht größer als π sein kann. Desgleichen ergibt sich durch Vertauschung der Rollen von s und t unter Berücksichtigung von Fußnote 1 auf S. 305 $\varphi = \pi$, *so daß* G_o' *und* G_o'' *zusammengenommen eine geschlossene geodätische Linie* G_0 *auf* M *der Länge* $2m$ *bilden*!

Nun läßt sich der lokale Dreiecksvergleichssatz noch nicht direkt auf das aus einer Teilung von G_o in drei gleich lange Teile entstehende „Kürzestendreieck" T [1] mit den „Ecken" p, q, s anwenden, weil die Voraussetzung (252b) wegen $L(T) = L(G_o) = 2m$ und $m = d(p, C(p)) = d(q, C(q)) = d(s, C(s))$ gerade noch nicht erfüllt ist. Infolgedessen führen wir wie beim Beweis des Satzes von Jacobi geodätische Parallelkoordinaten w^1, w^2 bezüglich G_o'und G_o'' ein, welche auf einem durch $-\delta < w^1 < +\delta$ ($\delta = \text{const} > 0$) dargestellten Ringgebiet um die durch $w^1 = 0$ gegebene geodätische Linie G_0 mit dem Bogenlängenparameter w^2 existieren, und betrachten die durch

$$w^1 = \varepsilon = \text{const} \quad (0 < |\varepsilon| < \delta) \tag{305}$$

gegebenen Parallelkurven $C(\varepsilon)$ von G_0. Diese haben auf Grund der Gestalt (229) des Bogenelementquadrats die Länge

$$L(\varepsilon) = \int_0^{2m} +\sqrt{h_{22}}\, dw^2, \tag{306}$$

die wegen den aus (230) und (233) sowie aus (230) und (231), (232) folgenden Beziehungen

$$\delta L = \varepsilon \frac{dL}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{307}$$

und

$$\delta^2 L = \varepsilon^2 \frac{d^2 L}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} = -\varepsilon^2 \int_0^{2m} K(0, w^2)\, dw^2 < 0 \tag{308}$$

bei einem hinreichend kleinen δ stets kleiner als die Länge $2m$ von G_o ist. Es sei jetzt $\{\varepsilon_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine gegen 0 konvergierende Folge von

[1] Die Seiten dieses Dreiecks haben die Länge $\frac{2m}{3} < m$ und sind demnach wegen der Minimumeigenschaft von m Kürzeste!

Zahlen mit $0 < |\varepsilon_\nu| < \delta$, und es seien $p^{(\nu)}$, $q^{(\nu)}$, $s^{(\nu)}$ die den Punkten p, q, s von G_o (durch gleiche w^2-Koordinaten!) entsprechenden Punkte auf den Parallelkurven $C(\varepsilon_\nu)$. Diese Punkte $p^{(\nu)}$, $q^{(\nu)}$ und $s^{(\nu)}$ können als „Ecken" eines Kürzestendreiecks $T^{(\nu)}$ auf M mit den Absolutwinkeln $\alpha^{(\nu)}$, $\beta^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$ aufgefaßt werden. Da die „Seiten" $\widehat{p^{(\nu)}q^{(\nu)}}$, $\widehat{p^{(\nu)}s^{(\nu)}}$ $\widehat{q^{(\nu)}s^{(\nu)}}$ der $T^{(\nu)}$ wegen

$$\lim_{\nu\to\infty} p^{(\nu)} = p, \quad \lim_{\nu\to\infty} q^{(\nu)} = q, \quad \lim_{\nu\to\infty} s^{(\nu)} = s \tag{309}$$

gegen die „Drittelbögen" $\widehat{pq}$, $\widehat{ps}$, $\widehat{qs}$ von G_o als verlängerbare und damit einzige, ihre Endpunkte verbindenden Kürzesten[1] konvergieren, haben wir

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{(\nu)} = \pi, \quad \lim_{\nu\to\infty} \beta^{(\nu)} = \pi, \quad \lim_{\nu\to\infty} \gamma^{(\nu)} = \pi. \tag{310}$$

Nach dem lokalen (wegen $L(T^{(\nu)}) \leqq L(\varepsilon_\nu) < 2m$ anwendbaren) Dreiecksvergleichssatz von A. D. Aleksandrov entspricht nun $T^{(\nu)}$ auf der Sphäre S_2 mit der Gaußschen Krümmung K_2, d.h. dem Radius $\frac{1}{+\sqrt{K_2}}$ ein Dreieck $T_2^{(\nu)}$ mit dem Umfang

$$L(T_2^{(\nu)}) = L(T^{(\nu)}) = d(p^{(\nu)}, q^{(\nu)}) + d(q^{(\nu)}, s^{(\nu)}) + d(s^{(\nu)}, p^{(\nu)}) \tag{311}$$

und den Innenwinkeln $\alpha_2^{(\nu)}$, $\beta_2^{(\nu)}$, $\gamma_2^{(\nu)}$, wobei nach (250b)

$$\alpha^{(\nu)} \leqq \alpha_2^{(\nu)} \leqq \pi, \quad \beta^{(\nu)} \leqq \beta_2^{(\nu)} \leqq \pi, \quad \gamma^{(\nu)} \leqq \gamma_2^{(\nu)} \leqq \pi \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{312}$$

gilt. Aus (310) und (312) schließt man auf

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_2^{(\nu)} = \pi, \quad \lim_{\nu\to\infty} \beta_2^{(\nu)} = \pi, \quad \lim_{\nu\to\infty} \gamma_2^{(\nu)} = \pi, \tag{313}$$

so daß o.B.d.A. angenommen werden kann, daß die $T_2^{(\nu)}$ gegen einen Großkreis $G_2^{(0)}$ von S_2 konvergieren. Dieser hat aber dann nach (311), (309) und (301) die Länge

$$L(G_2^{(0)}) = \lim_{\nu\to\infty} L(T_2^{(\nu)}) = d(p, q) + d(q, s) + d(s, p) = 2m < \frac{2\pi}{+\sqrt{K_2}}$$

im Widerspruch dazu, daß die Sphäre S_2 den Radius $\frac{1}{+\sqrt{K_2}}$ besitzt.

Hiermit haben wir die Annahme (301) schließlich zu einem Widerspruch geführt und so die Gültigkeit der Relation

$$\inf_{p\in M} d(p, C(p)) \geqq \frac{\pi}{+\sqrt{K_2}} \tag{314}$$

[1] Vgl. Fußnote 1. S. 324.

nachgewiesen. Daraus folgt speziell für den inneren Durchmesser $d(M)$ von F wegen $d(M) = d(p_0, q_0)$ (vgl. (292)!) und $q_0 \in C(p_0)$:

$$(315) \qquad d(M) = d(p_0, q_0) \geqq d(p_0, C(p_0)) \geqq \inf_{p \in M} d(p, C(p)) \geqq \frac{\pi}{\sqrt{K_2}},$$

d.h. in der Tat die Gültigkeit der zu beweisenden Ungleichung (291). *W. Klingenberg*[1] *konnte übrigens zeigen, daß in* (290) *bzw.* (291) *nur dann Gleichheit herrschen kann, wenn F selbst schon eine Sphäre ist*!

An unserem Beweis von (291) ist bemerkenswert, daß in ihm hypothetisch eine geschlossene geodätische Linie auf der Eifläche F auftritt. *G. Herglotz vermutete, daß jede Eifläche (mindestens) drei verschiedene geschlossene geodätische Linien besitzt, wie dies beim Ellipsoid in den durch seine Hauptachsen aufgespannten Ebenen der Fall ist.* Diese Vermutung wurde allgemeiner für viermal stetig differenzierbare bzw. analytische, geschlossene, orientierbare Flächen von Geschlecht 0 im Jahre 1929 unabhängig von Lusternik und Schnirelmann[2] bzw. M. Morse[3] bewiesen. Morse erhält diesen Satz als Korollar seiner Theorie der „Variationsrechnung im Großen", deren Darstellung wegen ihres Umfangs in diesem Buch leider nicht möglich ist.

§ 114. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 98). Man beweise: Für jede geschlossene, orientierbare und zweimal stetig differenzierbare Fläche F des euklidischen Raums mit der Gaußschen Krümmung K gilt als „räumliches Analogon" zum Satz von Fenchel in § 31 die Ungleichung:

$$\int\int |K| \, do \geqq 2\pi(4 - \chi),$$

worin χ die Eulersche Charakteristik der Fläche bedeutet.

2. (Zu § 98). Man beweise die Ungleichung von Fenchel $\oint \frac{ds}{\varrho} \geqq 2\pi$ für eine zweimal stetig differenzierbare Raumkurve unter Zuhilfenahme von Übungsaufg. 12 in § 66 und der vorstehenden Übungsaufgabe.

3. (Zu § 102). Aus einer (dreimal stetig differenzierbaren) Eifläche F werde durch zwei beliebige sie schneidende Parallelebenen im Abstand h stets eine Zone der Oberfläche $2\pi ah$ ausgeschnitten ($a = \text{const} > 0$). Man beweise, daß dann F notwendig eine Kugel vom Radius a ist.

[Anleitung: Man zeige zunächst unter Benutzung des „Schmiegparaboloids" $x_3 = \frac{1}{2R_1}(x_1)^2 + \frac{1}{2R_2}(x_2)^2$ von F (vgl. Übungsaufg. 1 von § 66!), daß F die konstante Krümmung $\frac{1}{a^2}$ besitzt!]

---

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 320!

[2] Siehe Lusternik u. Schnirelmann: Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **188**, 295–297 (1929) und **189**, 269–271 (1929).

[3] Siehe Morse, M.: Proceedings Nat. Acad. Sci. **15**, 856–859 (1929).

4. (Zu § 102). Es sei $F: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine dreimal stetig differenzierbare Eifläche mit der Stützfunktion h, deren mittlere bzw. deren Gaußsche Krümmung der Relation $H = \frac{1}{h}$ bzw. $K = \frac{1}{h^2}$ genügt. Dann beweise man unter Zuhilfenahme der Integralformel

$$\iint (Kh^2 - 1)\, do = \frac{1}{8} \iint \nabla(\mathfrak{x}^2)\, K\, do,$$

daß F eine Kugel sein muß.

[Anleitung: Man leite die angegebene Integralformel unter Benutzung der Methoden her, die zur Gewinnung der Minkowskischen Integralformeln in § 102 geführt haben!]

5. (Zu § 106). Es seien $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ und $\mathfrak{x} = \overline{\mathfrak{x}}(u^1, u^2)$ zwei dreimal stetig differenzierbare Eiflächen, die durch gleiche Normalen aufeinander bezogen sind und bei welchen in entsprechenden Punkten die Summen der Hauptkrümmungsradien gleich sind. Man beweise: Der Differenzvektor $\mathfrak{y}(u^1, u^2) = \overline{\mathfrak{x}}(u^1, u^2) - \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ stellt den Drehriß einer infinitesimalen Verbiegung der Normalenkugel $\mathfrak{n}(u^1, u^2) = \overline{\mathfrak{n}}(u^1, u^2)$ dar (vgl. § 106!) und ist somit konstant, wodurch sich ein neuer Beweis des Satzes von Christoffel (§ 104) ergibt.

6. (Zu § 108). Man beweise: Auf einer vollständigen, dreimal stetig differenzierbaren Fläche mit überall negativer Gaußscher Krümmung kann es nicht zwei verschiedene, zwei verschiedene Punkte verbindende geodätische Linien geben, die auf der Fläche stetig ineinander überführbar sind.

7. (Zu § 113). Es sei F eine zweimal stetig differenzierbare Eifläche, auf der die Gaußsche Krümmung K den Bedingungen

$$\frac{1}{A^2} \leqq K \leqq \frac{1}{B^2}$$

genügt. Man beweise:

a) Für die Oberfläche O von F gilt $4\pi B^2 \leqq O \leqq 4\pi A^2$,

b) für den Flächeninhalt I der Orthogonalprojektion von F auf eine beliebige Ebene gilt $\pi B^2 \leqq I \leqq \pi A^2$.

8. (Zu § 113). Man zeige: a) Die größte Kugel, die in einer (dreimal stetig differenzierbaren) Eifläche unbehindert rollen kann, hat den kleinsten Hauptkrümmungsradius der Eifläche als Radius. b) Die kleinste Kugel, in der eine (dreimal stetig differenzierbare) Eifläche unbehindert rollen kann, hat den größten Hauptkrümmungsradius der Eifläche als Radius.

[Anleitung: Führe das Problem durch Orthogonalprojektion unter Anwendung von Übungsaufg. 3 von § 66 auf das entsprechende ebene Problem zurück!]

9. (Zu § 113). Sei F eine vollständige, dreimal stetig differenzierbare Fläche des euklidischen Raums mit der Eigenschaft $\left|\frac{1}{R_1}\right| \leqq M, \left|\frac{1}{R_2}\right| \leqq M$. Dann ist zu zeigen:

a) Zu jedem Punkt p von F existiert ein Punkt q von F mit $d(p, q) \geqq \frac{2}{M}$,

b) ist F speziell Eifläche, so gilt für die „Dicke" Δ (d.h. für den kleinsten Abstand paralleler Stützebene!) von F ebenfalls $\Delta \geqq \frac{2}{M}$.

[Anleitung: Man benutze Satz 1b von § 31 von E. Schmidt und im Fall b) eine Orthogonalprojektion von F auf eine Ebene mit zusätzlicher Benutzung von Übungsaufg. 3 von § 66!]

b) Bemerkungen

1. (Zu § 100). K. Voss konnte zeigen, daß die einzigen analytischen, geschlossenen W-Flächen (vgl. Übungsaufg. 4 von § 75!) vom Geschlecht Null Rotationsflächen sind (Math. Ann. **138** (1959) 42—54).

2. (Zu § 102). J. Stoker untersuchte die zweimal stetig differenzierbaren, vollständigen Flächen des euklidischen Raums mit positiver Gaußscher Krümmung. Er bewies, daß jede derartige, nicht geschlossene Fläche die Darstellung $x_3 = f(x_1, x_2)$ mit einer „konvexen" Funktion f auf einem konvexen Definitionsgebiet der x_1, x_2-Ebene besitzt und daß außerdem die sphärische Abbildung eineindeutig mit einer ganz in einer Halbkugel gelegenen Bildmenge ist. Dabei ist also insbesondere die Gesamtkrümmung der Fläche stets nicht größer als 2π (Comp. Math. **3** (1936) 55—88).

3. (Zu § 102). Allgemeiner bewies S. Cohn-Vossen für die (als existent vorausgesetzte) Gesamtkrümmung jeder zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit vollständiger Riemannscher Metrik die Beziehung

$$\iint K\, do \leqq 2\pi\chi \qquad (\chi = \text{Eulersche Charakteristik})$$

(Comptes R. Acad. Sci. Paris **197** (1933) 1165—1167).

4. (Zu § 105). A. Pogorelov (Doklady Akad. Nauk SSSR **94** (1954) 21—23) und K. P. Grotemeyer (Math. Z. **62** (1955) 17—22) konnten unabhängig voneinander den Herglotzschen Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen auf dreimal stetig differenzierbare, vollständige, nicht geschlossene Flächen des euklidischen Raums mit positiver Gaußscher Krümmung und der Gesamtkrümmung 2π (vgl. Bem. 2!) ausdehnen.

5. (Zu § 111). G. Darboux (Théorie des surfaces, Bd. 3) konnte zeigen: Läßt sich zu einer Eilinie C mit einer Symmetrieachse a ein Kreis K so angeben, daß jede Parallele zu a von C und K gleich lange Bogen abschneidet, so entsteht durch Drehung von C um a eine Eifläche, deren sämtliche geodätische Linien geschlossen sind.

8. Kapitel

Extreme bei Flächen

§ 115. Erste Variation der Oberfläche

Wir wollen berechnen, wie sich die Oberfläche einer krummen Fläche bei einer Formänderung verhält. Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2)$ die (zweimal stetig differenzierbare) Ausgangsfläche. Auf deren Flächennormalen tragen wir die Längen

$$n(u^1, u^2) = \varepsilon \bar{n}(u^1, u^2)$$

($\bar{n}$ = stetig differenzierbar, ε = const!) ab und kommen dadurch zur Nachbarfläche

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + n \cdot \mathfrak{n},$$

die für $\varepsilon \to 0$ in die Ausgangsfläche hineinrückt. Durch Ableitung nach u^i folgt

$$\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i + n_i \cdot \mathfrak{n} + n \cdot \mathfrak{n}_i \quad (i = 1, 2).$$

Berechnen wir daraus

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\mathfrak{x}}_i \bar{\mathfrak{x}}_j,$$

so erhalten wir nach § 42 (18):

$$(1) \qquad \delta g_{ij} = \varepsilon \cdot \frac{d\bar{g}_{ij}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = -2\varepsilon \cdot L_{ij} \frac{dn}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = -2L_{ij}\delta n \quad (i, j = 1, 2).$$

Hieraus ergibt sich weiter für

$$\overline{W}^2 = \|\bar{g}_{ij}\|:$$

$$\delta(W^2) = 2W\,\delta W = W^2 g^{ij}\,\delta g_{ij} = -2W^2 g^{ij} L_{ij}\,\delta n$$

und daraus nach § 44 (35), (36)

$$(2) \qquad \delta W = -2WH\,\delta n,$$

wo H die mittlere Krümmung der Ausgangsfläche $\mathfrak{x}$ bedeutet.

Für die Oberfläche $\bar{O} = \int\int \overline{W}\,du^1\,du^2$ von $\bar{\mathfrak{x}}$ folgt daraus als *„erste*

Variation"

$$\delta O = -\int\int \delta n \cdot 2H \cdot W \, du^1 \, du^2 \tag{3}$$

oder

$$\boxed{\delta O = -\int\int 2H \cdot \delta n \cdot do} \tag{4}$$

Darin bedeutet do das Oberflächenelement von $\mathfrak{x}$. Man kommt so durch Variation der Oberfläche ganz von selbst zum Begriff der mittleren Krümmung H, genau so, wie wir durch die Variation der Bogenlänge einer Kurve zu deren Krümmung $1 : \varrho$ gelangt sind (§ 25 (14)).

§ 116. Die Minimalflächen als komplexe Schiebflächen

Physikalische Betrachtungen bei der Statik dünner Seifenhäutchen legen das „Problem von J. Plateau"[1] nahe: *Gegeben sei eine einfach geschlossene Raumkurve. Man soll in diese Kurve eine Fläche mit möglichst kleiner Oberfläche einspannen.* Haben wir eine (zweimal stetig differenzierbare) Fläche, die diese Forderung erfüllt, so muß in (4) stets $\delta O = O$ sein für jedes auf der Randlinie verschwindende δn. Daraus folgt, daß auf den gesuchten Flächen $H = 0$ sein muß. $H = 0$ ist die von J. L. Lagrange 1760[2] aufgestellte Differentialgleichung der „Extremalen" unseres Variationsproblems. Man nennt deshalb die Flächen mit identisch verschwindender mittlerer Krümmung, da sie als Lösungen der Minimumaufgabe Plateaus in Betracht kommen, *„Minimalflächen"*. Es gibt wohl kaum eine zweite Flächenfamilie, die wie die Minimalflächen die Aufmerksamkeit der größten Geometer auf sich gezogen hätte. So haben, um nur die wichtigsten Namen zu nennen, J. L. Lagrange, G. Monge, B. Riemann, K. Weierstraß, H. A. Schwarz, E. Beltrami, S. Lie und A. Ribaucour Untersuchungen über Minimalflächen angestellt.

Man kann die Bestimmung der Minimalflächen sehr leicht auf die Bestimmung der isotropen Kurven (§§ 22, 23) zurückführen und hat darin wohl das glänzendste Beispiel für die Anwendung komplexer geometrischer Gebilde (wie die isotropen Kurven) auf reelle und physikalisch wichtige Flächen.

Um dies einzusehen, beachten wir, daß für eine Minimalfläche aus den Ableitungsgleichungen von Gauß (Kap. 4 (210)) unter Benutzung von

---

[1] Plateau, J.: Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pésanteur. Mémoires de l'Académie royale de Belgique **36** (1866).

[2] Lagrange, J. L.: Werke I, S. 335.

§ 90 (112) sowie § 44 (35), (36)

$$\Delta \mathfrak{x} = g^{ij}\mathfrak{x}_{i;j} = g^{ij}L_{ij}\mathfrak{n} = 2H\mathfrak{n} = 0 \tag{5}$$

folgt. Daher kann nach § 93 eine beliebige Koordinate x_ν ($\nu = 1, 2, 3$) mit $\nabla x_\nu > 0$ [1] als ein Parameter p^1 eines isothermen Parametersystems $\{p^1, p^2\}$ gewählt werden:

$$p^1 = x_\nu, \tag{6a}$$

während sich nach Kap.6 (150) der zweite Parameter p^2 zu

$$p^2 = \pm \int \varepsilon_{jk} g^{ij} (x_\nu)_i \, du^k \tag{6b}$$

ergibt. Durch (6a, b) kann die Minimalfläche in zweimal stetig differenzierbarer Weise auf die isothermen Parameter $\{p^1, p^2\}$ bezogen werden, in welchen die eine Minimalfläche kennzeichnende Bedingung (5) die spezielle Form

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{(\partial p^1)^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{(\partial p^2)^2} = 0 \tag{7}$$

annimmt.

Nun genügen aber die (zweimal stetig differenzierbaren) Funktionen x_ν und das (wegen (7) vom Wege unabhängige!) Linienintegral $\int -(x_\nu)_2 \, dp^1 + (x_\nu)_1 \, dp^2$ ($\nu = 1, 2, 3$) jeweils den partiellen Differentialgleichungen von Cauchy und Riemann (vgl. Kap.6 (149)!). Eine bekannte Tatsache in der Funktionentheorie besagt, daß dann die (komplexen) Funktionen

$$y_\nu = x_\nu + i \int -(x_\nu)_2 \, dp^1 + (x_\nu)_1 \, dp^2 \quad (\nu = 1, 2, 3) \tag{8}$$

von dem (komplexen) Parameter $z^1 = p^1 + ip^2$ stetig differenzierbar abhängen und somit in einer geeigneten Umgebung eines Punktes konvergente Potenzreihenentwicklungen in z^1 besitzen. Das gleiche gilt aber jetzt auch für die Realteile x_ν in bezug auf die Parameter p^1, p^2, *d.h. die Darstellung einer (zweimal stetig differenzierbaren) Minimalfläche durch isotherme Parameter ist stets „analytisch"*. Setzt man die Potenzreihenentwicklung der Funktionen x_ν in den Parametern p^1, p^2 ins Komplexe fort und betrachtet neben dem komplexen Parameter

$$z^1 = p^1 + ip^2 \tag{9a}$$

noch den zweiten komplexen Parameter

$$z^2 = p^1 - ip^2, \tag{9b}$$

so ergeben sich Potenzreihenentwicklungen der Funktionen x_ν in z^1 und z^2,

[1] Ein solches x_ν existiert stets, da andernfalls $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = 0$ gelten würde!

d.h. eine analytische Vektorfunktion

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(z^1, z^2),$$

durch welche die „komplexe Erweiterung" der zunächst „reellen" Minimalfläche dargestellt wird. Hierbei sind die „Parameterlinien" $z^1 = \text{const}$ und $z^2 = \text{const}$ wegen $ds^2 = \lambda((dp^1)^2 + (dp^2)^2) = \lambda\, dz^1\, dz^2$ isotrope Kurven.

Die Differentialgleichung (7) nimmt nun nach Ausführung der Transformation (9) die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial z^1\, \partial z^2} = 0$$

an, d.h. es gilt

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(z^1) + \mathfrak{z}(z^2) \quad [1] \tag{10}$$

mit

$$\mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0 \tag{11}$$

und

$$\mathfrak{y}'\, \mathfrak{z}' \neq 0. \tag{12}$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (10), (11), (12) rückwärts $H = 0$.

Wenn wir daher eine Ausdrucksweise von § 54 hier wieder verwerten, so haben wir gefunden: *Die (komplex erweiterten) Minimalflächen sind Schiebflächen, deren Erzeugende isotrope Kurven sind.*

Somit kommt die Integration der Differentialgleichung $H = 0$ zurück auf die Bestimmung der isotropen Kurven, die uns in § 23 schon gelungen ist. Die vorgetragene Deutung der Formeln von G. Monge für Minimalflächen[2] rührt von S. Lie (1877)[3] her.

§ 117. Formeln von Weierstraß für Minimalflächen

Wenn man beachtet, daß auf einer *reellen* Minimalfläche (d.h. $z_2 = \bar{z}_1$) die isotropen Linien paarweise konjugiert komplex sind, d.h. daß in der Parameterdarstellung (10)

$$\mathfrak{z}(\bar{z}^1) = \overline{\mathfrak{y}(z^1)} \tag{13}$$

gilt (vgl. (8)!), und wenn man für $\mathfrak{y}$ die Parameterdarstellung von § 23 einführt, so erhält man für reelle, zweimal stetig differenzierbare Mini-

[1] Der Faktor 2 ist hier unwesentlich!

[2] Vgl. etwa G. Monges „Application ..." von 1850, XX, S. 211—222. Die ersten Versuche Monges über Minimalflächen gehen bis auf 1784 zurück.

[3] Lie, S.: Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Math. Ann. **14**, 331 (1879).

malflächen die „integrallose" Darstellung

$$(14)\qquad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \Re\left(\pm i\left(f - tf' - \frac{1-t^2}{2}f''\right)\right)\\ x_2 &= \Re\left(f - tf' + \frac{1+t^2}{2}f''\right)\\ x_3 &= \Re\left(-i(f' - tf'')\right). \end{aligned}}$$

Dabei bedeutet f eine beliebige analytische Funktion der komplexen Veränderlichen t und $\Re$ den Realteil der dahinterstehenden analytischen Funktion. Die Ebene, bei der die isotrope Kurve $\mathfrak{y}$ in (10) eine Gerade darstellt, entzieht sich nach § 23 dieser Darstellung. Ferner hat man wie in § 23 von der Funktion f noch vorauszusetzen, daß ihre dritte Ableitung nicht identisch verschwinde. Die Formeln (14) oder gleichwertige Formeln sind von K. Weierstraß 1866 angegeben worden[1]. Aus diesen Formeln folgt, *daß zu jeder analytischen Funktion eine Minimalfläche gehört und umgekehrt.* Es besteht also zwischen der seit Cauchy, Riemann und Weierstraß so viel beackerten Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der Theorie der Minimalflächen ein inniger Zusammenhang.

Wir wollen feststellen, welche geometrische Bedeutung die komplexe Veränderliche $t = r + is$ (r, s = reell!) für die Minimalfläche hat. Dazu berechnen wir uns aus der Darstellung (14) von Weierstraß den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen. Zunächst erhält man durch partielle Ableitung der Darstellung (10) unserer Minimalfläche in Verbindung mit (9)

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2} = \frac{i}{4}(\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}') \times (\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}') = -\frac{i}{2}(\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}')$$

und damit wegen (11) und § 2 (28)

$$(15)\qquad \mathfrak{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} \times \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} \times \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2}\right)^2}} = \frac{-\frac{i}{2}(\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}')}{+\sqrt{\frac{1}{4}(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')^2}} = -i\frac{\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}\ ^{((2))}.$$

Daraus folgt unter Benutzung der aus (13) folgenden Beziehung

$$(16)\qquad \mathfrak{z}'(\overline{z_1}) = \overline{\mathfrak{y}'(z_1)},$$

---

[1] Weierstraß, K.: Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Werke III, S. 39–52; bes. S. 46 (35).

((2)) Hierbei ist die Beziehung $\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' = \left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} - i\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2}\right)\left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1} + i\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2}\right) = \left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p^2}\right)^2 > 0$ berücksichtigt worden!

sowie der speziellen Parameterdarstellung von § 23 für $\mathfrak{y}$, d.h. insbesondere

$$y_1' = \mp i\,\frac{1-t^2}{2}\,f'''$$

$$y_2' = \frac{1+t^2}{2}\,f'''$$

$$y_3' = \frac{2it}{2}\,f''':$$

$$n_1 = \frac{-(t+\bar{t})}{1+t\bar{t}} \qquad n_1 = \frac{-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\bar{t}}\right)}{1+\frac{1}{t}\frac{1}{\bar{t}}}$$

(17)
$$n_2 = \frac{i(t-\bar{t})}{1+t\bar{t}} \quad \text{bzw.} \quad n_2 = \frac{i\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\bar{t}}\right)}{1+\frac{1}{t}\frac{1}{\bar{t}}}$$

$$n_3 = \frac{-(1-t\bar{t})}{1+t\bar{t}} \qquad n_3 = \frac{-\left(1-\frac{1}{t}\frac{1}{\bar{t}}\right)}{1+\frac{1}{t}\frac{1}{\bar{t}}}$$

oder umgekehrt

(18)
$$t = \frac{n_1+i\,n_2}{-1+n_3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{t} = \frac{n_1+i\,n_2}{-1+n_3}\,.$$

Durch Angabe der komplexen Zahl $t = r + is$ bzw. $\frac{1}{t}$ ist also der Einheitsnormalenvektor $\mathfrak{n}$ festgelegt, und umgekehrt hängt t bzw. $\frac{1}{t}$ allein von $\mathfrak{n}$ ab! Dieser Zusammenhang zwischen den Punkten $\mathfrak{n}$ der Einheitskugel $\mathfrak{n}^2 = 1$ und den t-Werten wird durch „stereographische Projektion" vermittelt. Verbindet man nämlich jeden Punkt $\mathfrak{n}$ mit dem „Nordpol" (0, 0, 1) der Einheitskugel, so wird die Äquatorebene $x_3 = 0$ von diesem Strahl im Punkte $\mathfrak{n}^*$ mit den Koordinaten $-r$, $-s$ bzw. $\frac{-r}{r^2+s^2}$, $\frac{s}{r^2+s^2}$ geschnitten (vgl. Fig. 32).

Faßt man also die Ebene $x_3 = 0$ als Gaußsche Ebene der komplexen Zahlen $t = r + is = x_1 + ix_2$ auf, und ordnet man den Werten $-t$ bzw. $-\frac{1}{t}$ die Punkte der Einheitskugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ zu, die aus den Punkten $(-r, -s, 0)$ bzw. $\left(\frac{-r}{r^2+s^2}, \frac{s}{r^2+s^2}, 0\right)$ durch Projektion aus

(0, 0, 1) entstehen, so hat man die Zahlenkugel Riemanns vor sich. Für unsere Minimalfläche bedeutet also $-t$ bzw. $-\frac{1}{t}$ Riemanns komplexe Veränderliche für das Gaußsche sphärische Abbild der Fläche durch parallele Normalen.

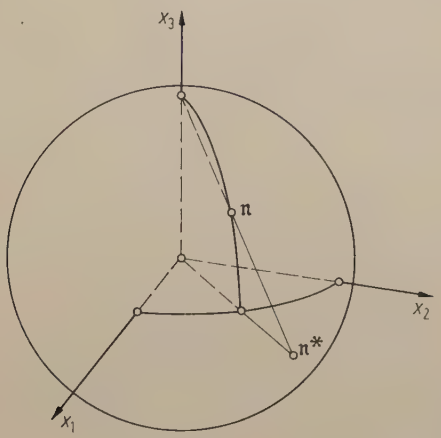


Fig. 32.

Übrigens hat O. Bonnet 1853 bemerkt, daß je zwei Flächen der von einem reellen Parameter α abhängenden Schar von Minimalflächen

$$2\mathfrak{x} = e^{\alpha i}\mathfrak{y}(z^1) + e^{-\alpha i}\mathfrak{z}(z^2) \quad (\mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0)$$

mit der ersten Grundform $ds^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')\,dz^1\,dz^2$ $(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}') \neq 0$ und dem Normaleneinheitsvektor (15) durch gleiche Parameter aufeinander isometrisch und mit parallelen Tangentialebenen abgebildet werden[1]. Er nannte diese Minimalflächen deshalb „assoziiert".

§ 118. Formeln von Study für Minimalflächen

Gehen wir von der Darstellung (10) einer nicht ebenen, komplexen Minimalfläche $\mathfrak{x}$ durch zwei nicht geradlinige isotrope Kurven $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ aus:

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(z^1) + \mathfrak{z}(z^2);\ \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0,\ \ \mathfrak{y}'\mathfrak{z}' \neq 0,$$

$$\mathfrak{y}' \times \mathfrak{y}'' \neq 0,\ \mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'' \neq 0,$$

[1] Siehe Bonnet, O.: Comptes Rendus 37, 529–532 (1853).

so liegt nach § 22 der Gedanke nahe, mit Study die beliebigen Parameter z^1, z^2 durch die „*natürlichen*“ Parameter p, q zu ersetzen, so daß

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(p) + \mathfrak{z}(q),$$

$$\mathfrak{y}' \times \mathfrak{y}'' = -\mathfrak{y}', \quad \mathfrak{y}''^2 = -1, \tag{19}$$

$$\mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'' = -\mathfrak{z}', \quad \mathfrak{z}''^2 = -1$$

wird (vgl. § 22 (167), (168)). Nun ist nach (15)

$$\mathfrak{n} = -i \frac{\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'}. \tag{20}$$

Aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ folgt $\mathfrak{n} \dfrac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = 0$ oder

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = A\mathfrak{y}' + B\mathfrak{z}'. \tag{21}$$

Andererseits ist $\mathfrak{n}\mathfrak{z}' = 0$. Durch Ableitung nach p folgt daraus $\dfrac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p}\mathfrak{z}' = 0$. Deshalb ist nach (21):

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p}\mathfrak{z}' = A\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' = 0, \text{ also } A = 0.$$

Ebenso folgt aus $\mathfrak{n}\mathfrak{y}' = 0$ durch Ableitung nach p mit (21)

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p}\mathfrak{y}' = -\mathfrak{n}\mathfrak{y}'' = B \cdot \mathfrak{y}'\mathfrak{z}'.$$

Somit ist

$$B = -\frac{\mathfrak{n}\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'} = -i\frac{(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}')}{(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')^2}$$

oder endlich nach (19)

$$B = i\frac{1}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'},$$

d. h.

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p} = i\frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}. \tag{22a}$$

Entsprechend erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial q} = -i\frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}. \tag{22b}$$

Neben den Parametern p, q auf der Minimalfläche sollen noch zwei weitere (für reelle Minimalflächen reelle) Parameterpaare u, v und α, β

verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
p &= u + iv = \frac{\alpha + i\beta}{1+i}, \\
q &= u - iv = \frac{\alpha - i\beta}{1-i}; \\
u &= \frac{p+q}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}, \\
v &= \frac{p-q}{2i} = -\frac{\alpha-\beta}{2}; \\
\alpha &= u - v = \frac{p - iq}{1-i}, \\
\beta &= u + v = \frac{p + iq}{1+i}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Setzen wir für den Augenblick

$$
\frac{2}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'} = \frac{1}{2\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial p}\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q}} = 2\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial p}\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial q} = \mu,
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
d\mathfrak{x} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{y}'\,dp + \mathfrak{z}'\,dq), \\
d\mathfrak{n} &= \frac{i\mu}{2}(\mathfrak{z}'\,dp - \mathfrak{y}'\,dq)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

und daraus (§§42, 50)

$$
I = d\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{x} = \frac{dp\,dq}{\mu} = \frac{du^2+dv^2}{\mu} = \frac{d\alpha^2+d\beta^2}{2\mu},
$$

$$
II = -d\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{n} = -\frac{i}{2}(dp^2 - dq^2) = 2\,du\,dv = -\frac{1}{2}(d\alpha^2 - d\beta^2),
$$

$$
III = d\mathfrak{n}\cdot d\mathfrak{n} = \mu\,dp\,dq = \mu(du^2+dv^2) = \frac{\mu}{2}(d\alpha^2+\delta\beta^2).
$$

Nach § 50 (86) war

$$
KI - 2HII + III = 0;
$$

also ist hier wegen $H = 0$

$$
KI + III = 0.
$$

Somit folgt für das Krümmungsmaß unserer Minimalfläche

$$
K = -\mu^2 = -\left(\frac{2}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}\right)^2. \tag{25}
$$

Beachten wir, daß $II = 0$ die Differentialgleichung der Asymptotenlinien ist, so ergibt sich, *daß* $u, v = \text{const}$ *oder* $p \pm q = \text{const}$ *die Asymptotenlinien unserer Fläche sind.* Führen wir andererseits $\alpha, \beta = \text{const}$

als Parameterlinien ein, so fehlt in I und II das gemischte Glied; *also sind die Kurven* $p \mp iq = \text{const}$ nach § 46 (50) *die Krümmungslinien unserer Fläche.* Hat man also erst die natürlichen Parameter p, q ermittelt, so sind damit die Krümmungslinien und Asymptotenlinien gleichzeitig aufgefunden.

Die Formeln dieses Abschnittes hat E. Study in einer Vorlesung 1909 angegeben, in der er die Theorie der Minimalflächen neu bearbeitet hat[1].

§ 119. Eine Formel von Schwarz für die Oberfläche einer Minimalfläche

1874 hat H. A. Schwarz eine auf Untersuchungen von Riemann zurückgehende Formel angegeben[2], die die Oberfläche eines (einfach zusammenhängenden) Minimalflächenstücks durch ein längs der einfach geschlossenen, stetig differenzierbaren Randkurve erstrecktes Linienintegral ausdrückt. Um dieselbe herzuleiten, benutzen wir wie im letzten Kapitel den Kalkül der Differentialformen und finden auf Grund von § 102 (54a) unter Benutzung des Satzes von Stokes (Kap. 5 (22)!):

$$(26)\quad O = \tfrac{1}{2}\iint (\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = \tfrac{1}{2}\iint d\,(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} + \tfrac{1}{2}\iint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\oint (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x})\,,$$

weil $\iint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{n}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$ wegen der Relation (54b) in § 102:

$$(27)\qquad d\mathfrak{n} \underset{(\wedge)}{\times} d\mathfrak{x} = -2H\mathfrak{n}\, do = 0$$

verschwindet. (26) stellt schon die gewünschte Oberflächenformel dar. Aus dieser Formel folgt z. B., daß man die Vektoren $\mathfrak{n}$ längs der Randkurve sicher nicht beliebig vorschreiben darf. Denn wegen seiner geometrischen Bedeutung muß das Integral $\oint(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x})$ von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig sein, d. h., es muß $\oint (\mathfrak{n}, \mathfrak{x} + \mathfrak{v}, d\mathfrak{x}) - \oint(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}) = \oint(\mathfrak{n}, \mathfrak{v}, d\mathfrak{x})$ für jeden beliebigen konstanten Vektor $\mathfrak{v}$ verschwinden. Das ergibt die Bedingung

$$(28)\qquad \oint \mathfrak{n} \times d\mathfrak{x} = \oint d(\mathfrak{n} \times \mathfrak{x}) + \oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{n} = \oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{n} = 0$$

für den „Randstreifen" des Minimalflächenstücks, die auf Grund des Stokesschen Satzes auch unmittelbar aus (27) gefolgert werden kann.

---

[1] Vgl. die Angaben am Schluß der Abhandlung von Study, E.: Über einige imaginäre Minimalflächen. Leipz. Akad.-Ber. **63**, 14–26 (1911).

[2] Siehe Schwarz, H. A.: Mathematische Abhandlungen I, S. 178.

Das Verschwinden des Linienintegrals (28) *für jede einfach geschlossene, stetig differenzierbare Kurve des Minimalflächenstücks ist daher für die Minimalflächen kennzeichnend.*

Es sei nebenbei erwähnt, daß man die Beziehung (28) auch mechanisch deuten kann. Denkt man sich die Minimalfläche durch eine dünne, biegsame, aber nicht dehnbare Haut verwirklicht und in dieser einen solchen Spannungszustand hergestellt, daß auf das Tangentenelement $d\mathfrak{x}$ der Spannungsvektor $d\mathfrak{n}$ wirkt, so ist wegen

$$\oint d\mathfrak{n} = 0, \quad \oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{n} = 0$$

die Haut im Gleichgewicht.

Statt die Minimalfläche als Haut zu verwirklichen, kann man ebensogut die Einheitskugel $\mathfrak{n}$ oder ein Stück von ihr durch eine Haut ersetzen und im Tangentenelement $d\mathfrak{n}$ die Spannung $d\mathfrak{x}$ herstellen. Wegen

$$\oint d\mathfrak{x} = 0, \quad \oint \mathfrak{n} \times d\mathfrak{x} = 0$$

herrscht dann wiederum Gleichgewicht.

Die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$ stehen in der Beziehung, daß man die eine als „reziproken Kräfteplan" zu den Spannungen in der anderen ansehen kann[1].

§ 120. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen

Nach (28) ist das auf einer Minimalfläche erstreckte Integral

$$\int \mathfrak{n} \times d\mathfrak{x}$$

vom Integrationsweg unabhängig[2]. Wir wollen dieses Integral auf eine andere Form bringen, indem wir die Parameterdarstellung (10) der Minimalfläche zugrunde legen. Wir setzen also

$$\mathfrak{n} = -i \frac{\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}' \mathfrak{z}'}, \qquad 2d\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'\, dz^1 + \mathfrak{z}'\, dz^2$$

(vgl. (15)!) und finden nach der Rechenregel § 2 (29) das Ergebnis

$$2\mathfrak{n} \times d\mathfrak{x} = i(\mathfrak{y}'\, dz^1 - \mathfrak{z}'\, dz^2). \tag{29}$$

Aus den Gleichungen

$$d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z} = 2d\mathfrak{x}$$
$$d\mathfrak{y} - d\mathfrak{z} = -2i(\mathfrak{n} \times d\mathfrak{x})$$

[1] Vgl. Blaschke, W.: Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. Congress Cambridge **2**, 291—297 (1912).

[2] Es ist das ein Sonderfall eines Satzes von Fräulein E. Noether über invariante Variationsprobleme. Gött. Nachr. **1918**, S. 235—257.

folgen die 1874 von H. A. Schwarz[1] gefundenen Formeln

$$\begin{aligned} d\mathfrak{y} &= d\mathfrak{x} - i(\mathfrak{n}\times d\mathfrak{x}) \\ d\mathfrak{z} &= d\mathfrak{x} + i(\mathfrak{n}\times d\mathfrak{x}) \end{aligned} \tag{30a}$$

oder

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \mathfrak{x} - i\int \mathfrak{n}\times d\mathfrak{x} \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{x} + i\int \mathfrak{n}\times d\mathfrak{x}. \end{aligned}} \tag{30b}$$

Hierin ist in übersichtlichster Art die Lösung einer 1844 durch den Professor an der Universität in Uppsala E. G. Björling behandelten Aufgabe enthalten: *Alle Minimalflächen durch einen vorgeschriebenen analytischen „Streifen" zu ermitteln.* Das heißt die Minimalfläche soll so bestimmt werden, daß sie durch eine vorgegebene (offene) Kurve hindurchgeht und in den (komplexen) Punkten der Kurve gegebene Tangentialebenen besitzt. Die Kurve sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(z)$, die Tangentialebenen werden durch die Vektoren $\mathfrak{n}(z)$ der Flächennormalen bestimmt ($\mathfrak{n}^2 = 1$, $\mathfrak{n}\mathfrak{x}' = 0$). Dann kann man die Integrale (30b) längs der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(z)$ erstrecken. Man findet so die wegen

$$\mathfrak{y}'^2 = (\mathfrak{x}' - i\,(\mathfrak{n}\times\mathfrak{x}'))^2 = \mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{n}^2\mathfrak{x}'^2 + (\mathfrak{n}\mathfrak{x}')^2 = 0$$

und entsprechend $\mathfrak{z}'^2 = 0$ isotropen Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(z)$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}(z)$, so daß die gesuchte Minimalfläche $\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{y}(z^1) + \mathfrak{z}(z^2))$ existiert und durch den Streifen $z^1 = z^2 = z$ eindeutig bestimmt ist. Eine Ausnahme könnte nur dann eintreten, wenn längs $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(z)$

$$\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' = (\mathfrak{x}' - i(\mathfrak{n}\times\mathfrak{x}'))\,(\mathfrak{x}' + i(\mathfrak{n}\times\mathfrak{x}')) = \mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{n}^2\mathfrak{x}'^2 - (\mathfrak{n}\mathfrak{x}')^2 = 2\mathfrak{x}'^2 = 0,$$

d.h. die Streifenkurve isotrop wäre. Somit ergibt sich:

Durch einen analytischen Streifen, dessen Kurve nicht isotrop ist (also insbesondere durch jeden reellen Streifen), geht eine und nur eine Minimalfläche hindurch, die durch die Formeln von Schwarz (30b) *bestimmt ist.*

Schwarz hat bemerkt[1], daß hierin die besonderen Ergebnisse enthalten sind:

Enthält eine Minimalfläche eine (nicht isotrope) gerade Linie, so führt eine Drehung mit dem Winkel π um diese Gerade die Minimalfläche in sich selbst über.

Liegt auf einer Minimalfläche eine (nicht isotrope) nicht geradlinige ebene geodätische Linie, so ist die Fläche zur Ebene dieser Kurve symmetrisch.

---

[1] Schwarz, H. A.: Mathematische Abhandlungen I, S. 179, S. 181.

Durch die Halbdrehung bzw. Spiegelung geht nämlich der Streifen mit der angegebenen Kurve in sich über.

Es sei noch einmal der Unterschied zwischen der „Anfangswertaufgabe" von Björling und der „Randwertaufgabe" von Plateau (§ 116) hervorgehoben: Bei Björling soll *durch ein offenes (analytisches) Kurvenstück eine Minimalfläche gelegt wer den, die längs dieser Kurve (analytisch) vorgegebene Tangentenebenen hat.* Bei Plateau hingegen handelt es sich um das mathematisch ungleich schwierigere Problem, *ein einfach zusammenhängendes Minimalflächenstück (mit der Einheitskreisscheibe* $(p^1)^2 + (p^2)^2 < 1$ *als Gebiet isothermer Parameter* $\{p^1, p^2\}$*) zu bestimmen, welches durch eine vorgegebene, einfach geschlossene (rektifizierbare) Raumkurve berandet wird und im Vergleich zu allen anderen (stückweise stetig differenzierbaren) derart in die Kurve „eingespannten" Flächen minimalen Flächeninhalt besitzt.* Erst 1930 bzw. 1931 gelang T. Radó[1] bzw. J. Douglas[2] der Nachweis der Existenz eines derartigen, noch mit etwaigen „Verzweigungspunkten" behafteten Minimalflächenstücks.

§ 121. Zweite Variation der Oberfläche

Obwohl es im Rahmen dieses Buches unmöglich ist, den die Theorie der konformen Abbildungen benutzenden Beweis der Existenz einer Lösung des Plateauschen Problems aufzuführen, sollen jetzt notwendige und auch hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß ein Minimalflächenstück die kleinste Oberfläche unter allen mit festgehaltenem Rand *benachbarten* Flächen besitzt. Zu diesem Zweck ist es nötig, erst einmal die Rechnung von § 115 dahin zu verfeinern, daß wir neben der „ersten Variation" $\delta O = \varepsilon \left.\frac{d\bar{O}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ auch die „zweite Variation" $\delta^2 O = \varepsilon^2 \left.\frac{d^2\bar{O}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$ beim Übergang der (zweimal stetig differenzierbaren) Fläche $\mathfrak{x}$ zur Nachbarfläche $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + n\mathfrak{n}$ ($n = \varepsilon\bar{n}$ = stetig differenzierbar) bestimmen. Wir haben wie in § 115

$$\bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i + n\mathfrak{n}_i + n_i\mathfrak{n} \quad (i = 1, 2),$$

d.h. nach § 42 (18) und § 50 (83):

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - 2L_{ij}n + e_{ij}n^2 + n_i n_j \quad (i, j = 1, 2)$$

und erhalten daraus

$$\delta^2 g_{ij} = \varepsilon^2 \left.\frac{d^2\bar{g}_{ij}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = 2\varepsilon^2 e_{ij}\left(\left.\frac{dn}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right)^2 + 2\varepsilon^2 \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)\right|_{\varepsilon=0}$$

(31)

$$= 2e_{ij}(\delta n)^2 + 2(\delta n)_i\,(\delta n)_j \quad (i, j = 1, 2).$$

[1] Siehe Radó, T.: Math. Zeitschrift **32**, 763–796 (1930).

[2] Siehe Douglas, J.: Transactions Amer. Math. Soc. **33**, 263–321 (1931).

Hieraus ergibt sich weiter für $\overline{W^2} = \|\bar{g}_{ij}\|$ unter Benutzung von (1):

$$\delta^2(W^2) = 2W\,\delta^2 W + 2(\delta W)^2 = W^2 g^{ij}\,\delta^2 g_{ij} + 2\,\|\delta g_{ij}\| =$$
$$= (2W^2 g^{ij} e_{ij} + 8W^2 K)\,(\delta n)^2 + 2W^2 g^{ij}(\delta n)_i\,(\delta n)_j,$$

woraus zusammen mit (2), § 50 (87) und § 88 (95)

$$\delta^2 W = 2WK(\delta n)^2 + W\nabla(\delta n) \tag{32}$$

resultiert. Für die Oberfläche $\bar{O} = \int\int \overline{W}\,du^1\,du^2$ von $\bar{\mathfrak{x}}$ folgt jetzt als „zweite Variation“:

$$\boxed{\delta^2 O = \int\int \left(2K\,(\delta n)^2 + \nabla(\delta n)\right) do} \tag{33}$$

Wir nehmen nun als Ausgangsfläche $\mathfrak{x}$ ein einfach zusammenhängendes Stück einer flachpunktfreien Minimalfläche ($H = 0$, $K < 0$), welches mit einem isothermen Parametersystem $\{p^1, p^2\}$ versehen ist und von einer einfach geschlossenen und zweimal stetig differenzierbaren Kurve berandet wird. Dann können wir an Stelle des ersten Beltramischen Differentiators ∇ bezüglich der ersten Grundform I denselben ∇_{III} bezüglich der dritten Grundform III verwenden. Es ist nämlich in diesem Fall nach § 50 (86) und § 88 (95)

$$III = -KI \tag{34}$$

und damit

$$\nabla_{III}(\delta n) = -\frac{1}{K}\nabla(\delta n).$$

Setzt man dies und das absolute Flächenelement $|d\omega| = -K\,do$ des sphärischen Bildes von $\mathfrak{x}$ in (33) ein, so erhält man

$$\delta^2 O = \int\int \left(\nabla_{III}(\delta n) - 2(\delta n)^2\right)|d\omega|, \tag{35}$$

eine Formel, die in etwas anderer Form schon von H. A. Schwarz 1872 angegeben worden ist[1]. Es ist besonders auffallend, daß in dieser Formel die Funktion δn nur mehr auf dem auf der Einheitskugel liegenden sphärischen Bild des Minimalflächenstücks auftritt.

Jetzt ist es leicht, notwendige Bedingungen dafür anzugeben, daß das Minimalflächenstück $\mathfrak{x}$ im Vergleich zu allen benachbarten, stetig differenzierbaren und denselben Rand wie die Ausgangsfläche $\mathfrak{x}$ besitzenden Flächen $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + (\delta n)\mathfrak{n}$ minimalen Flächeninhalt besitzt. In diesem Fall muß nämlich

$$\delta^2 O \geqq 0 \tag{36}$$

[1] Vgl. Schwarz, H. A.: Gesammelte Abhandlungen I, S. 157.

gelten, und zwar um so mehr für alle zweimal stetig differenzierbaren und am Rande verschwindenden Variationen δn, bei welchen (35) unter Zuhilfenahme der Greenschen Formel § 91 (126)

$$\iint \nabla_{III}(\delta n)\,|d\omega| = -\iint \delta n\, \Delta_{III}(\delta n)\,|d\omega|$$

in der Form

$$\delta^2 O = -\iint (\Delta_{III}(\delta n) + 2\delta n)\,\delta n\,|d\omega| \tag{37}$$

geschrieben werden kann. Dabei bedeutet Δ_{III} den zweiten Differentiator Beltramis bezüglich der dritten Grundform III. Nun heißt bekanntlich eine Konstante λ „Eigenwert" der Differentialgleichung

$$\Delta_{III}(\delta n) + 2\lambda\,\delta n = 0, \tag{38}$$

wenn es eine nicht überall, aber am Rande verschwindende zweimal stetig differenzierbare Lösung dieser Differentialgleichung gibt. Damit können wir sagen, *daß die Bedingung*

$$\lambda \geqq 1 \tag{39}$$

für alle Eigenwerte λ von (38) *für die relative Minimalitätseigenschaft von $\mathfrak{x}$ notwendig ist.* Anderenfalls gäbe es nämlich ein nicht identisch aber am Rande verschwindendes, zweimal stetig differenzierbares δn, das (38) mit einem $\lambda < 1$ genügt, so daß auf Grund von (37)

$$\delta^2 O = \iint 2(\lambda - 1)\,(\delta n)^2\,|d\omega| < 0$$

im Widerspruch zu (36) gelten würde. *Andererseits ist erstaunlicherweise die Bedingung*

$$\lambda > 1 \tag{40}$$

für alle Eigenwerte λ von (38) *für die relative Minimalitätseigenschaft von $\mathfrak{x}$ auch hinreichend.* Nach einem bekannten Resultat der mathematischen Physik[1] ist nämlich der kleinste Eigenwert von (38) oder der damit wegen $III = (-K)\,I = (-K)\,\mu((dp^1)^2 + (dp^2)^2) = \nu((dp^1)^2 + (dp^2)^2)$ (vgl. (34)!) nach § 93 (141) äquivalenten Gleichung

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{(\partial p^1)^2} + \frac{\partial^2(\delta n)}{(\partial p^2)^2} + \lambda\, 2\nu\,\delta n = 0 \qquad (\nu > 0 \text{ stetig differenzierbar})$$

genau das Minimum des sogenannten „Dirichletschen Integrals"

$$\iint \nabla_{III}(\delta n)\,|d\omega| = \iint \left(\left(\frac{\partial(\delta n)}{\partial p^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\delta n)}{\partial p^2}\right)^2\right) dp^1\, dp^2 \tag{41}$$

für alle der Nebenbedingung

$$\iint 2\,(\delta n)^2\,|d\omega| = \iint 2\nu\,(\delta n)^2\, dp^1\, dp^2 = 1 \tag{42}$$

[1] Vgl. Courant, R.: Math. Zeitschrift 7, 1–57 (1920), Satz 1.

genügenden und am Rande verschwindenden, stetig differenzierbaren Variationen δn. (40) zieht daher als Konsequenz

$$\iint \nabla_{III}(\delta n)\,|d\omega| > 1 = \iint 2\,(\delta n)^2\,|d\omega|$$

oder

$$\iint \left(\nabla_{III}(\delta n) - 2(\delta n)^2\right)|d\omega| > 0 \tag{43}$$

für alle derartigen δn nach sich und ist somit in der Tat wegen (35) für die relative Minimalität der Oberfläche von $\mathfrak{x}$ hinreichend[1]. Die Bedingungen (39) und (40) sind schon von H. A. Schwarz in seiner berühmten Festschrift 1885 angegeben worden[2].

§ 122. Ein Satz von Bernstein über Minimalflächen im Großen

Bis jetzt haben wir nur Minimalflächen „im Kleinen" betrachtet und insbesondere im § 117 gesehen, daß genau so viele derartige (nicht ebene) Minimalflächen existieren, wie es analytische Funktionen mit nichtverschwindender dritter Ableitung gibt. Untersucht man dagegen Minimalflächen „im Großen", so stellt man zunächst fest, *daß es keine geschlossenen Minimalflächen gibt.* Lagert man nämlich eine derartige Fläche in eine Kugel von kleinstmöglichem Radius ein, so muß diese nach § 43 die Fläche in einem Punkt mit positiver Gaußscher Krümmung berühren, was bei einer Minimalfläche wegen

$$K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = -\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 \leqq 0$$

unmöglich ist.

Dagegen ist die Frage nach *vollständigen* Minimalflächen durchaus sinnvoll, und hier zeigt es sich, daß z. B. nicht jedes in der Form $x_3 = f(x_1, x_2)$ darstellbare Minimalflächenstück Teil einer in derselben Weise mit $-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$ darstellbaren (und damit notwendig vollständigen[3]) Minimalfläche sein kann. S. Bernstein konnte nämlich schon 1915 den folgenden bemerkenswerten Satz zeigen:

---

[1] (43) ist nämlich für alle am Rande, aber nicht identisch verschwindenden, stetig differenzierbaren Variationen δn richtig, da eine derartige Variation nach Multiplikation mit einer geeigneten positiven Konstanten, welche an der Gültigkeit von (43) nichts ändert, (42) genügt!

[2] Siehe Schwarz, H. A.: Gesammelte Abhandlungen I, S. 223–269.

[3] Dies folgt aus der Tatsache, daß wegen $\sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} \leqq ds$ die senkrechte Projektion einer geodätischen Linie der Minimalfläche von endlicher Länge auf die (x_1, x_2)-Ebene ebenfalls endliche Länge besitzt und somit nach den Überlegungen in § 107 gegen eine Stelle $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ konvergieren muß, über die die geodätische Linie sich fortsetzen läßt, so daß letztere unendlich lang sein muß.

Jede auf die Ebene $x_3 = 0$ eineindeutig orthogonal pojizierbare, d.h. in der Form

$$x_3 = f(x_1, x_2) \quad (-\infty < x_1 < +\infty, -\infty < x_2 < +\infty) \tag{44}$$

mit zweimal stetig differenzierbarem f darstellbare Minimalfläche F ist eine Ebene.

Der im folgenden wiedergegebene Beweis dieses Satzes stammt von J. C. C. Nitsche[1]. Der Grundgedanke desselben besteht darin, eine mit der sphärischen Abbildung von F zusammenhängende analytische Funktion zu betrachten, die wegen der geometrischen Gestalt der Minimalfläche beschränkt ist, und den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie anzuwenden, nach welchem eine derartige, auf der ganzen komplexen Ebene definierte Funktion konstant ist. Zu diesem Zweck nehmen wir einmal an, F sei nicht die Ebene, und erinnern uns, daß in diesem Fall nach § 117 der negative Wert des Parameters t der Weierstraßschen Darstellung (14) von F (mit dem Vorzeichen $+$ in der Darstellung von x_1!) durch stereographische Projektion des Endpunktes des Flächennormaleneinheitsvektors $\mathfrak{n} = (n_1, n_2, n_3)$ vom Nordpol der Einheitskugel auf die Äquatorebene entsteht. Wegen der aus (44) folgenden Beziehung

$$n_3 = \frac{1}{+\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}} > 0 \tag{45}$$

gilt daher $|t| > 1$ oder $\left|\frac{1}{t}\right| < 1$. Nun stammte aber t aus der integrallosen Darstellung von § 23 der isotropen Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(z^1)$ bzw. $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(p)$ (p = natürlicher Parameter von Vessiot); dort hatten wir nämlich

$$t = -\frac{1}{2} a_3 = -\frac{\frac{dy_3}{dp}}{\frac{dy_1}{dp} - i\frac{dy_2}{dp}} = -\frac{\frac{dy_3}{dz^1}}{\frac{dy_1}{dz^1} - i\frac{dy_2}{dz^1}}$$

(vgl. Kap. 1 (173)!). Damit stellt nun die schon von Chaplygin eingeführte Funktion

$$\Phi = \frac{1}{t} = -\frac{\frac{dy_1}{dz^1} - i\frac{dy_2}{dz^1}}{\frac{dy_3}{dz^1}} = -\frac{\frac{dy_3}{dz^1}}{\frac{dy_1}{dz^1} + i\frac{dy_2}{dz^1}} \tag{46}$$

[1] Siehe Nitsche, J. C. C.: Archiv d. Math. 7, 417–419 (1956).

in der Tat eine vom Parameter $z^1 = p^1 + ip^2$ analytisch abhängende und dem absoluten Betrag nach durch 1 beschränkte Funktion dar. Gelingt es uns jetzt, die Existenz eines auf ganz F definierten, isothermen Parametersystems $\{p^1, p^2\}$ mit $-\infty < p^1 < +\infty$, $-\infty < p^2 < +\infty$ nachzuweisen, so ist unser Beweis fertig, da dann nach dem schon erwähnten Satz von Liouville Φ und damit (nach der geometrischen Deutung von t!) auch die sphärische Abbildung von F konstant sein muß, was mit der Annahme, F sei nicht eben, einen Widerspruch bildet.

Der fehlende Nachweis wird folgendermaßen geführt: Nach (6a, b) stellt

$$\begin{aligned} \hat{p}^1 &= x_1 \\ \hat{p}^2 &= \int \sum_{i=1}^{2} \frac{g_{i2}}{W}\, dx_i \end{aligned} \qquad \left(W = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\right) \tag{47}$$

(lokal) eine Transformation der Ausgangsparameter $\{x_1, x_2\}$ von F auf ein isothermes Parametersystem $\{\hat{p}^1, \hat{p}^2\}$ von F dar. Dasselbe gilt für die analog definierte Transformation

$$\begin{aligned} \hat{\hat{p}}^1 &= \int \sum_{i=1}^{2} \frac{g_{1i}}{W}\, dx_i \\ \hat{\hat{p}}^2 &= x^2 . \end{aligned} \tag{48}$$

Da beide Transformationen „unsymmetrisch" in bezug auf x_1 und x_2 sind, betrachtet Nitsche die durch formale Addition von (47) und (48) entstehende „symmetrische" Transformation:

$$\begin{aligned} p^1 &= x_1 + \int \sum_{i=1}^{2} \frac{g_{1i}}{W}\, dx_i \\ p^2 &= x_2 + \int \sum_{i=1}^{2} \frac{g_{2i}}{W}\, dx_i . \end{aligned} \tag{49}$$

Dadurch entsteht (zunächst lokal) wieder ein isothermes Parametersystem, da die hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingungen Kap. 6 (142) und (147) (mit $\nabla p^1 > 0$) *lineare* partielle Differentialgleichungen für p^1 und p^2 darstellen und somit die Summen von Lösungen derselben wiederum Lösungen sind. *Die Transformation* (49) *hat nun die bemerkenswerte Eigenschaft, den euklidischen Abstand eines beliebigen Punktepaares* $\{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})\}$ *der* (x_1, x_2)*-Ebene nicht zu verkleinern*! Es gilt nämlich für die Bildpunkte $(p^1_{(1)}, p^2_{(1)})$ und $(p^1_{(2)}, p^2_{(2)})$ dieses

Punktepaares:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(p^i_{(2)}-p^i_{(1)})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2}\geqq\sum_{i=1}^{2}(p^i_{(2)}-p^i_{(1)})(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})$$

$$=\sum_{i=1}^{2}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{(x_1^{(1)},x_2^{(1)})}^{(x_1^{(2)},x_2^{(2)})}\frac{g_{ij}}{W}\,dx_j\right)(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})$$

$$=\sum_{i=1}^{2}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_0^1\frac{g_{ij}}{W}\,d\tau\right)(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})(x_j^{(2)}-x_j^{(1)})$$

$$\geqq\sum_{i=1}^{2}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2,$$

weil die quadratische Form $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_0^1\frac{g_{ij}}{W}\,d\tau\right)z_iz_j$ genau so wie die quadratischen Formen $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}g_{ij}z_iz_j$ an den Zwischenpunkten der Strecke $x_i=x_i^{(1)}+\tau(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})$ $(i=1,2)$ mit $0\leqq\tau\leqq1$ positiv definit ist. Daher ist die Transformation (49) insbesondere eineindeutig und ihr Bildgebiet G in der (p^1,p^2)-Ebene in bezug auf die euklidische Metrik dieser Ebene vollständig[1]. Nach einer Bemerkung in § 97 kann deshalb G nicht echtes Teilgebiet der (p^1,p^2)-Ebene sein, d.h. G ist notwendig schon die ganze (p^1,p^2)-Ebene, womit der Nachweis der Existenz eines (globalen) isothermen Parametersystems auf F mit $-\infty<p^1<+\infty$, $-\infty<p^2<+\infty$ erbracht und der Satz von Bernstein vollständig bewiesen ist.

Übrigens konnte R. Osserman[2] diesen Satz in der Weise verallgemeinern, daß er zeigte: *Bei jeder nicht ebenen, vollständigen (zweimal stetig differenzierbaren) Minimalfläche besitzt das Komplement des sphärischen Bildes auf der Einheitskugel keine „inneren" Punkte, d.h. keine Punkte mit Umgebungen, die diesem Komplement ganz angehören.*

§ 123. Isoperimetrie der Kugel

Das einfachste Gegenstück zur isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises in der Ebene ist in der räumlichen Geometrie die entsprechende *Eigenschaft der Kugel, unter allen stetig differenzierbaren, einfach geschlossenen, orientierbaren Flächen vom Geschlecht* 0 *(vgl.* § 98!*) mit*

[1] Jede Cauchyfolge in G ist nämlich Bild einer Cauchyfolge der (x_1,x_2)-Ebene. Letztere konvergiert aber wegen der Vollständigkeit dieser Ebene, und damit konvergiert auch die erstere wegen der Stetigkeit der Transformation (49).

[2] Siehe Ossermann, R.: Commentarii Math. Helv. **35**, 65—76 (1961).

gegebener Oberfläche den größten Rauminhalt zu umgrenzen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, bei gegebenem Rauminhalt kleinste Oberfläche zu besitzen (ähnliche Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Vergleichsflächen bis zum gegebenen Rauminhalt bzw. bis zur gegebenen Oberfläche!).

Es sei zunächst darauf hingewiesen, wie man die Differentialgleichung des Problems aufstellt. Für die Variation der Oberfläche einer derartigen (als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzten) Fläche $\mathfrak{x}$ hatten wir in § 115 die Formel

$$\delta O = -2 \int H \cdot \delta n \cdot do$$

gefunden. Für die Variation des von ihr umgrenzten Rauminhalts $V = \frac{1}{3} \int\int (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)\, du^1\, du^2$ ergibt sich bei geeigneter Vorzeichenbestimmung (der Flächennormaleneinheitsvektor $\mathfrak{n}$ soll nach innen weisen!) mittels der Rechenmethode von § 102:

$$\delta V = \varepsilon \frac{d\bar{V}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -\frac{\varepsilon}{3} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{2} \int\int (\bar{\mathfrak{x}}, d\bar{\mathfrak{x}}, d\bar{\mathfrak{x}})_{(\wedge)} \right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{6} \int\int (\bar{n}\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} - \frac{\varepsilon}{3} \int\int (\mathfrak{x}, d(\bar{n}\mathfrak{n}), d\mathfrak{x})_{(\wedge)} \quad \text{(vgl. § 115!)}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{6} \int\int (\bar{n}\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} - \frac{\varepsilon}{3} \int\int d(\mathfrak{x}, \bar{n}\mathfrak{n}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} - \frac{\varepsilon}{3} \int\int (\bar{n}\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)}$$

$$= -\int\int (\varepsilon \bar{n}) \frac{1}{2} (\mathfrak{n}, d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})_{(\wedge)} = -\int\int \delta n \cdot do.$$

Soll nun aus $\delta O = 0$ folgen $\delta V = 0$, so muß gelten

$$H = \text{const},$$

was man genau so wie beim entsprechenden Satz in der Ebene begründet (§ 28!). Durch $H = \text{const}$ sind aber unter den (wenigstens dreimal stetig differenzierbaren) Flächen der von uns betrachteten Art nach H. Hopf (§ 100) die Kugeln gekennzeichnet. *Somit kommen als Lösungen der isoperimetrischen Aufgabe speziell unter den Eiflächen der Klasse C_3 nur die Kugeln in Betracht.*

Hierfür soll nun noch ein zweiter, weit einfacherer Beweis erbracht werden, den man dem phantasievollen Geometer J. Steiner (1796—1863), einem der Mitbegründer der projektiven Geometrie, verdankt. Übrigens war Jakob Steiner (trotz seines östlich klingenden Namens) ein urwüchsiger Schweizer Bauernsohn. Das wichtigste Hilfsmittel des Beweises ist Steiners „*Symmetrisierung*", ein Verfahren, das gestattet, aus jeder Eifläche eine neue, inhaltsgleiche herzuleiten, die eine Symmetrieebene und in der Regel kleinere Oberfläche besitzt.

§ 124. Wirkung von Steiners Symmetrisierung auf Rauminhalt und Oberfläche einer Eifläche

Das schon in § 103 erwähnte Verfahren von Steiner besteht darin, *den von der (als dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzten) Eifläche F umgrenzten konvexen Körper D (vgl. § 102!) sich als aus lauter zu einem Einheitsvektor* e *parallelen Strecken aufgebaut zu denken und diese Strecken in einer von einem reellen, etwa von* 0 *bis* 1/2 *variierenden reellen Parameter* τ *linear abhängenden Weise in Richtung von* e *so zu verschieben, daß alle ihre Mittelpunkte auf die durch den Koordinatenursprung gehende und zu* e *senkrechte Ebene E zu liegen kommen.* Auf diese Weise erhält man eine Flächenschar F_τ, welche analytisch durch Kap. 7 (59) dargestellt werden kann, wenn man von der Darstellung Kap. 7 (58) von $F = F_0$ ausgeht, wobei das Endprodukt $F^* = F_{1/2}$ dieser „Symmetrisierung" in der Tat wegen Kap. 7 (60) die zu e senkrechte Ebene E durch den Ursprung mit der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - (\mathfrak{y}\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} \quad (\mathfrak{y} = \text{beliebig})$$

als Symmetrieebene besitzt.

Es ist für das Folgende praktisch, an Stelle von Kap. 7 (59) für F_τ die einheitliche Parameterdarstellung

$$\text{(50)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\tau; u^1, u^2) = \mathfrak{x}(u^1, u^2) + \tau w(u^1, u^2)\mathfrak{e} \quad \left(0 \leqq \tau \leqq \tfrac{1}{2}\right)$$

(vgl. Kap. 7 (64)!) zu benutzen, wobei wir $\alpha = \alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)} = -\alpha^{(1)}$, d.h.

$$\text{(51)} \qquad w(u^1, u^2) = -2(\mathfrak{x}(u^1, u^2)\,\mathfrak{e}) - \alpha(u^1, u^2)$$

gesetzt haben, so daß w nach Fußnote 1 auf S. 262 wie α zweimal stetig differenzierbar ist. Daraus folgt durch eine schon in Kap. 7 durchgeführte Rechnung die Gültigkeit der dortigen Gl. (65), welche auf Grund der Tatsache, daß F_1 als Spiegelfläche von F an E [1] wie F Eifläche ist, die positive Definitheit der quadratischen Form $L_{ij}(\tau)v^iv^j$ mit

$$L_{ij}(\tau) = \frac{1}{W(\tau)}(\mathfrak{x}_{ij}(\tau), \mathfrak{x}_i(\tau), \mathfrak{x}_j(\tau))$$

zur Folge hat. *Daher sind alle bei der Symmetrisierung erhaltenen Flächen* F_τ *und insbesondere die symmetrische Fläche* F^* *Eiflächen.*

Daß F und F^* *konvexe Körper D und* D^* *von gleichem Rauminhalt begrenzen*, folgt aus dem sogenannten Prinzip von Cavalieri (1598—1648), weil auf Grund von (50) und (51) $\alpha^{(1)} \geqq 0$ die Länge derjenigen Strecken darstellt, in denen D und D^* durch eine zu E senkrechte Gerade geschnitten werden. Wählt man das räumliche kartesische Koordinatensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$ speziell so, daß darin E durch $x_3 = 0$ dargestellt wird,

[1] Siehe S. 261.

so drücken sich die Rauminhalte V und V^* von D und D^* durch die Formel

$$V = V^* = \int\int \alpha^{(1)}\, dx^1\, dx^2 \tag{52}$$

aus.

Zum Beweis dafür, daß die Steinersche Symmetrisierung die Oberfläche O von F im allgemeinen verringert, gehen wir von der Formel

$$O(\tau) = \frac{1}{2}\int\int \left(\mathfrak{n}(\tau),\, d\mathfrak{x}(\tau),\, d\mathfrak{x}(\tau)\right)_{(\wedge)} \tag{53}$$

für die Oberfläche $O(\tau)$ von F_τ (vgl. Kap. 7 (68)!) aus. Einmalige Differentiation von (53) nach τ liefert wie in Kap. 7

$$\frac{dO}{d\tau}(\tau) = \int\int \left(\mathfrak{n}(\tau),\, d\mathfrak{x},\, dw\, \mathfrak{e}\right)_{(\wedge)},$$

eine weitere Differentiation nach τ ergibt wegen $d\mathfrak{x}(\tau) = d\mathfrak{x} + \tau\, dw\, \mathfrak{e}$:

$$\frac{d^2O}{d\tau^2}(\tau) = \int\int \left(\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau),\, d\mathfrak{x}(\tau),\, dw\, \mathfrak{e}\right)_{(\wedge)}. \tag{54}$$

Berücksichtigen wir hierin noch die aus $\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau)\, \mathfrak{n}(\tau) = 0$ wie in Kap. 7 folgende Beziehung $\frac{d\mathfrak{n}}{d\tau}(\tau) = -g^{ik}(\tau)\, w_k(\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau))\, \mathfrak{x}_i(\tau)$ sowie $d\mathfrak{x}(\tau) = \mathfrak{x}_j(\tau)\, du^j$ und $dw\, \mathfrak{e} = w_m \mathfrak{e}\, du^m$, so erhalten wir

$$\frac{d^2O}{d\tau^2}(\tau) = \int\int (\mathfrak{e}\mathfrak{n}(\tau))^2\, (g^{km}(\tau)\, w_k\, w_m)\, do(\tau) \geqq 0 \tag{55}$$

(vgl. Fußnote 1 von S. 265). Dies bedeutet wegen

$$\sigma O(\tau_1) + (1-\sigma)\, O(\tau_2) - O(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\,\tau_2) = \sigma\big(O(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_1)$$
$$- O(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\,\tau_2)\big) + (1-\sigma)\,\big(O(\sigma\tau_2 + (1-\sigma)\,\tau_2) - O\,(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2)\big)$$
$$= \sigma\left((1-\sigma)\,(\tau_1 - \tau_2)\frac{dO}{d\tau}\left(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2\right) + \frac{1}{2}(1-\sigma)^2\,(\tau_1 - \tau_2)^2\,\frac{d^2O}{d\tau^2}\,(\xi)\right)$$
$$+ (1-\sigma)\left(\sigma(\tau_2 - \tau_1)\frac{dO}{d\tau}\left(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau_2 - \tau_1)^2\,\frac{d^2O}{d\tau^2}\,(\eta)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma)\,(\tau_2 - \tau_1)^2\left((1-\sigma)\,\frac{d^2O}{d\tau^2}\,(\xi) + \sigma\,\frac{d^2O}{d\tau^2}\,(\eta)\right) \geqq 0$$

(Taylorsche Formel mit den Zwischenwerten ξ bzw. η zwischen

τ_1 und $\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\,\tau_2$ bzw. $\sigma\tau_2 + (1-\sigma)\,\tau_2$ und τ_2!)

oder

$$O(\sigma\tau_1 + (1-\sigma)\tau_2) \leqq \sigma O(\tau_1) + (1-\sigma)\, O(\tau_2) \tag{56}$$
$$(0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq 1;\ 0 < \sigma < 1),$$

daß die Funktion $O(\tau)$ mit $0 \leqq \tau \leqq 1$ „konvex" ist (vgl. Fig. 33), so daß aus $O(0) = O(1)$ (F_1 = Spiegelfläche von F_0 an E!) speziell

$$O^* = O\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(O(0) + O(1)\right) = O(0) = 0 \tag{57}$$

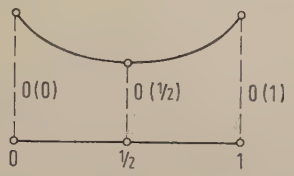


Fig. 33.

folgt. Hierbei gilt in (57) (und damit in (56) für $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$) genau dann Gleichheit, wenn $\frac{d^2O}{d\tau^2}(\xi) = \frac{d^2O}{d\tau^2}(\eta) = 0$, d.h. nach (55) $g^{km}(\xi)\, w_k w_m = g^{km}(\eta)\, w_k w_m = 0$ ist. Letzteres ist aber wegen der positiven Definitheit der quadratischen Formen $g^{km}(\tau)\, v_k v_m$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ gleichbedeutend mit $w_k = \frac{\partial w}{\partial u^k} = 0$ $(k = 1, 2)$ oder $w = \text{const}$, so daß im Falle der Gleichheit in (57) auf Grund des Ansatzes (50) F_1 aus $F = F_0$ nicht nur durch Spiegelung an E, sondern auch durch die Translation mit dem (zu E senkrechten) Verschiebungsvektor we entsteht. Die Hintereinanderausführung der Spiegelung und der umgekehrten Translation stellt dann aber wiederum eine Spiegelung an einer zu E parallelen Ebene dar, welche F in sich überführt, so daß F diese Ebene als Symmetrieebene besitzt.

Wir finden also zusammenfassend: *Steiners Symmetrisierung verwandelt jede dreimal stetig differenzierbare Eifläche in eine zweimal stetig differenzierbare Eifläche, die zur ersten inhaltsgleich und in der Regel kleiner an Oberfläche ist. Die Oberfläche bleibt nur in dem trivialen Fall ungeändert, daß schon die ursprüngliche Fläche senkrecht zur Symmetrisierungsrichtung eine Symmetrieebene hatte.*

Die einzige Eifläche, bei der dieser Ausnahmefall für jede Richtung zutrifft, ist nach den Ausführungen zu Beginn von § 103 die Kugel. Damit ist aber gezeigt: Jede nichtkugelige Eifläche (der Klasse C_3) kann man durch Symmetrisierung in eine inhaltsgleiche mit kleinerer Oberfläche verwandeln. *Falls daher die isoperimetrische Grundaufgabe der räumlichen Geometrie unter den dreimal stetig differenzierbaren Eiflächen überhaupt eine Lösung hat, so kann diese Lösung nur die Kugel sein.*

Das ist der Gedanke von J. Steiners Beweis aus dem Jahre 1836[1].

[1] Steiner, J.: Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. Werke II, S. 75–91.

§ 125. Konvergenzbeweis von Wilhelm Groß

Wenn man das Vorhandensein einer Lösung unseres isoperimetrischen Problems als selbstverständlich ansieht, so ist mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts die Frage völlig erledigt. Will man aber über diese Schwierigkeit nicht leichtsinnig hinweggleiten, so ist man durchaus noch nicht über den Berg.

O. Perron hat die Notwendigkeit von Existenzbeweisen an einem zwar trivialen, aber dafür um so schlagenderen Beispiel so auseinandergesetzt: Gibt es unter den Zahlen 1, 2, 3, ... eine größte, so ist es die Zahl Eins. Denn durch das Verfahren des Quadrierens wird jede andere dieser Zahlen vergrößert. Das ist genau dieselbe Schlußweise wie die vorgetragene, von Steiner herrührende. An Stelle der Zahlen 1, 2, 3, ... hatten wir dort die unendliche Menge der inhaltsgleichen (stückweise[1] dreimal stetig differenzierbaren) Eiflächen. Anstatt zu quadrieren, wurde dort symmetrisiert.

Der erste, der auf Grund der Methoden, die K. Weierstraß in die Variationsrechnung eingeführt hat, die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel einwandfrei begründet hat, war H. A. Schwarz im Jahre 1884[2]. Ein neues Beweisverfahren hat 1903 H. Minkowski ersonnen. 1916 hat der erstgenannte Verfasser auf Grund von Steiners Symmetrisierung einen strengen Beweis geführt[3]. In neuer und besonders schöner Weise hat dann 1917 Wilhelm Groß diesen Gedanken wieder aufgenommen[4]. Das Verfahren von Groß, der 1918 im Alter von 32 Jahren in Wien ein Opfer der Grippe geworden ist, soll hier unter der Beschränkung auf Eiflächen wiedergegeben werden.

Es handelt sich darum folgendes zu zeigen: *Man kann jede (stückweise dreimal stetig differenzierbare) nichtkugelige Eifläche F durch genügend häufiges Symmetrisieren in eine neue inhaltsgleiche Eifläche F_n verwandeln, deren Oberfäche sich um beliebig wenig von der Oberfläche O_S der inhaltsgleichen Klugel S unterscheidet.* Dann gilt nach (57) für die Oberflächen:

$$O \geqq O_n$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} O_n = O_S, \tag{58}$$

---

[1] Vgl. Fußnote 1 auf S. 262 und S. 349. (57) bleibt auch unter dieser allgemeineren Voraussetzung samt Gleichheitsdiskussion gültig!

[2] Schwarz, H. A.: Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens. Gesammelte Abhandlungen II, S. 327—340.

[3] Blaschke, W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916.

[4] Gross, W.: Die Minimaleigenschaft der Kugel. Monatsh. Math. Phys. **28**, 77—97 (1917).

also

$$O \geqq O_S,$$

womit die Existenz einer Lösung der isoperimetrischen Grundaufgabe unter den stückweise dreimal stetig differenzierbaren Eiflächen gezeigt ist.

Zum Nachweis von (58) nehmen wir innerhalb des von F umgrenzten konvexen Körpers D einen Punkt $\mathfrak{o}$ an und schlagen um $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt zwei Kugeln, erstens eine Kugel S_0, die in D liegt, zweitens die zu F inhaltsgleiche Kugel S. Der Rauminhalt des Teils der von S berandeten Vollkugel B, der außerhalb F liegt, sei mit φ bezeichnet. Da F und S inhaltsgleich sind, ragt dann auch D über S um einen Teil vom Inhalt φ hinaus ($\varphi > 0$). Wir wollen zeigen: *Es läßt sich eine stetige und monoton wachsende Funktion Φ von φ so angeben, daß für $\varphi > 0$ auch $\Phi(\varphi) > 0$ ist und daß zu jeder Eifläche F, die die Kugel S_0 enthält und um φ über die zu F inhaltsgleiche Kugel S hinausragt, zwei Kugeln des Inhalts $\Phi(\varphi)$ ermittelt werden können, wovon die eine S' in D außerhalb S, die andere S'' in B außerhalb F gelegen ist* (Fig. 34).

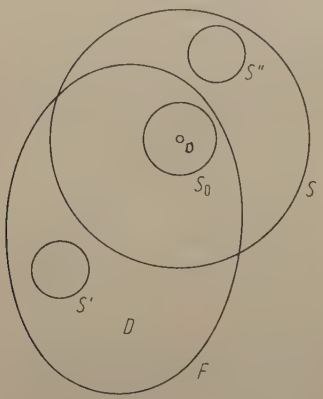


Fig. 34.

Um dies einzusehen, schlagen wir um $\mathfrak{o}$ die Kugel, die über S um die Schale vom Inhalt φ hinausragt. Diese neue Kugel liegt sicher nicht ganz außerhalb des zu S inhaltsgleichen F. Also gibt es auf der neuen Kugel einen Punkt $\mathfrak{p}$ von F. Wir konstruieren die Kugel (Fig. 35), die S von außen und den Kegel, der von $\mathfrak{p}$ als Spitze an S_0 gelegt ist, von innen berührt. Der Inhalt der so gefundenen Kugel, die sicher in D liegt, sei $\Phi_1(\varphi)$. Andererseits ragt die Kugel um $\mathfrak{o}$ innerhalb S, die mit S zusammen eine Schale des Inhalts φ begrenzt, sicher über F hinaus. Wir können daher in dieser Schale eine Kugel ermitteln, die die beiden die

Schale begrenzenden Kugeln berührt und außerhalb F liegt. Dabei können wir ihren Mittelpunkt etwa auf dem Radius von S wählen, der den $\mathfrak{o}$ am nächsten liegenden Punkt $\mathfrak{q}$ von F enthält, da F in $\mathfrak{q}$ eine zu

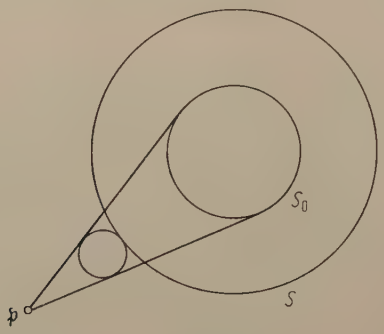


Fig. 35.

dem Radius senkrechte Stützebene (vgl. § 102!) besitzt (Fig. 36). Der Inhalt der betrachteten Kugel sei $\Phi_2(\varphi)$. Die so erklärten Funktionen Φ_1, Φ_2 könnte man elementar berechnen. Sie sind sicher stetig, monoton

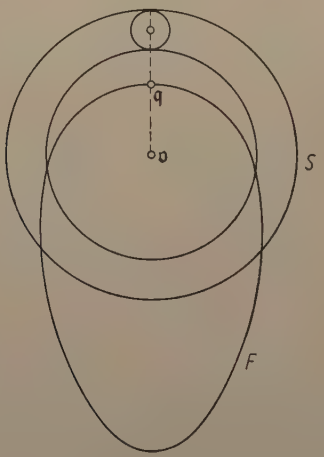


Fig. 36.

wachsend und besitzen für $\varphi > 0$ positive Werte. Das „Minimum" Φ von ihnen mit

$$\Phi(\varphi) = \text{Min}\,(\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)) = \frac{1}{2}\{\Phi_1(\varphi) + \Phi_2(\varphi)\} - \frac{1}{2}|\Phi_1(\varphi) - \Phi_2(\varphi)|$$

hat jetzt die behauptete Eigenschaft, da aus $\varphi_1 < \varphi_2$ sicher $\Phi(\varphi_1) \leqq \Phi_i(\varphi_1) < \Phi_i(\varphi_2)$ $(i = 1, 2)$ und damit

$$\Phi(\varphi_1) < \operatorname{Min}\left(\Phi_1(\varphi_2), \Phi_2(\varphi_2)\right) = \Phi(\varphi_2) \tag{59}$$

folgt.

Wir wollen nun F so zu einer Eifläche F_1 symmetrisieren, daß die Symmetrisierungsrichtung in die Verbindungsgerade g der Mittelpunkte der Kugeln S' und S'' fällt und die Symmetrieebene durch $\mathfrak{o}$ hindurchgeht. Dann enthält F_1 wieder die alte Kugel S_0. Der Rauminhalt φ_1, um den F_1 über die inhaltsgleiche Kugel S hinausragt, genügt der Bedingung

$$0 < \varphi_1 \leqq \varphi - \Phi(\varphi), \tag{60}$$

welche auf Grund der Definition von $\Phi(\varphi)$ nach dem in § 124 erwähnten Prinzip von Cavalieri aus der Tatsache folgt, daß die Gesamtlänge des außerhalb S liegenden Teils jeder zu g parallelen und S' schneidenden Sehne s von F sich bei der angegebenen Symmetrisierung um mindestens die Länge des von S' aus s ausgeschnittenen Intervalls verkürzt.

Das Verfahren können wir jetzt neuerdings auf F_1 anwenden unter Wiederverwendung der alten Kugeln S_0 und S. Für den Rauminhalt φ_2, um den die neue Eifläche F_2 über S hinwegragt, gilt dann

$$0 < \varphi_2 \leqq \varphi_1 - \Phi(\varphi_1). \tag{61}$$

So fahren wir fort. Da die Funktion Φ monoton wachsend ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_1 &\geqq \Phi(\varphi), \\ \varphi_1 - \varphi_2 &\geqq \Phi(\varphi_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1} - \varphi_n &\geqq \Phi(\varphi_{n-1}) \end{aligned}$$

durch Addition

$$\varphi - \varphi_n \geqq n\Phi(\varphi_{n-1}) > n\,\Phi\,(\varphi_n) \tag{62}$$

und daraus

$$\Phi(\varphi_n) < \frac{\varphi}{n}. \tag{63}$$

Will man also durch n-malige Symmetrisierung eine Eifläche F_n erreichen, die über die inhaltsgleiche Kugel S um höchstens einen Teil vom Inhalt $\varepsilon > 0$ hervorragt, so genügen wegen (59)

$$n_0 \geqq \frac{\varphi}{\Phi(\varepsilon)} \tag{64}$$

Wiederholungen des Symmetrisierungsverfahrens.

Damit haben wir einen genauen Einblick in die Konvergenz unseres Verfahrens gewonnen und können wirklich eine zu F inhaltsgleiche Ei-

fläche F_n auffinden, deren Oberfläche sich um beliebig wenig von derjenigen der inhaltsgleichen Kugel S unterscheidet. Das kann man so feststellen (Fig. 37): Wir zeichnen um $\mathfrak{o}$ eine Kugel $S_\varepsilon^{(1)}$, durch deren Tangentialebenen von B ein Raumstück vom Inhalt ε abgeschnitten wird. Dann liegt $S_\varepsilon^{(1)}$ sicher innerhalb $F_n (n \geqq n_0)$, da andernfalls die Stützebene

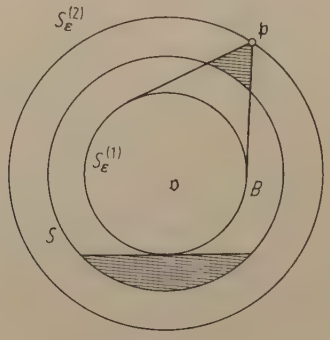


Fig. 37.

an F_n in dem $\mathfrak{o}$ nächst gelegenen Punkt $\mathfrak{q}$ von F_n von B ein Raumstück mit einem Inhalt größer als ε abschneidet. Suchen wir ferner einen Punkt $\mathfrak{p}$ außerhalb S auf, so daß der Körper, der von dem Kegel von $\mathfrak{p}$ an $S_\varepsilon^{(1)}$ und von der Kugel S begrenzt wird, den Inhalt ε hat, so liegt die Kugel $S_\varepsilon^{(2)}$ um $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{p}$ wegen der Konvexität des von F_n umgrenzten konvexen Körpers D_n und wegen $S_\varepsilon^{(1)} \subset D_n$ sicher außerhalb F_n. Aus der Lagenbeziehung

$$B_\varepsilon^{(1)} \subseteqq D_n \subseteqq B_\varepsilon^{(2)},$$
$$B_\varepsilon^{(1)} \subseteqq B \subseteqq B_\varepsilon^{(2)}$$

($B_\varepsilon^{(1)}$ bzw. $B_\varepsilon^{(2)}$ sind die von $S_\varepsilon^{(1)}$ bzw. $S_\varepsilon^{(2)}$ berandeten Vollkugeln, D_n ist der von F_n berandete konvexe Körper!) und den daraus folgenden Beziehungen zwischen den Oberflächen [1]

$$O_\varepsilon^{(1)} \leqq O_n \leqq O_\varepsilon^{(2)},$$
$$O_\varepsilon^{(1)} \leqq O_S \leqq O_\varepsilon^{(2)}$$

---

[1] Daß bei Eiflächen F_1, F_2 aus $D_1 \subseteq D_2$ für die Oberflächen $O_1 \leqq O_2$ folgt, kann man z.B. aus der Formel $O = \frac{1}{\pi} \int\limits_{S_1} O_\mathfrak{e}\, d\omega$ von Cauchy einsehen, wobei S_1 die Einheitssphäre, $d\omega$ ihr Oberflächenelement und $O_\mathfrak{e}$ den Flächeninhalt der Orthogonalprojektion $p_\mathfrak{e}(F)$ von F auf eine zum Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ senkrechte Ebene bedeuten. Es gilt nämlich $2\pi O = \int\limits_F \left(\int\limits_{S_1} |\mathfrak{en}| d\omega \right) do = \int\limits_{S_1} \left(\int\limits_F |\mathfrak{en}|\, (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{n})\, du^1\, du^2 \right) d\omega$
$= \int\limits_{S_1} \left(\int\limits_F |(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{e})|\, du^1\, du^2 \right) d\omega = \int\limits_{S_1} \left(\int\limits_F |(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{e})|\, du^1\, du^2 \right) d\omega = \int\limits_{S_1} 2O_\mathfrak{e}\, d\omega,$
weil $p_\mathfrak{e}(F)$ etwa die Vektordarstellung $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{xe})\,\mathfrak{e}$ besitzt.

folgt nun

$$|O_S - O_n| \leqq O_\varepsilon^{(2)} - O_\varepsilon^{(1)} \text{ für alle } n_0 \geqq n. \tag{65}$$

Da aber für hinreichend kleines ε die berechenbare Differenz rechts beliebig herabgedrückt werden kann, ist darin das gewünschte Ergebnis (58) enthalten. Unser Konvergenzbeweis genügt allen Forderungen der Exaktheitsfanatiker und „Finitisten". Denn man kann, wenn der Fehler $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben ist, die Anzahl n_0 der zu dieser Annäherung notwendigen Symmetrisierungen nach (64) durch Berechnung einiger elementarer Funktionen ermitteln.

Bemerkt man schließlich, daß zwischen Rauminhalt V_S und Oberfläche O_S bei der Kugel S die Gleichung gilt

$$O_S^3 - 36\pi V_S^2 = 0,$$

dann kann man das gefundene Ergebnis $O \geqq O_S$ wegen $V = V_S$ so fassen:

Zwischen Rauminhalt V und Oberfläche O einer (stückweise dreimal stetig differenzierbaren) Eifläche besteht die Beziehung

$$\boxed{O^3 - 36\pi V^2 \geqq 0}, \tag{66}$$

und zwar gilt (nach § 124*) nur für die Kugeln das Gleichheitszeichen* (vgl. Kap. 2 (42a) und (42b)!).

Die einschränkenden Regularitätsforderungen und die Beschränkung auf Eiflächen sind übrigens für die Gültigkeit der „isoperimetrischen Ungleichung" (66) unwesentlich[1].

§ 126. Übungsaufgaben und Bemerkungen

a) Übungsaufgaben

1. (Zu § 115). Man beweise den folgenden Satz von J. Steiner: Ein Stück einer nicht ebenen, zweimal stetig differenzierbaren Minimalfläche hat stets größeren Flächeninhalt als die zu ihm benachbarten Parallelflächen (vgl. Übungsaufg. 7 von § 66!).

2. (Zu § 115). Man beweise: Die einzigen reellen, zweimal stetig differenzierbaren, flachpunktfreien Minimalflächen, die gleichzeitig Rotationsflächen sind, sind die „Katenoide"

$$\pm\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = a \cosh \frac{x_3}{a} \quad (a = \text{const} > 0),$$

die durch Rotation von Kettenlinien um eine zur Scheiteltangente der Kettenlinie parallele Achse entstehen.

3. (Zu § 115). Man beweise: Die einzigen dreimal stetig differenzierbaren, flachpunktfreien, reellen Minimalflächen, die gleichzeitig Regelflächen sind, sind die

[1] Siehe dazu etwa Hadwiger, H.: Portugaliae Math. **8**, 89–93 (1949).

„Wendelflächen", die durch Schraubung einer Geraden um eine sie rechtwinklig schneidende Achse entstehen.

4. (Zu § 115). Man zeige: Die einzigen zweimal stetig differenzierbaren, nicht ebenen Minimalflächen, welche Translationsflächen mit der Darstellung $x_3 = f(x_1) + g(x_2)$ sind, sind die sogenannten „Scherkschen Minimalflächen"

$$\log \frac{\cos \frac{x_2}{a}}{\cos \frac{x_1}{a}} = \frac{x_3}{a} \qquad (a = \text{const}).$$

5. (Zu § 116). Die komplexe Fortsetzung einer reellen Minimalfläche F sei als Schiebfläche isotroper Kurven gegeben:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{y}(z^1) + \mathfrak{z}(z^2)) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0, \quad \mathfrak{y}'\mathfrak{z}' \neq 0.$$

Man beweise: Durch

$$\mathfrak{x} = e^{i\alpha}\mathfrak{y}(z^1) + e^{-i\alpha}\mathfrak{z}(z^2)$$

werden wieder komplexe Fortsetzungen von reellen Minimalflächen F_α, den sogenannten „zu F assoziierten Minimalflächen" dargestellt (α = reelle Konstante). Alle diese Minimalflächen sind zu F isometrisch, die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten zweier Flächen der Schar $\{F_\alpha\}$ sind parallel und entsprechende Tangentenvektoren auf den Flächen F_{α_1} und F_{α_2} schließen den konstanten Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$ ein.

6. (Zu § 116). Man zeige, daß das Katenoid $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = a \cosh \frac{x_3}{a}$ und die Wendelfläche $\frac{x_2}{x_1} = -\operatorname{cotg} \frac{x_3}{a}$ „adjungierte" Minimalflächen, d.h. assoziierte Minimalflächen mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sind (vgl. Übungsaufg. 5).

7. (Zu § 116). Man zeige: Jede zu der flachpunktfreien Minimalfläche F: $\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{y}(z^1) + \mathfrak{z}(z^2))$ isometrische flachpunktfreie Minimalfläche ist zu einer zu F assoziierten Minimalfläche F_α (vgl. Übungsaufg. 5!) kongruent.

[Anleitung: Man benutze die Tatsache, daß die sphärischen Bilder der beiden Minimalflächen konform und flächentreu aufeinander abgebildet werden, d.h. isometrisch sind!]

8. (Zu § 116). Man beweise unter Benutzung des Ergebnisses der vorstehenden Übungsaufgabe den folgenden Satz von Bonnet: Sind zwei flachpunktfreie, dreimal stetig differenzierbare Flächen F und $\bar{F}$ (durch gleiche Parameter) isometrisch so aufeinander abgebildet, daß die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel sind, dann sind F und $\bar{F}$ entweder kongruente Flächen oder assoziierte Minimalflächen.

9. (Zu § 118). Gegeben sind die beiden „konfokalen" Parabeln

$$P_1\colon \mathfrak{x} = (4v, 0, -2v^2 + 1) \text{ und } P_2\colon \mathfrak{x} = (0, -4u, 2u^2 - 1)$$

(dabei heißen zwei Parabeln konfokal, wenn sie in zueinander senkrechten Ebenen liegen und jeweils der Scheitel der einen Parabel Brennpunkt der anderen Parabel ist). Es soll gezeigt werden: Läßt man die Punkte p_1 bzw. p_2 beliebig auf P_1 bzw. P_2 wandern, so umhüllen die ∞^2 Symmetrieebenen der Punktepaare (p_1, p_2) eine algebraische Minimalfläche F, die sogenannte „Enneppersche Minimalfläche", mit u, v als Parametern der ebenen Krümmungslinien von F.

10. (Zu § 120). Man beweise folgenden Satz zum Problem von Plateau: Durch eine einfach geschlossene (rektifixierbare) Kurve gibt es keine zwei verschiedenen, stetig differenzierbaren Flächen F_1 bzw. F_2 der Darstellung $x_3 = f_1(x_1, x_2)$ bzw. $x_3 = f_2(x_1, x_2)$ mit (gleicher) minimaler Oberfläche.

[Anleitung: Es ist zu zeigen, daß die Fläche F_3 mit der Darstellung

$$x_3 = \frac{1}{2}(f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2))$$

eine Oberfläche O_3 besitzt, für die wegen $F_1 \neq F_2$

$$O_3 < \frac{1}{2}(O_1 + O_2)$$

gilt, wenn O_1 und O_2 die Oberflächen von F_1 und F_2 sind!]

b) Bemerkungen

1. (Zu § 115). E. Glässner untersuchte die zum Variationsproblem $\delta\left(\iint \sqrt[+]{||L_{ij}||}\, du^1 du^2\right) = 0$ gehörenden „Minimalflächen der zweiten Fundamentalform" (Diss. U Stuttgart 1972).

2. (Zu § 120). S. Hildebrandt löste (in mehreren Arbeiten der letzten Jahre) das Plateausche Problem für Flächen mit als Funktion der Punkte des euklidischen Raums vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

3. (Zu § 122). Von J. C. C. Nitsche, R. Ossermann und S. S. Chern wurde im wesentlichen die (auf der Funktionentheorie fußende) Theorie der „Minimalflächen im Großen" entwickelt (siehe dazu den Bericht von K. Leichtweiß in „Überblicke Mathematik **2** (1969) 7—50).

4. (Zu § 125). W. Süss (Sitzungsb. Preuß. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. **19** (1931) 342—344) bewies die isoperimetrische Ungleichung für konvexe Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n mittels der Ungleichung von Brunn-Minkowski (Beweis dazu von H. Kneser und W. Süss in Mat. Tidskr. B **1** (1932) 19—25). Diese isoperimetrische Ungleichung wurde später unter Zugrundelegung des Minkowskischen Oberflächenbegriffs von A. Dinghas und E. Schmidt (Abh. Preuß. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. **7** (1944)) und H. Hadwiger (Port. Math. **8** (1949) 89—93) allgemeiner für beliebige abgeschlossene und beschränkte Punktmengen des R_n nachgewiesen. G. Bol führte schließlich interessante Isoperimetriebeweise mit Hilfe von „Parallelkörpern nach Innen" (Abh. Math. Sem. Hamb. **15** (1943) 27—36).

Namen- und Sachverzeichnis

Ziffern ohne Paragraph-Zeichen geben die Seiten an.

Abbildung 119, 160
—, affine 7
—, analytische 238
—, differenzierbare 238
—, isometrische 192
—, konforme 119, 232
—, längentreue 192, § 84
—, sphärische 121
—, topologische 119, 237
—, winkeltreue §§ 49, 94
Abbildungsgruppe 7
Ableitung, kovariante §§ 61, 63
—, Produktregel 149f.
Ableitungsgleichungen 27, 81, 158, §§ 55, 57, 64, 70, 73
Abstandsfunktion 294
Abstandskreis 294
abwickelbare Fläche 194
Abwickelkrümmung 92, 196
Abwicklung 91
—, geodätische 302
adjungierte Minimalflächen 358
Ähnlichkeit 119
Ähnlichkeitssätze § 103
Aeppli, A. 267, 268
Äquatorebene 240
äußeres Differential § 67
äußeres Produkt 5
affine Abbildung 7
affine Geometrie 7
affin isotherme Parameter 160
Alexandrow, A. D. 250, 255, 273, 280, 287, 312
alternierendes Produkt von Differentialformen 172, § 67
Anfangswertaufgabe 341
Antikommutativgesetz 164
assoziierte Minimalflächen 335, 358
Asymptoten 107, 125
Asymptotenlinien 132, 160, 177, §§ 52, 53
asymptotischer Streifen 86
Aumann, G. 56f.
Außenwinkel 216, 242

Baltzer, R. 111, 137
Barner, M. 37, 58
begleitendes Dreibein 30, § 33
Beltrami, E. 133, 217, 221, 225, 228, 330
Bereis, R. 58
Bernstein, S. 344
Bertrand, J. 40, 203
Bertrand-Kurven § 15
Beschleunigungsvektor 19
bewegliches Dreibein § 70
biegungsinvariant 92
bilinear 147
Bilinski, S. 57
Binormale 21
Binormalenbild 22
Binormalenvektor 21
Björling, E. G. 340
Blaschke, W. 37, 58, 78, 233, 283, 285, 311, 339, 352
Bliss, G. A. 307
Böschungslinie 50, 56, 65, 159, § 18
— einer Drehquadrik 58
— einer Kugel § 19
— eines Drehparaboloids § 20
Böschungstorse 159
Bogenelement 101
Bogenlänge 29, § 5
—, erste Variation 58, 91, § 25
Bogenlängenparameter 17
—, reduzierter 300
Bohr, H. 122
Bol, G. 57, 250, 359

Bolyai, J. 213
Bonnet, O. 215, 233, 319, 335, 358
Bonnetsche Integralformel 233
Bouligand, G. 57
Brechungsgesetz 125
Breitenkreis 102
Brennfläche 190

Caratheodory, C. 76
Cartan, E. 161
Cartansche Differentialformen 5. Kap.
Cauchy, A. 274, 333
Cavalieri, B. 349
Chaplygin 345
Chasles, M. 33
Chern, S. S. 231, 255f., 271, 280, 359
Christoffel, E. B. 134, 268
Christoffelsymbole 134, 234
Codazzi, D. 137, 154, 233
Cohn-Vossen, S. 274, 328
Courant, R. 343
curvatura integra 214

Darboux, G. 33, 97, 204, 218, 308, 328
de Rham 294
Determinante von Vektoren § 2
Differential 163
Differentialformen 5. Kap.
— Addition 164
— äußeres Differential § 67
— alternierendes Produkt § 67
— Koeffizientenvektor 167
— lineare Abhängigkeit 167
— Multiplikationsgesetz 166
—, Pfaffsche 163
—, quadratische 168
— Rechengesetze 164, § 68
— skalare Multiplikation 164
— Transformation § 68
— und Tensoren § 69
Differentialgeometrie
— im Großen, globale — 24, 36, 292, 7. Kap.
— im Kleinen, lokale — 24, 130
differentialgeometrische Fläche § 97
differentialgeometrische Invariante 23, 82, 131
Differentialgleichungen
—, lineare § 17
—, partielle § 60
Differentiatoren von Beltrami 229, §§ 88, 89, 90
differenzengeometrisches Modell 236
differenzierbare Mannigfaltigkeit 238
Diguet 203
Dinghas, A. 78, 359
Dirichletsches Integral 343
Diskriminantentensor 152
Divergenz 225
Doppelspeichenkurve 58
Dorntorus 158
Douglas, J. 341
Drehfläche 190
Drehkegel 159
Drehparaboloid § 20
Drehriß 283
— -fläche 284
Drehvektor 33, 283
Drehzylinder 191, 303
Dreibein
—, begleitendes 30
—, bewegliches § 70
—, orthonormiertes 25
—, positiv orientiertes 25
Dreiecksvergleichssatz § 112
Dreieck aus Kürzesten 312
dreifaches Orthogonalsystem 117
Dreiindicessymbol 134
Dubins, L. 78
Dupin, Ch. 106, 117, 125, 156
Dupinsche Indikatrix 106
Dupinsche Zyklide 189
Durchmesser 171, 319
Durchschnittskrümmung 78

Ebene 116, 132, 191, 207, 240
—, elliptische 246
—, hyperbolische 213
—, projektive 246
ebene Kurve § 12
ebener Streifen 91
Eckbedingung 308
Efimow, N. W. 258, 280
Eifläche 257ff., 281ff., 311f., 327f., 356f., §§ 104, 105, 124
— Durchmesser § 113
— Stützebene 256
— Stützfunktion 257
eigentlich winkeltreue Abbildung 231
Eigenwert 343
Eilinie 36
einfach zusammenhängend 214
Einfallsebene 125
Einfallswinkel 125
Einheitsvektor 18

Einstein, A. 100, 155
Eisenhart, L. P. 33
Ellipsoid 106, 118, 250
elliptische Ebene 246
elliptisch gekrümmt 106, 110, 126
Engel, F. 221
Enneper, A. 133, 358
Ennepersche Minimalfläche 358
Entfernungskreis 204, 207, 212
Epizykloide 43, 48
Erard, J. 161
Erdmann, G. 308
Erlanger Programm 7
Erzeugende 85, 127, 193
euklidische Geometrie 7
Euler, L. 99, 107, 155, 194, 197, 232f., 242
Eulersche Charakteristik 242, 246
Evolute 218, § 21
— zweiter Art 56
Evolvente 218, § 21
—, Faden- 49
—, Kreis- 48
Extremale 63, § 27
Extreme bei Flächen 8. Kap.
Extreme bei Kurven 2. Kap.

Fadenevolvente 49
Fary, N. 78
Fenchel, W. 77ff., 326
Firey, W. J. 273
Flachpunkt 58, 107, 132, 160
Fläche
—, abwickelbare 194
—, analytische 239
—, Brenn- 190
—, differentialgeometrische § 97
—, Dreh- 190, 235
—, Ei- 257ff., 281ff., 311f., 327f., 356f., §§ 104, 105, 124
— festen Krümmungsmaßes §§ 82, 83
—, geradlinige 85
—, geschlossene 239, 256, 326ff., §§ 98, 100, 101, 103, 106, 107
—, Gesims- § 74
—, Hüll- 188
—, Kanal- § 74
—, konvexe 257
—, Liouvillesche 235
—, Minimal- 51, 158, 186, 341, 357, §§ 116—120, 122
—, orientierbare 239, 249, 256
—, orthogonale 124
Fläche, Parallel- 157
—, Regel- 85, 158f., 357
—, Röhren- 158, 189
—, Rotations- 190, 235
—, Schieb- § 116
—, starre 255, 283
—, taillierte 286
—, Tangenten- 18, 58, 97, 128
—, Translations- 130
—, vollständige 239, § 107
—, W- 191, 328
—, Wendel- 358
—, Wiedersehens- § 111
—, windschiefe 129
—, Zentra- 190
—, Zylinder- 128, 187, 190
Flächenelement 20, 122, 176
—, gerichtetes 80
—, Normalenvektor 80
Flächeninhalt 190
Flächenkurve 100
Flächennormale 100
Flächenstreifen 80, 103
Flächentheorie 4. Kap.
— Fundamentalsatz 175, § 59
Flohr, F. 37
Formel von Gauß und Bonnet 215, § 86
Formeln von Frenet 57, §§ 9, 11
Franz, W. 241
Frenet, F. 29
Frenetsche Dreibeine 57
Frenetsche Formeln 57, §§ 9, 11
Fundamentalsatz der Flächentheorie 175, § 59
Fundamentaltensor 101, 152
Fußpunktkurve 55

Gauß, C. F. 99f., 111, 119, 121, 134, 154f., 192, 194, 213f., 217, 232, § 95
Gaußsche Krümmung 109, 157, 159f., 176, 194, 204, 233f., §§ 80, 101
Gaußscher Integralsatz 226
Gebietsintegral 162
Gefälle einer Funktion bzw. einer Kurvenschar 222
geodätische
— Abweichung 302
— Linie 223f., 239, 293, 299, §§ 78, 87
— Krümmung 83, 92, 183, 196, 233, §§ 77, 85, 92
— Parallelkoordinaten 198
— Parallelkurven 234

geodätische Polarkoordinaten § 79
— Windung 85, 115, 118, 133, 183
geodätischer
— Kreis 199, 203, § 81
— Krümmungskreis 204
— Krümmungsradius 195
— Radius 219, 322
— Streifen 88, § 35
geodätisches Dreieck 217
geodätisch parallel 198
geographische Länge 102
Geometrie
—, affine 7
—, euklidische 7
—, hyperbolische 213
—, innere 236, 6. Kap.
—, nichteuklidische 213, 217, 233
geradlinige Fläche 85
gerichtetes Flächenelement 80
Gericke, A. 58
Gesamtkrümmung 76, 78, 214, 328, § 98
Gesamtwindung 97, 158
Geschlecht 244
geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit 238
geschlossene Fläche 239, 256, 326ff., §§ 98, 100, 101, 103, 106, 107
Geschwindigkeitsfeld 283
Geschwindigkeitsvektor 18
Gesimsfläche § 74
Glässner, E. 359
globale Differentialgeometrie 24, 36, 292, 7. Kap.
Gradient 234
Gradientenfeld 222
Grauert, H. 191
Green, L. W. 311
Greensche Formeln 226f.
Gross, W. 352
Grotemeyer, K. P. 258, 280, 328
Grove, V. G. 281
Grüss, G. 58
Grundformen der Flächentheorie 123, 159, 176, 198f., 234, 286, §§ 41, 42
Grundvektor 9
Gruppe 7
—, affine 7

Hadamard, J. 256
Hadwiger, H. 67, 357, 359
Halbebene von Poincaré 213, § 83
Halbkugel 240
Hamburger, H. 250
Hamel, G. 61
Hartmann, P. 160f., 231
Haupt, O. 56f.
Hauptkrümmung 107, 160, § 44
Hauptkrümmungsmittelpunkt 114
Hauptnormale 21, 82
Hauptnormalenvektor 21
Hauptrichtung 112
Hazzidakis, J. 291
Heinz, E. 287
Henkel 243
heraufziehen von Indices 149
Herglotz, G. 37, 274, 326
herunterziehen von Indices 149
Hilbert, D. 33, 253, 287
Hildebrandt, S. 359
Holonomiegruppe 236
homothetisch 235, 267
Hopf, H. 160, 215, 239, 251, 259, 294
hopfenwendig 33
Hsiung 271
Huck, H. 281
Hüllfläche einer Kugelschar 188
Hüllkurven geodätischer Linien § 87
Hüllkurvensatz 218
Hurwitz, A. 72, 78, 268
Huyghens, Ch. 125
hyperbolische Geometrie 213
hyperbolisch gekrümmt 106, 110, 126
Hyperboloid 118

Identität von Lagrange 6
Index 246, 248f.
Indexmethode 253, 281
Indexsummenformel Poincarés § 99
Indikatrix von Dupin 106
infinitesimale Verbiegung 282
Innenwinkel 242
innere Eigenschaft einer Fläche 192, 236
innere Flächenmetrik 239, 274
innere Geometrie 6. Kap.
inneres Produkt § 1
Integralformelmethode 255, 258
Integralformeln 215f., 276, §§ 91, 102
Integralinvariante 22
Integrierbarkeitsbedingungen 140, §§ 58, 64, 70, 73
invariante Ableitung § 72
Invarianten 4, § 3
—, differentialgeometrische 23
— einer endlichen Punktmenge §§ 3, 4

Invarianten einer Fläche 131, 135
— einer Kurve 28
— eines Streifens 82, 183ff.
—, Integral- 23
—, topologische 242
—, unabhängige § 4
— vollständiges System 8
invariante quadratische Differentialform 102
isolierte Singularität 246
isometrisch 12
isometrische Abbildung 192
isometrische Streifen 91
Isoperimetrie 204, 250, §§ 28, 123, 125
isoperimetrische Ungleichung 77f., 357, 359, §§ 29, 30
isotherme Parameter 160, § 93
isotrope Kurve 58, 77, 330, § 22
isotroper Raum 161

Jackson, S. B. 58
Jacobi, C. G. J. 156, 218, 233, 304
Joachimsthal, F. 88

Kamke, E. 254
Kanalfläche § 74
kanonische Kurvendarstellung 30
Karcher, H. 313, 320
Katenoid 357f.
Katsurada, Y. 268
Kawaguchi 57
Kegel 128
Kehllinie 58
Kehlpunkt 83
Kettenlinie 65
Klein, F. 7
Klingenberg, W. 233, 320, 326
Kneser, A. 37
Kneser, H. 58, 359
Knopp, K. 72
kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit 238
komplexer Parameter 230
Komponente
—, kontravariante 149
—, kovariante 149
—, Tensor- 101, 147f.
—, Vektor- 2
konfokale Flächen zweiter Ordnung 118
konfokale Parabeln 358
konforme Abbildung 119, 232
kongruent 12
Kongruenzlinie 277
Kongruenzpunkt 277
Kongruenzsätze §§ 103—105
konjugierte
— Netze § 54
— Punkte § 109
— Richtungen 126
— Tangenten 85
kontinuierliche Symmetrisierung 260
kontravarianter Tensor 148
kontravariantes Transformationsgesetz 148
konvexe Fläche 257
konvexe Kurve 58
konvexer Körper 256, 280
konvexer Polyeder 274
kovariante Ableitung § 61
kovarianter Tensor 101, 147
kovariantes Transformationsgesetz 101
Kovektor 170, § 62
—, alternierendes Produkt 172
— -feld 149
Kreis
—, Entfernungs- 204, 207, 212
— -evolvente 48
—, geodätischer 199, 203, § 81
— Isoperimetrie 204, §§ 28—30
—, Krümmungs- 38, 204, 207, 212
Kreuzhaube 245
Kroneckersymbol 109
Krümmung 29, 82, 159, 196, § 7
—, Abwickel- 92, 196
—, Durchschnitts- 78
—, elliptische 106, 110, 126
—, Gaußsche 109, 157, 159f., 176, 194, 204, 233f., §§ 80, 101
—, geodätische 83, 92, 183, 196, 233, §§ 77, 85, 92
—, Gesamt- 76, 78, 214, 328, § 98
—, Haupt- 107, 160, § 44
—, hyperbolische 106, 110, 126
—, Lancretsche 57
—, mittlere 109, 157, 159f., 177, 330, § 100
—, Normal- 83, 183
—, parabolische 106, 110, 126
—, Tangenten- 83
Krümmungs-
— -achse 38
— -halbmesser 38
— -kreis 38, 204, 207, 212
— -kugel 157
— -linie 119, 160, 177, § 46

Krümmungslinienparameter 113
— -mittelpunkt 38, 114, § 13
— -radius, geodätischer 195
— -streifen 88, 97, 113, § 35
— -tensor 153
krummlinige Koordinaten 116
Kürzeste 197, 199, 299, § 108
Kugel 116, 191, 207, 232, 237, 240, 243, 250ff., 258, 286, 303, 311, 319, 326, § 123
Kuiper, N. H. 291
Kurven 1. Kap.
— begleitende Dreibeine 30
—, Bertrand- § 15
— Binormale 21
— Binormalenbild 22
— Bogenlänge 29, § 5
—, ebene § 12
—, Extreme bei — 2. Kap.
—, Flächen- 100
—, Fußpunkt- 55
—, Hauptnormale 21, 82
— Invariantensysteme 28, § 8
—, isotrope 58, 77, 330, §§ 22, 23
— kanonische Darstellung 30
—, konvexe 58
— Krümmung 29, 82, § 7
— Krümmungsmittelpunkt § 13
—, Minimal- 51
— natürliche Gleichungen § 16
— -normale 21
—, orientierte 25
— Paratingente 57
— positiver Sinn 17
—, rektifizierbare 56, 70
— Schmiegebene § 6
— Schmiegkreis § 13
— Schmiegkugel § 14
— Tangente § 6
— Tangentenbild 21
— Torsion 22
— Wendepunkt 19
— Windung 29, §§ 7, 10

längentreue Abbildung 192
Lagrange, J. L. 6, 232, 330
Lambert, J. H. 232
Lamé, G. 225
Lancretsche Krümmung 57
Landkarte 232
Lashof, K. 256, 280
Laszwitz, K. 213
Lebesgue, H. 70, 194
Leichtweiß, K. 160, 281, 359
Leitkurve 158, 193
Lemma von Poincaré 167, 191
Lemniskate 286
Levi, H. 273
Levi-Civita, T. 92, 145
Lichtenstein, L. 231
Lie, S. 130, 204, 330, 332
Lieb, I. 191
Liebmann, H. 77, 250, 253
ligne de partage 300
lineare Abhängigkeit 6
lineare Differentialgleichungen § 17
Linearkombination 3
Linien-element 197, 207
— -feld 249
Linienintegral 162
Liouville, J. 195
Liouvillesche Fläche 235
Lobatschefskij, N. J. 213
Löbell, F. 160
lokale Differentialgeometrie 24, 130
Lusternik 326

Mainardi, G. 137, 154, 233
Malus 125
Mangoldt, H. v. 72
Mannheim, G. 157
Mannigfaltigkeit
—, analytische 238
—, differenzierbare 238
—, geschlossene 238
—, kompakte 238
—, orientierbare 238
—, Parameter- 237
—, triangulierbare 238
—, zweifache Überlagerung 245
Maximummethode 255, 280
Maxwell, J. C. 216
Mercator, G. 232
Meridian 102
metrischer Raum 294
Meusnier, M. Ch. 105
Milnor, J. 78
Minding, F. 195, 205, 233, 255
Minimalfläche 51, 158, 186, 341, 357, §§ 116—120, 122
—, adjungierte 358
—, assoziierte 335, 358
— der zweiten Fundamentalform 359
— durch einen Streifen § 120
—, Ennepersche 358
— Oberfläche § 119

Minimalfläche, Scherksche 358
—, vollständige 344, 347
Minimalkurve 51
Minkowski, H. 160, 268, 352
Mittelpunktsquadrik 235
mittlere Krümmung 109, 157, 159f., 177, 330, § 100
— —, Integral der — 264
Mohrmann, H. 37
Mollerup, J. 122
Monge, G. 99, 187, 194, 233, 330, 332, § 65
Morse, M. 326
Müller, E. 45
Mukhopadhyaya 37
Munkres, J. 238

Nabelpunkt 114, 160, 250f., § 47
Nabla 221
Natanson, I. P. 72
natürliche Gleichungen § 16
natürliche Parameter 336
Netz der Parameterkurven 90
Newman, M. 247
nichteuklidische Geometrie 213, 217, 233
Nirenberg, L. 160, 287
Nitsche, J. C. C. 208, 345, 359
Noether, E. 339
Nordpol 102, 240
Normale 21, 35
— eines Flächenelements 80, 100
Normalenbild 122
Normalenkongruenz 190
Normalensystem § 51
Normalenvektor 21, 35
Normalkoordinaten, Riemannsche 200, 309
Normalkrümmung 83, 103, 183
Normalkugel 83
Normalunterteilung 241
Nullstellenvergleichssatz 316

Oberfläche 122, 160
—, erste Variation § 115
—, zweite Variation § 121
orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit 238
orientierbare Fläche 239, 249, 256
orientierte Kurve 25
Orientierung 110
orthogonale Fläche 124, 187
orthogonale Trajektorienfläche 187
Orthogonalsystem, dreifaches 117, 190
orthonormiertes Dreibein 25
Ortsvektor 2
Ossermann, R. 347, 359
Oval 36

Parabeln, konfokale 358
parabolisch gekrümmt 106, 110, 126
Paraboloid § 20
parallele Vektoren nach Levi-Civita 93
Parallelfläche 157
Parallelismus von Levi-Civita 147, § 38
Parallelkörper 160
Parallelkoordinaten, geodätische 198, 234
Parallelkurvenschar 222, 234
Parallelverschiebung 2, 145
Parameter 15, 80, 99
—, affin isotherme 160
—, Bogenlängen- 17
— -gebiet 237
—, isotherme 160, § 93
—, komplexe 230
—, Krümmungslinien- 113
— -kurve 90
— -linie 99
— -mannigfaltigkeit 237
—, natürliche 336
—, sphärisch isotherme 160
— -transformation 25, 110
—, Tschebyscheffsche 235
— -viereck 235
Paratingente 57
partielle Differentialgleichung § 60
Perron, O. 352
Pfaffsche Formen 163
— alternierendes Produkt 164
— invariante Ableitung § 72
— kommutatives Produkt 167
Pinel, M. 58
Plateau, J. 330, 341
Plateausches Problem 330, 341, 359
Pogorelov, A. V. 280, 319, 328
Poincaré, H. 167, 191, 213, 219, 246, 300
Poincarésche Halbebene 213, § 83
Polarkoordinaten 117
—, geodätische § 79
Poldistanz 102
Polyeder, konvexes 274
Poncelet, V. J. 156
positiver Sinn einer Kurve 17
positiv orientiertes Dreibein 25

Produkt
—, äußeres 5
—, inneres § 1
—, skalares 2
—, Tensor- 148
projektive Ebene 246
Pseudogeodätische 235
Punktmengen
—, isometrische 12
—, kongruente 12
Puiseux, V. 203

Quadrat eines Vektors 3
Quadratische Form eines Tensors 101
— —, positiv definite 101

Rado, T. 341
Radon, G. 61, 94
Randwertaufgabe, erste der Potentialtheorie 224, 341
rechtwinkliges Flächennetz 117, 119
Regelfläche 85, 158, 159, 357
— Erzeugende 85
— Kehllinie 158
— Leitkurve 158
— zweiter Ordnung 128
Reichardt, H. 78
rektifizierbare Kurve 56, 70
rektifizierende Ebene 56
Rembs, E. 286
Rham, de 294
Ribaucour, A. 330
Riccati, J. 127
Ricci, G. 152, 155
Richtungsableitung 146, 180
—, kovariante § 61
Richtungsfeld 246
Riemann, B. 153, 200, 233, 330, 333, 338
Riemannsche Normalkoordinaten 200, 309
Riemannscher Krümmungstensor 153
Riemannsche Zahlenkugel 335
Rinow, W. 239, 294
Rodrigues, O. 114
Röhrenfläche 158, 189
— Seele 158
Roitzsch, R. 281
Rotationsflächen 235
Rothe, R. 58

Saks-Zygmund 57
Satz von
— — Alexandrow § 112
Satz von Beltrami und Enneper 159, § 56
— — Bernstein § 122
— — Bonnet § 59
— — Christoffel 268, 327
— — Dupin § 48
— — Euler 107, 157
— — Fenchel 76, 78, 326
— — Hopf und Rinow 294
— — Jacobi § 110
— — Joachimsthal 88
— — Malus und Dupin 125
— — Meusnier 105, 126, 157
— — Minkowski 268
— — Schmidt 72, § 39
— — Schwarz 75
— — Stokes 165
— — Sturm 316
Sauer, R. 216, 236
Schattengrenze 262, 266
Scheffers, G. 207
Scheitel 36, 58, 98
Scherk, H. F. 358
Scherksche Minimalfläche 358
Schiebfläche 130, 159, § 116
Schilt, H. 195
schlichte Überdeckung 197
Schmidt, E. 58, 76, 359, §§ 29, 39
Schmiegebene 57, § 6
Schmiegkreis § 13
Schmiegkugel § 14
Schmiegkurven 125
Schmiegparaboloid 326
Schmiegstreifen 88, § 35
Schmiegtangente 107, 125
Schnirelmann 326
Schnittort 305, 320, 321, § 109
Schnittortpunkt 300
Schubert, H. 237, 294, 298
Schur, A. 76
Schwarz, H. A. 76, 330, 338, 340, 342, 344, 352
Schwarzsche Ungleichung 69
Seifert, H. 244
Seitenkrümmung 195, 233
Selbstdurchdringung 239
Senkin, E. P. 280
Simon, U. 258
simplizialer Komplex 238
Singularität 246
skalare Größe 4
skalares Produkt 2

Skalarfeld 152
Snellius, W. 125
Speichenpunkt 58
sphärisches Bild § 50
sphärisch-isotherme Parameter 160
Spiegelung 207
Spurbedingung 277
Stäckel, P. 111, 233
starre Fläche 255, 283
Steiner, J. 260, 281, 348, 351, 357
stereographische Projektion 232, 240, 334
Stokes, J. 165, 328
Streifen 3. Kap.
— Abwicklung 91
—, asymptotischer 86
— begleitendes Dreibein § 33
—, Darboux- 97
— Drehung um seine Kurve § 36
—, ebener 91
—, Flächen- 103
—, geodätischer 88, § 35
— Invarianten 82
—, isometrischer 91
—, Krümmungs- 88, 97, 113, § 35
—, Schmieg- 88, § 35
—, verbiegbarer 91
— Verbiegung § 37
Striktion 159
Strubecker, K. 57
Study, E. 52, 338
Stützebene 256
Stützfunktion 257
Stützgerade 74
Sturm, J. 316
Südpol 240
Süss, W. 359
Summe von Vektoren 2
Surfaces moulures 187
Symmetriesatz 260
Symmetrisierung 348, 351
—, kontinuierliche 260
— Konvergenzbeweis § 125

Taillierte Fläche 286
Tangente § 6
—, Haupt- 112
—, Schmieg- 125
—, konjugierte 85
Tangentenbild 21
Tangentenfläche 18, 58, 97, 128
Tangentenkrümmung 83
Tangentenkugel 83
Tangentenvektor 21, 35
Tangentialebene 80, 100
Tensor 101, 109, § 62
—, Diskriminanten- 152
—, Fundamental- 101
— Komponente 101, 147, 148
—, kontravarianter 148
—, kovarianter 101, 147
— kovariante Ableitung 149, §§ 61, 63
—, nichtausgearteter 148
— Produkt 148
—, quadratische Form 101
—, Riemannscher Krümmungs- 153
—, schiefsymmetrischer 152
—, symmetrischer 101
Tensor und Differentialgeometrie § 69
Theorema egregium 137, 177, § 45
Thomas, T. Y. 160
Threlfall, W. 244
topologische Abbildung 237
topologische Invarianten 242
Torse 86, 113, 129, 132, 194, 204
—, Bedingung 193, 4. Kap. (110)
Torsion 22
Torus 158, 240, 243, 249
—, Dorn- 158
Totalwindung 77
Trajektorienfläche, orthogonale 187
Transformationsgesetz von Tensoren 101, 147, 148
Translationsfläche 130
translationsgleich 260
Translationssatz 260
Triangulation 238
triangulierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit 238
triviale Verbiegung 281
Tschebyscheff, P. L. 235, 291
—, Parameternetz 235

Unabhängige Invarianten § 4
uneigentliche, winkeltreue Abbildung 232
Ungleichung, isoperimetrische 77, 78, §§ 29, 30

Vallette, G. 98
Variation der Bogenlänge 58, 91
Variationsproblem von Radon § 26
Vekua, I. N. 280
Vektor 1
— äußeres Produkt 5

Vektor, Beschleunigungs- 19
— Determinante § 2
—, Dreh- 33
—, Einheits- 18
— -feld 145
—, Geschwindigkeits- 18
—, Grund- 9
— Komponente 2
— kovariante Ableitung § 61
— lineare Abhängigkeit 6
—, Orts- 2
—, parallele 93
— -produkte § 2
— Quadrat 3
— skalares Produkt 2
— Summe 2
verbiegbare Streifen 91
Verbiegung 89, 91, 233, 281, § 76
—, infinitesimale 282
Verrückung
—, normale 91
—, tangentiale 91
Versiot, E. 52
Verschiebungsgesetz 93
Vierscheitelsatz 58, 75, 98, § 12
vollständige Fläche 239, 327, 328, §§ 107, 108
vollständiges System von Bewegungsinvarianten 8
— — von mehreren Punkten 9
Vollständigkeitsbeziehung 71
von Mangoldt 72
Vortisch, W. 281
Voss, K. 33, 79, 259, 262, 280, 328

Walden, R. 281
Wegner, B. 281
Weierstrass, K. 197, 330, 337
Weingarten, J. 132, 154
weinwendig 33
Weitzenböck 58
Wendelfläche 358
Wendelinien 125
Wendepunkt 19, 58, 125
Wendland, W. 281
Weyl, H. 9, 283, 287
W-Fläche 191, 328
Wiedersehensfläche § 111
Windung 29, 57, 77, 97, 159, §§ 7, 10
—, geodätische 85, 115, 118, 133, 183
—, Gesamt- 97, 158
—, Total- 77
Windungszahl 247
windschiefe Fläche 129
winkeltreue Abbildung 119, § 94
Winter, A. 58, 160, 161, 231
Wirsing, E. 58
W-Kongruenz 191
Wunderlich, W. 235

Zahlenkugel 335
Zentrafläche 190
Zhitomirski, O. K. 276
zweifache Überlagerung 245
Zwirner, K. 235
Zygmund 57
Zyklide von Dupin 189
Zylinder 157, 159
Zylinderfläche 128, 187, 190

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Eine Auswahl

---

67. Byrd/Friedman: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. 2nd edition
68. Aumann: Reelle Funktionen. 2. Aufl.
74. Boerner: Darstellungen von Gruppen. 2. Aufl.
76. Tricomi: Vorlesungen über Orthogonalreihen. 2. Aufl.
77. Behnke/Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Nachdruck der 3. Aufl.
78. Lorenzen: Einführung in die operative Logik und Mathematik. 2. Aufl.
86. Richter: Wahrscheinlichkeitstheorie. 2. Aufl.
87. van der Waerden: Mathematische Statistik. 3. Aufl.
94. Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. 2. Aufl.
97. Greub: Linear Algebra. 3rd edition
99. Cassels: An Introduction to the Geometry of Numbers. 2nd printing
104. Chung: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. 2nd edition
107. Köthe: Topologische lineare Räume I. 2. Aufl.
114. MacLane: Homology. Reprint of 1st edition
116. Hörmander: Linear Partial Differential Operators. 3rd printing
117. O'Meara: Introduction to Quadratic Forms. 2nd printing
120. Collatz: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Nachdruck der 1. Aufl.
121./122. Dynkin: Markov Processes
123. Yosida: Functional Analysis. 3rd edition
124. Morgenstern: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. 2. Aufl.
125. Itô/McKean jr.: Diffusion Processes and Their sample Paths
126. Lehto/Virtanen: Quasiconformal Mappings in the Plane
127. Hermes: Enumerability, Decidability, Computability. 2nd edition
128. Braun/Koechler: Jordan-Algebren
129. Nikodým: The Mathematical Apparatus for Quantum Theories
130. Morrey jr.: Multiple Integrals in the calculus of Variations
131. Hirzebruch: Topological Methods in Algebraic Geometry. 3rd edition
132. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators
133. Haupt/Künneth: Geometrische Ordnungen
134. Huppert: Endliche Gruppen I
135. Handbook for Automatic Computation. Vol. 1/Part a: Rutishauser: Description of ALGOL 60
136. Greub: Multilinear Algebra
137. Handbook for Automatic Computation. Vol. 1/Parth b: Grau/Hill/Langmaack: Translation of ALGOL 60
138. Hahn: Stability of Motion
139. Doetsch/Schäfke/Tietz: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 1. Teil
140. Collatz/Nicolovius/Törnig: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 2. Teil
141. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 3. Teil
142. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. 4. Teil
143. Schur: Vorlesungen über Invariantentheorie
144. Weil: Basic Number Theory

152. Hewitt/Ross: Abstract Harmonic Analysis. Vol. 2: Structure and Analysis for Compact Groups, Analysis on Locally Compact Abelian Groups
154. Singer: Bases in Banach Spaces I
155. Müller: Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves
156. van der Waerden: Mathematical Statistics
157. Prohorov/Rozanov: Probability Theory
158. Constantinescu/Cornea: Potential Theory on Harmonic Spaces
159. Köthe: Topological Vector Spaces I
160. Agrest/Maksimov: Theory of Incomplete Cylindrical Functions and Their Applications
161. Bhatia/Szegö: Stability Theory of Dynamical Systems
162. Nevanlinna: Analytic Functions
163. Stoer/Witzgall: Convexity and Optimization in Finite Dimensions I
164. Sario/Nakai: Classification Theory of Riemann Surfaces
165. Mitrinović: Analytic Inequalities
166. Grothendieck/Dieudonné: Eléments de Géométrie Algebriqué I
167. Chandrasekharan: Arithmetical Functions
168. Palamodov: Linear Differential Operators with Constant Coefficients
169. Rademacher: Topics in Analytic Number Theory
170. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations
171. Singer: Best Approximation on Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces
172. Bühlmann: Mathematical Methods in Risk Theory
173. F. Maeda/S. Maeda: Theory of Symmetric Lattices
174. Stiefel/Scheifele: Linear and Regular Celestial Mechanics. Perturbed two-body Motion—Numerical Methods—Canonical Theory
175. Larsen: An Introduction of the Theory of Multipliers
176. Grauert/Remmert: Analytische Stellenalgebren
177. Flügge: Practical Quantum Mechanics I
178. Flügge: Practical Quantum Mechanics II
179. Giraud: Cohomologie non abélienne
180. Landkof: Foundations of Modern Potential Theory
181. Lions/Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I
182. Lions/Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications II
183. Lions/Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications III
184. Rosenblatt: Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior
185. Rubinowicz: Sommerfeldsche Polynommethode
186. Wilkinson/Reinsch: Handbook for Automatic Computation II, Linear Algebra
187. Siegel/Moser: Lectures on Celestial Mechanics
188. Warner: Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I
189. Warner: Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II
190. Faith: Algebra: Rings, Modules, and Categories I
191. Faith: Algebra: Rings, Modules, and Categories II
192. Mal'cev: Algebraic Systems
193. Pólya/Szegö: Problems and Theorems in Analysis. Vol. 1
194. Igusa: Theta Functions
195. Berberian: Baer*-Rings
196. Athreya: Branching Processes
197. Benz: Vorlesungen über Geometrie der Algebren
200. Dold: Lectures on Algebraic Topology

Ro / C420

96.—

UNIVERSITY OF ROCHESTER LIBRARIES
3 9087 00082961 6

1362775
Blaschke

MATH.-SCI.
QA
641
.B6254
1973

Not for circulation until
3/19/74